ریاضی ۲

- فصل ۶

ماتریس:

آرایشی مستطیلی از اعداد را ماتریس می‌نامند. ماتریس را می‌توان با معرفی اعضای آن که درایه نامیده می شوند، یا به وسیله جمله عمومی آن نمایش داد.

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ \vdots & & & \\ a_{m۱} & \cdots & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$$

تعداد سطرها   تعداد ستون‌ها   درایه   مرتبه یا رتبه ماتریس

$۱\le i\le m \quad ۱\le j\le n$

☜ مثال: اگر $A_{۲\times ۳}$ و $a_{ij}=۲i+j^۲$، A را معین کنید.

✍حل:

$$\begin{matrix} a_{۱۱}=۳ & a_{۱۲}=۶ & a_{۱۳}=۱۱ \\ a_{۲۱}=۵ & a_{۲۲}=۸ & a_{۲۳}=۱۳\end{matrix} \quad \Rightarrow \quad A=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ & ۱۱ \\ ۵ & ۸ & ۱۳\end{bmatrix}$$

برخی ماتریس‌های پر کاربرد:

۱) ماتریس مربعی: ماتریسی که در آن تعداد سطرها و ستون‌ها برابر است، در این حالت عناصر a_{ii} را قطر اصلی ماتریس می‌نامند.

۲) ماتریس ستونی: اگر ماتریسی فقط از یک ستون تشکیل شده باشد ، به آن ماتریس ، ماتریس ستونی گفته می شود .

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ \vdots \\ a_{n۱}\end{bmatrix}$$

۳) ماتریس سطری: اگر ماتریسی فقط از یک سطر تشکیل شده باشد ، به آن ماتریس، ماتریس سطری گفته می‌شود .

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n}\end{bmatrix}$$

٤) ماتریس همانی: ماتریس مربعی که قطر اصلی آن ۱ و بقیهٔ درایه های آن صفر باشد.

$$I_m=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & & \ddots & \\ ۰ & & & ۱\end{bmatrix}_{m\times m}$$

۵) ماتریس صفر: ماتریس $m\times n$ ای که تمام درایه‌های آن صفر باشد.

$$\bar{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}_{m\times n}$$

تساوی دو ماتریس:

دو ماتریس هم‌مرتبه مساوی‌اند هر گاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم مساوی باشد.

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$$

☜ مثال: اگر دو ماتریس $\begin{bmatrix} ۲x-۱ & x \\ ۲y+۱ & ۱-x\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۴y-۱ & ۲y \\ x+۱ & -y\end{bmatrix}$ برابر باشند، x و y را بیابید.

✍حل:

$۴y-۱=۲x-۱ \to x=۲y$

$۲y=x \to x=۲y$

$$\left.\begin{matrix} x+۱=۲y+۱ \to x=۲y \\ -y=۱-x \to x-y=۱\end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲y-y=۱ \to y=۱ \to x=۲$$

جمع ماتریس‌ها و ضرب در اعداد حقیقی:

اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، مجموع دو ماتریس، ماتریسی است هم مرتبه با آن دو و به صورت:

$$A+B=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[b_{ij}\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}$$

یعنی کافی است درایه ها را نظیر به نظیر جمع کنیم .

به ازای هر عدد حقیقی r ماتریس rA به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$r\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[ra_{ij}\right]_{m\times n}$$

ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها و ضرب در اعداد حقیقی:

به ازای ماتریس‌های هم‌مرتبه $A\,,\,B\,,\,C$ و عدد حقیقی r داریم:

۱) $A+(B+C)=(A+B)+C$ شرکت‌پذیری

۲) $A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$ عضو بی‌اثر

۳) $A+(-A)=\overline{O}$ وجود عضو قرینه

۴) $A+B=B+A$ جابجایی

۵) $(rs)A=r(sA)=s(rA)$

۶) $r(A+B)=rA+rB$

☜ مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ ۰ & ۳ & -۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۴\\ ۲ & -۵ & ۹\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس x را از معادله‌ی $۳A+\frac{x}{۲}=۲B$ به دست آورید.

