

راه حل سوال اول - پایه دوم

فرض کنید چنین اتفاقی نمی‌افتد.

هر ستونی را در نظر بگیرید که حداقل یک مهره‌ی رنگی دارد اما تمام خانه‌های آن دارای مهره‌ی رنگی نیست. بالاترین مهره‌ی رنگی که در خانه‌ی مجاور و پایین آن مهره‌ی رنگی قرار ندارد را در نظر بگیرید. با توجه به فرض خانه‌ی پایین این مهره باید خالی باشد. پس در این ستون خانه‌ی خالی‌ای وجود دارد که خانه‌ی بالای آن دارای مهره‌ی رنگی است. به همین ترتیب ثابت می‌شود به ازای هر ستونی که حداقل یک مهره‌ی سفید دارد اما تمام خانه‌های آن دارای مهره‌ی سفید نیست یک خانه‌ی خالی داریم که خانه‌ی بالای آن دارای مهره‌ی سفید است.

هر سطری را در نظر بگیرید که حداقل یک مهره‌ی رنگی دارد اما تمام خانه‌های آن دارای مهره‌ی رنگی نیست. چپ‌ترین مهره‌ی رنگی که در خانه‌ی سمت راست و مجاور آن مهره‌ی رنگی قرار ندارد را در نظر بگیرید. با توجه به فرض خانه‌ی سمت راست این خانه باید خالی باشد. پس در این سطر خانه‌ی خالی‌ای وجود دارد که خانه‌ی سمت چپ آن دارای مهره‌ی رنگی است

به همین ترتیب ثابت می‌شود در هر سطر شامل حداقل یک مهره‌ی سفید که تمام خانه‌های آن دارای مهره‌ی سفید نیست یک خانه‌ی خالی داریم که خانه‌ی سمت چپ آن دارای مهره‌ی سفید است.

جدول را بعد از ۴۵مین رنگ آمیزی در نظر بگیرید.

اگر سطری باشد که در تمام خانه‌های آن مهره‌ی رنگی قرار داشته باشد پس در تمامی ستون‌ها حداقل یک مهره‌ی رنگی وجود دارد. پس حداقل شش ستون داریم که در آن حداقل یک مهره‌ی رنگی وجود دارد اما تمام خانه‌های آن دارای مهره‌ی رنگی نیست. در هر یک از این ستون‌ها خانه‌ی خالی وجود دارد که خانه‌ی بالای آن دارای مهره‌ی رنگی است. همچنین چون هر ستون حداقل یک مهره‌ی رنگی دارد هیچ ستونی وجود ندارد که تمام خانه‌های آن دارای مهره‌ی سفید باشد. پس چون حداقل ۵ ستون هستند که حداقل یک مهره‌ی سفید دارند حداقل ۵ خانه‌ی خالی وجود دارند که خانه‌ی بالای آن‌ها دارای مهره‌ی سفید است. این پنج خانه با شش خانه‌ی قبل متفاوتند. زیرا مهره‌ی درون خانه‌ی بالای این پنج خانه رنگ متفاوتی با رنگ مهره‌ی درون خانه‌ی بالای شش خانه‌ی قبل دارد. پس یازده خانه‌ی خالی در جدول وجود دارد. درحالی که در تمامی مراحل ۹ خانه‌ی خالی داریم.

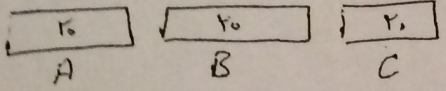
به همین ترتیب اگر سطری باشد که در تمام خانه‌های آن مهره‌ی سفید قرار داشته باشد به تناقض می‌رسیم.

پس فرض کنید هیچ سطری نیست که در تمام خانه‌های آن مهره‌ی رنگی قرار داشته باشد. و همچنین فرض کنید هیچ سطری نیست که در تمام خانه‌های آن مهره‌ی سفید قرار داشته باشد. چون حداقل پنج سطر شامل مهره‌ی رنگی داریم پس پنج خانه‌ی خالی داریم که خانه‌ی سمت چپ آن‌ها دارای مهره‌ی رنگی است. همچنین حداقل پنج سطر شامل

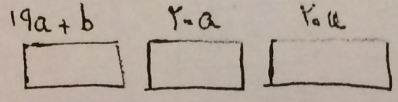
مهره‌ی سفید داریم پس پنج خانه‌ی خالی داریم که خانه‌ی سمت چپ آن‌ها دارای مهره‌ی سفید است و چون رنگ مهره‌ی خانه‌ی سمت چپ این پنج خانه با پنج خانه‌ی قبل متفاوتند پس خود این پنج خانه نیز با پنج خانه‌ی قبل متفاوتند. پس در جدول حداقل ده خانه‌ی خالی وجود دارد. که این نیز تناقض است. پس حتما چنین اتفاقی می‌افتد.

