به نام خدا

راه حل سوال اول – پایه دوم

فرض کنید چنین اتفاقی نمی‌افتد.
هر ستونی را در نظر بگیرید که حداقل یک مهره‌ی رنگی دارد اما تمام خانه‌های آن دارای مهره‌ی رنگی نیست. بالاترین مهره‌ی رنگی که در خانه‌ی مجاور و پایین آن مهره‌ی رنگی قرار ندارد را در نظر بگیرید. با توجه به فرض خانه‌ی پایین این مهره باید خالی باشد. پس در این ستون خانه‌ی خالی‌ای وجود دارد که خانه‌ی بالای آن دارای مهره‌ی رنگی است.
به همین ترتیب ثابت می‌شود به ازای هر ستونی که حداقل یک مهره‌ی سفید دارد اما تمام خانه‌های آن دارای مهره‌ی سفید نیست یک خانه‌ی خالی داریم که خانه‌ی بالای آن دارای مهره‌ی سفید است.

هر سطری را در نظر بگیرید که حداقل یک مهره‌ی رنگی دارد اما تمام خانه‌های آن دارای مهره‌ی رنگی نیست. چپ‌ترین مهره‌ی رنگی که در خانه‌ی سمت راست و مجاور ان مهره‌ی رنگی قرار ندارد را در نظر بگیرید. با توجه به فرض خانه‌ی سمت راست این خانه باید خالی باشد. پس در این سطر خانه‌ی خالی‌ای وجود دارد که خانه‌ی سمت چپ ان دارای مهره‌ی رنگی است
به همین ترتیب ثابت می‌شود در هر سطر شامل حداقل یک مهره‌ی سفید که تمام خانه‌های آن دارای مهره‌ی سفید نیست یک خانه ی خالی داریم که خانه‌ی سمت چپ آن دارای مهره‌ی سفید است.

جدول را بعد از ۴۵مین رنگ آمیزی در نظر بگیرید.
اگر سطری باشد که در تمام خانه‌های آن مهره‌ی رنگی قرار داشته باشد پس در تمامی ستون‌ها حداقل یک مهره‌ی رنگی وجود دارد. پس حداقل شش ستون داریم که در آن حداقل یک مهره‌ی رنگی وجود دارد اما تمام خانه های آن دارای مهره‌ی رنگی نیست. در هر یک از این ستون‌ها خانه‌ای خالی وجود دارد که خانه‌ی بالای آن دارای مهره‌ی رنگی است. همچنین چون هر ستون حداقل یک مهره‌ی رنگی دارد هیچ ستونی وجود ندارد که تمام خانه‌های آن دارای مهره‌ی سفید باشد. پس چون حداقل ۵ ستون هستند که حداقل یک مهره‌ی سفید دارند حداقل ۵ خانه‌ی خالی وجود دارند که خانه‌ی بالای آن‌ها دارای مهره‌ی سفید است. این پنج خانه با شش خانه‌ی قبل متفاوتند. زیرا مهره‌ی درون خانه‌ی بالای این پنج خانه رنگ متفاوتی با رنگ مهره‌ی درون خانه‌ی بالای شش خانه‌ی قبل دارد. پس یازده خانه‌ی خالی در جدول وجود دارد. درحالی که در تمامی مراحل ۹ خانه‌ی خالی داریم.
به همین ترتیب اگر سطری باشد که در تمام خانه‌های آن مهره‌ی سفید قرار داشته باشد به تناقض می‌رسیم.

پس فرض کنید هیچ سطری نیست که در تمام خانه های آن مهره‌ی رنگی قرار داشته باشد. و همچنین فرض کنید هیچ سطری نیست که در تمام خانه‌های آن مهره‌ی سفید قرار داشته باشد. چون حداقل پنج سطر شامل مهره‌ی رنگی داریم پس پنج خانه‌ی خالی داریم که خانه‌ی سمت چپ آن‌ها دارای مهره‌ی رنگی است. همچنین حداقل پنج سطر شامل

مهره‌ی سفید داریم پس پنج خانه‌ی خالی داریم که خانه‌ی سمت چپ آن‌ها دارای مهره‌ی سفید است و چون رنگ مهره‌ی خانه ی سمت چپ این پنج خانه با پنج خانه‌ی قبل متفاوتند پس خود این پنج خانه نیز با پنج خانه‌ی قبل متفاوتند. پس در جدول حداقل ده خانه‌ی خالی وجود دارد. که این نیز تناقض است.