✍حل:

$$۳\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ ۰ & ۳ & -۲\end{bmatrix}+\frac{x}{۲}=۲\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۴\\ ۲ & -۵ & ۹\end{bmatrix}\Rightarrow \frac{x}{۲}=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۸\\ ۴ & -۱۰ & ۱۸\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳ & ۶ & -۳\\ ۰ & ۹ & -۶\end{bmatrix}$$

$$\frac{۱}{۲}x=\begin{bmatrix}-۵ & -۶ & ۱۱\\ ۴ & -۱۹ & ۲۴\end{bmatrix}\Rightarrow x=\begin{bmatrix}-۱۰ & -۱۲ & ۲۲\\ ۸ & -۳۸ & ۴۸\end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس‌ها:

ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{bmatrix}a_{۱۱} & .. & .. & a_{۱n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{۱۱}\\ \vdots\\ b_{n۱}\end{bmatrix}=a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱}+\ldots+a_{۱n}b_{n۱}=\sum_{i=۱}^{n}a_{۱i}b_{i۱}$$

در حالت کلی ضرب یک ماتریس $m\times n$ در یک ماتریس $n\times p$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C=\left[c_{ij}\right]_{m\times p}=A_{m\times n}B_{n\times p}\Rightarrow c_{ij}=\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

منظور از c_{ij} درایه سطر i ام و ستون j ام AB است.

نکته: برای آن که ماتریس $A\times B$ قابل تعریف باشد لازم است تعداد ستون‌های A برابر تعداد سطرهای B باشد. در این صورت مؤلفه سطر iام و ستون jام ماتریس حاصلضرب، از ضرب سطر iام ماتریس A در ستون jام ماتریس B حاصل می‌گردد.

☜ مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 5 & 2\\ 7 & 1\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$ و $C=AB$ ، C_{23} کدامست؟

✍حل: برای یافتن سطر دوم و ستون سوم حاصل‌ضرب، کافی است سطر دوم **A** را در ستون سوم **B** ضرب کنیم.

$$C_{23}=\begin{bmatrix}5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}=20+2=22$$

☜ مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\times A\times\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ را به‌دست آورید؟

✍حل:

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c & -d\\ -a & -b\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-c & -d\\ -a & -b\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d & c\\ b & a\end{bmatrix}$$

☜ مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$، حاصل $(A\times B)-(B\times A)$ چقدر است؟

✍حل:

$$A\times B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\ A\times B-B\times A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

☜ مثال: اگر $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ حاصل $a+b-c-d$ کدامست؟

✍حل:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c & d\\ a & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d & c\\ b & a\end{bmatrix}\rightarrow d=1\quad c=2\quad b=3\quad a=4\ \rightarrow\ a+b-c-d=4$$

☜ مثال: اگر داشته باشیم: $\begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\\ 3 & b & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\ 2\\ a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$، مقدار $a+b$ کدام است؟

✍حل:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\\ 3 & b & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+a\\ 3+2b+a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\ \rightarrow\ a-3=1\ \rightarrow\ a=4\\ a+2b+3=1\ \xrightarrow{a=4}\ b=-3\end{array}\right\}\Rightarrow\ a+b=1$$

☜ مثال: با فرض آنکه $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ 2\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$، مقدار $x-y$ کدام است ؟

✍حل:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ 2\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y+4\\ y+2x+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\rightarrow -y+4=-1\ \rightarrow\ y=5\\ y+2x+2=1\ \xrightarrow{y=5}\ x=-3\end{array}\right\}\Rightarrow\ x-y=-8$$

☜ مثال: ریشه‌های معادله ماتریسی $\begin{bmatrix}1 & -x & 2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\\ x & -8x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\overline{O}$ کدام است؟