یک فنجان را کفایت می‌کند و ۷۰ درصدی باقی مانده را به ۳۰ درصدی تقسیم کنیم.

حالت ۱: وزنی بیرون گذاشته b باشد.

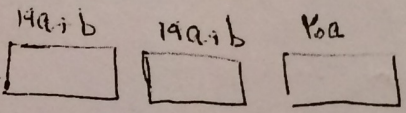


①

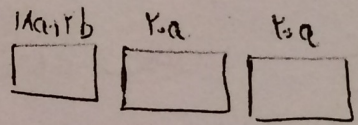


حالت ۲: وزنی بیرون گذاشته شده a باشد.

②-۱



②-۲



۴ ۲ می‌توان با ۲ مقایسه کرد مثل A و B نیست آورد $A=B$ و کفایت است C نه وضعیت A را نسبت به C در اینجاست. (می‌دانیم $A > C$ است یا $A < C$)

اثبات ۲۴

الف) ابتدا درستی ① را با درستی ② مقایسه کنیم.

الف - ۱) اگر برابر بود درستی ① را با درستی ③ مقایسه کنیم

الف - ۲) اگر برابر نبود درستی ② را با درستی ③ مقایسه کنیم

الف - ۲ - ۱) اگر ② با درستی ③ برابر بود

الف - ۲ - ۲) اگر ② با درستی ③ برابر نبود

درستی ① با ③ برابر بود طبق الف ①
درستی ② با ③ برابر بود طبق الف ②
درستی ③ با ① و ② برابر بود طبق الف ③

پس به حکم ریاضی

درستی درستی درستی
درستی $B=④$ و $A=①$ / $C=③$ پس به حکم ریاضی

درستی درستی درستی
درستی $B=④$ و $A=①$ / $C=①$ پس به حکم ریاضی

درستی ① با درستی ③ برابر است

طبق ۲۴ می توانیم A و B و C را با هم با هم صرفاً به طوری که $A=B$ و $A, B \neq C$ می داریم $A > C$ و $A < C$ فرض کنید که A، x_1 وزنی b، درستی B، x_2 وزنی b داشته باشد