پس حتما چنین اتفاقی می افتد.

یک وزنه را کناری گذاریم و ۶۰ وزنه‌ی باقی‌مانده را به ۳ دسته‌ی ۲۰تایی تقسیم می‌کنیم.

حکم ۱: حتماً ۲تا از این دسته‌ها باهم برابر و با دسته‌ی سوم نابرابر بود.

حالت ۱: وزنه‌ی بیرون گذاشته b باشد.

۲۰	۲۰	۲۰
A	B	C

(۱)

$19a+b$	$20a$	$20a$

حالت ۲: وزنه‌ی بیرون گذاشته شده a باشد.

(۲)-۱

$19a+b$	$19a+b$	$20a$

(۲)-۲

$18a+2b$	$20a$	$20a$

حکم ۲: می‌توان با ۲ مقایسه ۲ دسته مثل A و B را به دست آورد که $A=B$ و دسته‌ی سوم C که وضعیت A را نسبت به C می‌دانیم. (می‌دانیم $A>C$ است یا $A<C$)

اثبات حکم ۲:

الف) ابتدا دسته‌ی ۱ را با دسته‌ی ۲ مقایسه می‌کنیم. — $C=$ دسته‌ی ۳ / $A=$ دسته‌ی ۱ و $B=$ دسته‌ی ۲ پس به حکم رسیدیم

الف-۱) اگر برابر بود دسته‌ی ۱ را با دسته‌ی ۳ مقایسه می‌کنیم

الف-۲) اگر برابر نبود دسته‌ی ۲ را با دسته‌ی ۳ مقایسه می‌کنیم — $C=$ دسته‌ی ۱ / $A=$ دسته‌ی ۲ و $B=$ دسته‌ی ۳ پس به حکم رسیدیم

الف-۲)-۱) اگر دسته‌ی ۲ با دسته‌ی ۳ برابر بود

الف-۲)-۲) اگر ۲ با ۳ نابرابر بود طبق الف $\boxed{1}$ دسته‌ی ۱ با دسته‌ی ۳ برابر است.

$C=$ دسته‌ی ۲ / $A=$ دسته‌ی ۱ و $B=$ دسته‌ی ۳

پس به حکم رسیدیم

ـــ طبق ۲ ک می‌توانیم A و B و C را بیابیم با دو حرکت بطوری که $A=B$, $A,B \neq C$ و می‌دانیم که $A>C$ یا $A<C$

فرض کنید دسته‌ی A ، x_1 وزنه‌ی b و دسته‌ی B ، x_2 وزنه‌ی b داشته باشد

$$(20-x_1)a + x_1 b = (20-x_2)a + x_2 b \Rightarrow$$

$$x_1(b-a) = x_2(b-a) \Rightarrow$$

$$\boxed{x_1 = x_2}$$

بنابراین چون می‌دانیم $x_1+x_2 \leq 2$ ، ۲ حالت بیشتر نداریم

حالت ① : $x_1 = x_2 = 0$ ، $B=A=20a$

حالت ② : $x_1 = x_2 = 1$ ، $B=A=19a+b$

← می‌خواهیم با یک مقایسه حالت A و B را بیابیم :

حالا A را به دو دسته‌ی ۱۰ تایی D, E تقسیم می‌کنیم

A

↓

D: 10 | E: 10

حالا D,E را با هم مقایسه می‌کنیم اگر $D=E$ آن وقت باشد استدلال

مثل این می‌ماند که تعداد وزنه‌های b موجود در D با E برابر است و چون D و E دارای هم حداکثر ۱ وزنه‌ی b دارند پس می‌فهمیم که D و E فاقد وزنه‌ی b است و A در وضعیت ① است .

اگر $D \neq E$ حداقل یک وزنه b بین D و E است پس A در حالت ② است .

حالا ۳ حرکت انجام شده و وضعیت A و B را می‌دانیم .