✍حل:

$$\begin{bmatrix}1 & -x & 2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\\ x & -8x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+x+2x^2 & -1-x-16x^2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1+x+2x^2 & -1-x-16x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=2+2x+4x^2-1-x-16x^2=0$$

$$\to\ -12x^2+x+1=0\ \to\ (-3x+1)(4x+1)=0\begin{cases}x=-\frac{1}{4}\\ x=\frac{1}{3}\end{cases}$$

خواص ضرب ماتریس‌ها:

اگر $A_{m\times n}$، $B_{n\times p}$ و $C_{p\times q}$ ماتریس باشد، آنگاه

۱) $A(BC)=(AB)C$ شرکت پذیری

۲) $A(B+C)=AB+AC \quad (A+B)C=AC+BC$ توزیع‌پذیری یا پخشی

۳) $A(rB)=(rA)B=r(AB)$

۴) $A_{m\times n}I_n=I_mA_{m\times n}=A$ عضو بی اثر ضرب ماتریسی

در فاکتورگیری عبارات ماتریسی هیچگاه اعداد را به تنهایی نمی‌نویسیم بلکه حاصلضرب آن عدد در ماتریس همانی با مرتبه مناسب را می‌نویسیم.

$A^2+2A\neq A(A+2)$

$A^2+2A=A(A+2I)$

تذکر: ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت حذف‌پذیری ندارد (حتی اگر $A\neq\overline{O}$ باشد) مگر آن که **A** وارون‌پذیر باشد، یعنی:

$AB=AC\ \not\Rightarrow B=C$

مثلاً:

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 3 & 4\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

تذکر: حاصلضرب دو ماتریس غیر صفر می‌تواند صفر شود .

مثلاً:

$$\begin{bmatrix}a & a\\ -a & -a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & b\\ -b & -b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\overline{O}_{2\times 2}$$

لذا اگر حاصلضرب دو ماتریس برابر صفر باشد لزومی ندارد یکی از آنها برابر صفر باشد .

ماتریس‌های تعویض‌پذیر یا جابه‌جا شونده:

ضرب ماتریسها در حالت کلی دارای خاصیت جابجایی نمی باشد . دو ماتریس A و B را تعویض‌پذیر (جابه‌جا شونده) گویند هر گاه **$AB=BA$**

در حالت کلی اتحادها در مورد ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشند مگر آن که ماتریس‌ها دارای این خاصیت باشند که ضرب آنها دارای خاصیت جابجایی باشد.

☜ مثال: اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a & b \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix}$ مفروض باشند، $a+b$ کدام است در صورتیکه B,A تعویض‌پذیر باشد؟

✍حل:

$$AB=BA \to \begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۲a-۱۵ & ۲b-۳۵ \\ ۵a+۶ & ۵b+۱۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲a+۵b & -۵a+۲b \\ ۶+۳۵ & -۱۵+۱۴ \end{bmatrix}$$

$$\to \left.\begin{matrix} ۵a+۶=۴۱ \to a=۷ \\ ۵b+۱۴=-۱ \to b=-۳ \end{matrix}\right\} \to a+b=۴$$

حال این دو عدد موجب برابری سطرهای اول نیز می‌شوند.

نکته: در حالت کلی ماتریس‌هایی به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ با هم خانواده‌های خودشان و ماتریس‌هایی به صورت $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ نیز با هم خانواده‌های خودشان تعویض‌پذیرند. هم چنین ماتریس همانی (I) در هر مرتبه با ماتریس‌های مربع هم مرتبه با خودش تعویض‌پذیر است.