$$(20 - x_1)a + x_1b = (20 - x_2)a + x_2b \Rightarrow$$

$$x_1(b-a) = x_2(b-a) \Rightarrow$$

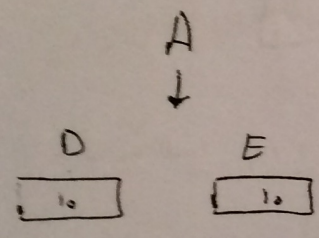
$$\boxed{x_1 = x_2}$$

بنابراین چون می داریم $x_1 + x_2 \leq 2$ ، ۲ حالت می بینیم

$B = A = 20a$
 حالت ① : $x_1 = x_2 = 0$

$B = A = 19a + b$
 حالت ② : $x_1 = x_2 = 1$

می توانیم با یک معادله A و B را با هم :
 حال A را با درستی D, E یا با تقسیم کنیم



$D = E$ آن وقت است

D, E را با هم مقایسه کنیم

مثلاً می بینیم مقدار وزنی که موجود در D یا E برابر است و چون D, E روی

هم معادله اوزنی ط دارند پس می بینیم که D و E غایت وزنی است و A در وضعیت ① است

اگر D و E حداقل یک مورد با بین D و E است پس A در حالت ② است

$$\boxed{A > G}$$

حالت ① : $20a > 19a + b \Rightarrow a > b$
 $20a > 18a + 2b \Rightarrow a > b$

حالت ② : $18a + b > 20a \Rightarrow a < b$

حال ۲۳ را در نظر بگیرید و فرض کنید A و B را با هم

$$\boxed{A < G}$$

$20a < 19a + b \Rightarrow a < b$
 $20a < 18a + 2b \Rightarrow a < b$

$19a + b < 20a \Rightarrow a > b$

۲n وزن را با شماره کی ۱ تا ۲n به ترتیب از چپ به راست شماره گذاری می کنیم

وزن کی سروده دیناله را در خدمت می گیریم. در بسیاری کار وزن کی با شماره ی ۱ و ۲n سروده هستند. بنابراین یک وزن کی با شماره ی زوج و یک وزن کی با شماره ی فرد سروده دیناله قرار دارند.

حالا ثابت می کنیم که همواره هنگام اجزای حرکت فرد اول یک وزن کی با شماره ی زوج سروده می باشد.

در ابتدای کار به ترتیب فرد اول است که این حکم صادق است، حالا در هر مرحله وقتی فرد اول حرکت انجام می دهد یا وزن کی با شماره ی زوج را برمی دارد

هم وزن کی سرودهم وزن کی نه شماره ی فرد را برمی دارد نه هم وزن کی سرودهم نه شماره ی زوج را برده

بنابراین هنگامی که فرد دوم می خواهد حرکت انجام دهد زوجیت شماره ی سروده یکنان است.

بنابراین بعد از حرکت فرد دوم زوجیت سروده ی مساوی می شود پس یک وزن کی با شماره ی زوج یعنی فرد داریم.

حالا مجموع وزن وزن کی با شماره ی زوج را x و با شماره ی فرد را y می نویسیم.

و آن $x \neq y$ ← فرد اول همواره وزن کی با شماره ی زوج را برمی دارد (چون همواره هنگام فرد اول یک وزن کی زوج یعنی فرد داریم می توانیم یک حرکت

وزن کی زوج برداریم بنابراین به فرد دوم وزن کی فرد می افتد پس در نهایت

تمامی وزن کی زوج به فرد اول دعای وزن کی فرد به فرد دوم می رسد

و آن $x \neq y$ ← فرد اول همیشه استدلال بالا وزن کی فرد را برمی دارد.

بنابراین فرد اول همواره برمی آید به سطله سانی کند که شازد.

راه حل سوال چهارم - پایه دوم

لم: می‌توان یال‌های هر گراف بی طوقه n راسی و $2k$ یالی همبند را طوری با k رنگ، رنگ کرد که از هر رنگ دقیقاً دو یال داشته باشیم و یال‌های یک‌رنگ حداقل یک راس مشترک داشته باشند.
اثبات: حکم را به استقرا روی $n + k$ ثابت می‌کنیم:
پایه:

۱. $n = 1$ در این صورت گراف یالی ندارد. پس حکم برقرار است

۲. $n = 2$ در این صورت تمام یال‌های گراف بین دو راس است که در نتیجه آن‌ها رو دو به دو جفت کرده و هر جفت را به یک رنگ متفاوت در می‌آوریم.

گام: بلندترین مسیر گراف را در نظر بگیرید و رئوس آن را u_1, u_2, \dots, u_k بنامید. چون $n \geq 3$ و گراف همبند است پس $k \geq 3$. اگر u_2 همسایه‌ای مانند v در خارج از مسیر داشته باشد یال‌های u_2v و u_2u_1 را به یک رنگ جدید در بیاورید و این یال‌ها را از گراف حذف کنید. همچنین اگر در این صورت درجه‌ی رأس v یا u_1 صفر شود آن رأس را نیز از گراف حذف می‌کنیم. فرض کنید v یا u_1 از گراف حذف نشود. پس چون تمامی همسایه‌های این دو رأس درون مسیر هستند همچنان گراف همبند می‌ماند. پس می‌توان از فرض استقرا روی گراف باقی‌مانده استفاده کرد و در نتیجه سایر یال‌های گراف با $k - 1$ رنگ رنگ می‌شوند. پس حکم اثبات می‌شود.

اثبات مسئله: اگر به ازای هر شهر یک رأس متناظر با آن و به ازای هر جاده بین دو شهر بین رئوس متناظر آن یک یال بگذاریم اثبات حکم مسئله معادل با اثبات لم بالاست. پس حکم مسئله اثبات شد.