$\boxed{A>C}$

حالت ① : $20a > 19a+b \Rightarrow a>b$

$20a > 18+2b \Rightarrow a>b$

حالت ② : $19a+b > 20a \Rightarrow a<b$

$\boxed{A<C}$

$20a < 19a+b \Rightarrow a<b$

$20a < 18a+2b \Rightarrow a<b$

$19a+b < 20a \Rightarrow a>b$

آزمون سال دوم سوال ۳ :

۲n وزنه را با شماره‌های ۱ تا ۲n به ترتیب از چپ به راست شماره‌گذاری می‌کنیم

وزنه‌های سروته دنباله را درنظر می‌گیریم. در ابتدای کار وزنه‌های با شماره‌ی ۱ و ۲n سروته هستند. بنابراین یک وزنه‌ی با شماره‌ی زوج و یک وزنه‌ی با شماره‌ی فرد سروته دنباله قرار دارند.

حال ثابت می‌کنیم که همواره هنگام انجام حرکت نفر اول یک وزنه‌ی با شماره‌ی فرد و یک وزنه‌ی با شماره‌ی زوج سروته می‌باشد.

در ابتدای کار که نوبت نفر اول است که این حکم صادق است، حال در هر مرحله وقتی نفر اول حرکت انجام می‌دهد یا وزنه‌ی با شماره‌ی زوج را برمی‌دارد که هم وزنه‌ی سر و هم وزنه‌ی ته شماره‌ی فرد دارند و یا وزنه‌ی با شماره‌ی فرد را برمی‌دارد که هم وزنه‌ی سر و هم ته شماره‌ی زوج دارند.

بنابراین هنگامی که نفر دوم می‌خواهد حرکت انجام دهد زوجیت شماره‌ی سروته یکسان است.

بنابراین بعد از حرکت نفر دوم زوجیت سروته متفاوت می‌شود پس یک وزنه‌ی با شماره‌ی زوج و یکی فرد داریم.

حال مجموع وزن وزنه‌های با شماره‌ی زوج را x و با شماره‌ی فرد را y می‌نامیم.

اگر $x \geq y$ ← نفر اول همواره وزنه‌های با شماره‌ی زوج را برمی‌دارد (چون همواره هنگام حرکت نفر اول یک وزنه‌ی زوج و یکی فرد داریم می‌توانیم یک وزنه‌ی زوج برداریم بنابراین به نفر دوم وزنه‌های فرد می‌افتد پس در نهایت تمامی وزنه‌های زوج به نفر اول و تمامی وزنه‌ها‌ی فرد به نفر دوم می‌رسد)

و اگر $x < y$ ← نفر اول مانند استدلال بالا وزنه‌های فرد را برمی‌دارد.

بنابراین نفر اول همواره می‌تواند به شکلی بازی کند که نبازد.

به نام خدا

راه حل سوال چهارم - پایه دوم

لم: می‌توان یال‌های هر گراف بی طوقه n راسی و $2k$ یالی همبند را طوری با k رنگ، رنگ کرد که از هر رنگ دقیقا دو یال داشته باشیم و یال‌های یک‌رنگ حداقل یک راس مشترک داشته باشند.
اثبات: حکم را به استقرا روی $n+k$ ثابت می کنیم:
پایه:

1. $n=1$ در این صورت گراف یالی ندارد. پس حکم برقرار است
2. $n=2$ در این صورت تمام یال‌های گراف بین دو راس است که درنتیجه آن‌ها رو دو به دو جفت کرده و هر جفت را به یک رنگ متفاوت در می آوریم.

گام: بلندترین مسیر گراف را در نظر بگیرید و رئوس آن را $u_1, u_2, ..., u_k$ بنامید. چون $n \geq 3$ و گراف همبند است پس $k \geq 3$. اگر u_2 همسایه‌ای مانند v در خارج از مسیر داشته باشد یال‌های u_2v و u_2u_1 را به یک رنگ جدید دربیاورید و این یال‌ها را از گراف حذف کنید. همچنین اگر در این صورت درجه‌ی رأس v یا u_1 صفر شود آن رأس را نیز از گراف حذف می‌کنیم. فرض کنید v یا u_1 از گراف حذف نشود. پس چون تمامی همسایه‌های این دو رأس درون مسیر هستند همچنان گراف همبند می‌ماند. پس می‌توان از فرض استقرا روی گراف باقی‌مانده استفاده کرد و درنتیجه سایر یال‌های گراف با $k-1$ رنگ رنگ می‌شوند. پس حکم اثبات می‌شود.

اثبات مسئله: اگر به ازای هر شهر یک رأس متناظر با آن و به ازای هر جاده بین دو شهر بین رئوس متناظر آن یک یال بگذاریم اثبات حکم مسئله معادل با اثبات لم بالاست. پس حکم مسئله اثبات شد.