توان‌های طبیعی یک ماتریس مربع:

اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد، توان‌های طبیعی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^{۱}=A$$

$$A^{۲}=A\times A$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A$$

$$\vdots$$

$$A^{m+۱}=A^{m}\times A$$

خواص:

۱) $A^mA^n=A^nA^m=A^{m+n}$

۲) $(A^m)^n=A^{mn}$

۳) $(\lambda A)^n=\lambda^nA^n \qquad \lambda\in R$

٤) $I^n=I$

اما چون در ضرب ماتریس‌ها، خاصیت جابه‌جایی لزوماً برقرار نمی‌باشد لذا تساوی $(AB)^n=A^nB^n$ لزوماً برقرار نیست.

☜ مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ عنصر واقع در سطر دوم و ستون سوم $A^{۳}$ کدامست؟

✍حل:

برای به دست آوردن سطر دوم و ستون سوم $A^{۳}$، ابتدا سطر دوم $A^{۲}$ را با ضرب سطر دوم A در کلیه‌ی ستون‌های A به دست می‌آوریم.

$$A^{۲} \text{ سطر دوم } =[۰ \quad ۱ \quad x]\begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=[۰ \quad ۱ \quad ۲x]$$

سطر ایجاد شده را در ستون سوم A ضرب می‌کنیم.

$$A^{۳} \text{ درایه سطر دوم و ستون سوم } =[۰ \quad ۱ \quad ۲x]\begin{bmatrix} y \\ x \\ ۱ \end{bmatrix}=۳x$$

☜ مثال: اگر $A^{۲}=۵A-۲I$ باشد، در این صورت $A^{۴}$ برحسب A کدام است؟

✍حل:

$$A^{۳}=A^{۲}.A=(۵A-۲I)A=۵A^{۲}-۲A=۵(۵A-۲I)-۲A=۲۵A-۱۰I-۲A=۲۳A-۱۰I$$

$$A^{۴}=A^{۳}A=(۲۳A-۱۰I)A=۲۳A^{۲}-۱۰A=۲۳(۵A-۲I)-۱۰A=۱۱۵A-۴۶I-۱۰A=۱۰۵A-۴۶I$$

☜ مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$، آنگاه ماتریس $A^{۷}$ کدام است؟

✍حل:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=-I$$

$$A^{۶}=(-I)^{۳}=-I^{۳}=-I \ \rightarrow\ A^{۷}=-A=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$$

☜ مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ و رابطه $A^{۵}\times\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=A^{۴}\times\begin{bmatrix}۱ & ۶\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}$ برقرار باشد، حاصل $b+c$ کدام است؟

✍حل:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I \ \rightarrow\ A^{۴}=(A^{۲})^{۲}=I^{۲}=I \ \Rightarrow\ A^{۵}=A^{۴}A=IA=A$$

$$\rightarrow I\times\begin{bmatrix}۱ & ۶\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c & -d\\ -a & -b\end{bmatrix}$$

$$-c=۱ \quad -d=۶ \quad -a=۲ \quad -b=۴ \ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}c=-۱\\ d=-۶\\ a=-۲\\ b=-۴\end{array}\right\} \rightarrow\ b+c=-۵$$

☜ مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۵\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$، آنگاه $A^{۲}-A$ کدام است؟

✍حل:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}-۲ & ۵\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۵\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۵\\ -۱ & ۴\end{bmatrix}$$

$$A^{۲}-A=\begin{bmatrix}-۱ & ۵\\ -۱ & ۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۲ & ۵\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

☜ مثال: هرگاه داشته باشیم $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}$ و $A^{۲}=xA+yI$، قدرمطلق تفاضل اعداد y,x کدام است؟

✍حل:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷ & ۱۰\\ ۱۵ & ۲۲\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y & ۲x\\ ۳x & ۴x+y\end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+y=۷\\ ۲x=۱۰\rightarrow x=۵\\ ۳x=۱۵\end{array}\right\} \Rightarrow\ y=۲$$

که این x و y باعث برقراری تساوی $۴x+y=۲۲$ نیز می‌شوند، پس این اعداد قابل قبول هستند.

$$|x-y|=۳$$

دترمینان:

دترمینان یک ماتریس ۲×۲ به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow \det(A)=|A|=ad-bc$$

☜ مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & ۲ \\ ۵ & -۲ \end{bmatrix}$ آنگاه دترمینان ماتریس $A\times B$ چقدر است؟

✍حل:

$$AB=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & ۲ \\ ۵ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۶ \\ -۱۰ & ۱۴ \end{bmatrix} \to |AB|=۷\times۱۴-(۶)(-۱۰)=۹۸+۶۰=۱۵۸$$

☜ مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} m & -۱ \\ -۲ & m+۱ \end{bmatrix}$ و $|A-I|=|A|+۲$ باشد، m کدامست ؟

✍حل:

$$A-I=\begin{bmatrix} m & -۱ \\ -۲ & m+۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m-۱ & -۱ \\ -۲ & m \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &|A-I|=m(m-۱)-۲=m^۲-m-۲ \\ &|A|+۲=m(m+۱)-۲+۲=m^۲+m \end{aligned}\right\} \Rightarrow m^۲-m-۲=m^۲+m \to ۲m=-۲ \to m=-۱$$

☜ مثال: اگر $|A|\neq ۰$ ، دترمینان ماتریس $A_{۲\times۲}$ باشد ، آنگاه دترمینان ماتریس $\frac{۲}{|A|}A$ کدام است؟

✍حل:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix} \to |A|=a_{۱۱}a_{۲۲}-a_{۱۲}a_{۲۱}$$

$$\frac{۲}{|A|}A=\begin{bmatrix} \frac{۲}{|A|}a_{۱۱} & \frac{۲}{|A|}a_{۱۲} \\ \frac{۲}{|A|}a_{۲۱} & \frac{۲}{|A|}a_{۲۲} \end{bmatrix} \to \left|\frac{۲}{|A|}A\right|=\frac{۴}{|A|^۲}(a_{۱۱}a_{۲۲}-a_{۱۲}a_{۲۱})=\frac{۴}{|A|^۲}\times|A|=\frac{۴}{|A|}$$

نکته: با توجه به همین مسأله می‌توان در حالت کلی برای ماتریس‌های ۲×۲ گفت:

$$|\lambda A_{۲\times۲}|=\lambda^۲|A_{۲\times۲}| \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

ماتریس وارون یا ماتریس معکوس:

اگر به‌ازای ماتریس مربعی A ، ماتریس منحصر به فرد B وجود داشته باشد به گونه‌ای که $AB=BA=I$ آنگاه B را معکوس ماتریس A نامیده و با $A^{-۱}$ نمایش می‌دهند. توجه کنید که $A^{-۱}$ عضو معکوس ضرب ماتریس می‌باشد، لذا $AA^{-۱}=A^{-۱}A=I$ اما $A^{-۱}\neq\frac{۱}{A}$.

قضیه: معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برابر است با:

$$A^{-۱}=\frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|A|}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نکته: شرط لازم و کافی برای معکوس‌پذیری ماتریس A آن است که $|A|\neq۰$

نکات و خواص:

۱) $(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$

۲) $(\lambda A)^{-۱}=\frac{۱}{\lambda}A^{-۱} \qquad \lambda\neq۰$

۳) $(A^{-۱})^{-۱}=A$

توجه: رابطه $(A+B)^{-۱}=A^{-۱}+B^{-۱}$ لزوماً برقرار نمی‌باشد.

☜ مثال: ماتریس $A=\begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ 2 & a+2 \end{bmatrix}$ با چه شرطی وارون‌پذیر است؟

✍حل:

شرط وارون‌پذیری ماتریس این است که: $|A|\neq 0$

$$\rightarrow |A|=(a+1)(a+2)-2=a^2+3a+2-2\neq 0 \rightarrow a(a+3)\neq 0 \begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq -3 \end{cases}$$

☜ مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $A^{-1}=\begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & b \end{bmatrix}$، حاصل ab کدام است؟

✍حل:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

پس داریم:

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow ab=-\frac{1}{2}$$

راه حل دوم:

چون $AA^{-1}=I$ می باشد ، لذا داریم:

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a & 2-4b \\ 0 & 2b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow a=-1$$

$$2b=1\rightarrow b=\frac{1}{2}$$

☜ مثال: اگر $A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس A کدامست؟

✍حل:

$$(A^{-1})^{-1}=A \Rightarrow (A^{-1})^{-1}=\frac{1}{12+21}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} \frac{6}{33} & -\frac{3}{33} \\ \frac{7}{33} & \frac{2}{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=(\frac{1}{33})^2(6\times 2+21)=\frac{1}{33}$$

نکته: جالب است بدانید در حالت کلی $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ است.

☜ مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$، ماتریس $A-A^{-1}$ کدام است؟

✍حل:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=8-7=1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A-A^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 14 & -2 \end{bmatrix}$$

☜ مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $|A|=-۱$، $A^{-۱}$ کدامست؟

حل:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

☜ مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس $(AB)^{-۱}$ کدام است؟

حل:

$$(AB)^{-۱}=\left(\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\right)^{-۱}=\left(\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}\right)^{-۱}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

نکته: می‌توانستیم از رابطه‌ی $(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$ نیز بهره بگیریم.

☜ مثال: اگر $۲A+I_۲=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان $۲A^{-۱}$ چقدر است؟

حل:

$$۲A+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow ۲A=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۶ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۲A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |۲A^{-۱}|=۲$$

☜ مثال: با فرض $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & a \end{bmatrix}$ مقدار a کدام باشد تا دترمینان ماتریس $A^{-۱}$ برابر ۲ باشد؟

حل:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{a+۲}\begin{bmatrix} a & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۱}{(a+۲)^۲}(a+۲)=\frac{۱}{a+۲}=۲ \Rightarrow a+۲=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

نکته: می‌توان از رابطه‌ی $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$ نیز بهره گرفت:

$$\frac{۱}{۲}=a+۲ \Rightarrow a=\frac{-۳}{۲}$$

☜ مثال: اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، ماتریس B کدام است هر گاه $۲A-B=۳I$؟

حل:

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A=\frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & -۱ \end{bmatrix}$$

$$۲A=\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow ۲A-B=۳I \Rightarrow B=۲A-۳I \Rightarrow B=\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴ & ۴ \\ ۱ & -۵ \end{bmatrix}$$

☜ مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد عنصر واقع بر سطر دوم و ستون اول در وارون ماتریس $۲A$ کدام عدد است؟

حل:

$$۲A=\begin{bmatrix} ۲ & ۶ \\ ۴ & ۱۰ \end{bmatrix} \Rightarrow (۲A)^{-۱}=\frac{۱}{-۴}\begin{bmatrix} ۱۰ & -۶ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲/۵ & ۱/۵ \\ ۱ & -۰/۵ \end{bmatrix}$$

نکته: می‌توان از رابطه‌ی $(\lambda A)^{-۱}=\frac{۱}{\lambda}A^{-۱}$ نیز بهره گرفت:

$$(۲A)^{-۱}=\frac{۱}{۲}A^{-۱}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲/۵ & ۱/۵ \\ ۱ & -۰/۵ \end{bmatrix}$$

☜ مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$، آنگاه جواب معادله ی $AX=B$ کدام است؟

✍حل:

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Rightarrow IX=X=A^{-1}B$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow X=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

☜ مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $(A^2)^{-1}$ کدام است؟

✍حل:

$$A^2=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -12\\ -4 & 7\end{bmatrix}$$

$$(A^2)^{-1}=\frac{1}{49-48}\begin{bmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{bmatrix} \rightarrow |(A^2)^{-1}|=49-48=1$$

☜ مثال: اگر A یک ماتریس 2×2 معکوس پذیر باشد و در رابطهٔ $A^2=3A+I$ صدق کند، دترمینان ماتریس $A-A^{-1}$ کدام است؟

✍حل:

$$A^2=3A+I \Rightarrow A(A-3I)=I$$

چون معکوس یک ماتریس در صورت وجود منحصر بفرد است، لذا ماتریس $A-3I$ معکوس ماتریس A است که با ضرب کردن A در آن حاصل برابر I شده است، لذا: $A^{-1}=(A-3I)$

پس:

$$A-A^{-1}=A-(A-3I)=3I \rightarrow |A-A^{-1}|=|3I|=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}=9$$

☜ مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ و $B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$، مقدار دترمینان $4BA^{-1}$ کدام است؟

✍ حل:

می‌دانیم اگر k یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه:

۱) A یک ماتریس 2×2 باشد؛ $|kA|=k^2|A|$

۲) A و B دو ماتریس مربع 2×2 باشند؛ $|AB|=|A||B|$

۳) A ماتریس معکوس‌پذیر باشد؛ $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

$$|4BA^{-1}|=16|B||A^{-1}|=16\frac{|B|}{|A|}$$

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=6 \quad , \quad B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow |B^{-1}|=4 \Rightarrow |B|=\frac{1}{4}$$

$$|4BA^{-1}|=16\times\frac{|B|}{|A|}=16\times\frac{\frac{1}{4}}{6}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$$

کاربرد های ماتریس:

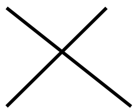
دستگاه دو معادله دو مجهول:

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ = b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ = b_۲ \end{cases}$$

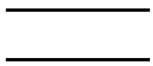
بیان ماتریسی دستگاه دو معادله دو مجهول، به صورت زیر است:

$$\begin{cases} a_۱x+b_۱y=c_۱ \\ a_۲x+b_۲y=c_۲ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_۱ & b_۱ \\ a_۲ & b_۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_۱ \\ c_۲ \end{bmatrix}$$

تعبیر هندسی دستگاه فوق معادله‌ی دو خط در صفحه است لذا:



۱) $\frac{a_۱}{a_۲} \neq \frac{b_۱}{b_۲}$ ⇐ **دو خط متقاطعند** ⇐ **دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.**



۲) $\frac{a_۱}{a_۲} = \frac{b_۱}{b_۲} \neq \frac{c_۱}{c_۲}$ ⇐ **دو خط موازی‌اند** ⇐ **دستگاه جواب ندارد.**

۳) $\frac{a_۱}{a_۲} = \frac{b_۱}{b_۲} = \frac{c_۱}{c_۲}$ ⇐ **دو خط منطبق‌اند** ⇐ **دستگاه بی‌شمار جواب دارد.**

به بیان دیگر: $\begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ \\ a_۲ & b_۲ \end{vmatrix} \neq ۰$ ⇐ **دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.**

$\begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ \\ a_۲ & b_۲ \end{vmatrix} = ۰$ ⇐ **دستگاه جواب ندارد (یا بی‌شمار جواب دارد)**

☜ **مثال: دستگاه** $\begin{cases} mx+۲y=۴ \\ (۱-m)x+۳y=۵ \end{cases}$ **با چه شرطی برای m فقط یک جواب دارد؟**

حل:

$$\frac{m}{۱-m} \neq \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳m \neq ۲-۲m \to ۵m \neq ۲ \to m \neq \frac{۲}{۵}$$

☜ **مثال: اگر دستگاه** $\begin{cases} (۲m-۱)x-y=۱ \\ -۵x+(n-۲)y=۲ \end{cases}$ **دارای بی‌شمار جواب باشد ، مقدار** $n-m$ **چقدر است؟**

حل:

$$\frac{۲m-۱}{-۵} = \frac{-۱}{n-۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \left.\begin{matrix} ۲m=-\frac{۳}{۲} \to m=-\frac{۳}{۴} \\ n-۲=-۲ \to n=۰ \end{matrix}\right\} \to n-m=\frac{۳}{۴}$$

☜ **مثال: به ازای چه مقدار از m، دستگاه معادلات زیر فاقد جواب (مبهم) می‌شود ؟**

$$\begin{cases} (m-۱)x-۳y=m+۲ \\ -x+(m+۱)y=m \end{cases}$$

حل:

$$\frac{m-۱}{-۱} = \frac{-۳}{m+۱} \neq \frac{m+۲}{m} \Rightarrow m^۲-۱=۳ \to m^۲=۴ \to m=\pm ۲$$

$$\begin{cases} m=۲ \to \frac{-۳}{۲+۱} \neq \frac{۲+۲}{۲} \to \text{قابل قبول است } m=۲ \\ m=-۲ \to \frac{-۳}{-۲+۱} \neq \frac{-۲+۲}{-۲} \to \text{قابل قبول است } m=-۲ \end{cases}$$

☜ مثال: به ازای چند مقدار برای m، دستگاه $\begin{cases}(m+1)x-2y=m^2-2\\(m-3)y+3x=-1\end{cases}$ فاقد جواب است؟

✍حل:

$$\frac{m+1}{3}=\frac{-2}{m-3}\neq\frac{m^2-2}{-1}$$

$$m^2-2m-3=-6$$

$$m^2-2m+3=0$$

این معادله جواب ندارد $(\Delta<0)$، یعنی دو خط همواره متقاطعند و این دستگاه هرگز فاقد جواب نیست.

روش‌های حل دستگاه دو معادله دو مجهولی (در صورت وجود جواب منحصر به فرد):

۱) روش حذفی:

برای حل دستگاه دو معادله دو مجهول می‌توان یکی از متغیرها را بین دو معادله حذف نمود که در این صورت جواب‌های دستگاه $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ به صورت زیر در می‌آید:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}}$$

این روش به دستور کرامر مشهور است.

۲) روش ماتریس وارون:

$$AX=B\quad\Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B\quad\Rightarrow\underbrace{(A^{-1}A)}_{I}X=A^{-1}B\quad\Rightarrow X=A^{-1}B$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix}b_2 & -b_1\\-a_2 & a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}}$$

☜ مثال: جواب‌های دستگاه $\begin{cases}2x+3y=5\\2x-y=1\end{cases}$ را بدست آورید.

حل:

روش اول: (روش حذفی) دو دستگاه را از هم کم می‌کنیم:

$$4y=4\ \rightarrow\ y=1\ \rightarrow\ 2x-1=1\ \rightarrow\ x=1$$

روش دوم: (روش کرامر)

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5 & 3\\1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-8}{-8}=1\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 5\\2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-8}{-8}=1$$

روش سوم:

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\2 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}=\frac{-1}{8}\begin{bmatrix}-1 & -3\\-2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-8\\-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

☜ مثال: در دستگاه $\begin{cases} x^2+xy=6 \\ y^2+xy=10 \end{cases}$ مقدار مثبت x کدام است؟

✍حل:

$$\begin{cases} x(x+y)=6 \\ y(y+x)=10 \end{cases} \to \frac{x}{y}=\frac{6}{10} \to y=\frac{5}{3}x \to x^2+x(\frac{5}{3}x)=6 \Rightarrow 3x^2+5x^2=18 \Rightarrow x^2=\frac{9}{4} \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

☜ مثال: مقدار x از دستگاه معادلات $\begin{cases} \dfrac{xy}{2x+y}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{xy}{y-x}=-\dfrac{5}{7} \end{cases}$ کدام است؟

✍حل:

$$\frac{\dfrac{xy}{2x+y}}{\dfrac{xy}{y-x}}=\frac{\dfrac{5}{3}}{-\dfrac{5}{7}}=-\frac{7}{3} \to \frac{y-x}{2x+y}=-\frac{7}{3} \Rightarrow 3y-3x=-14x-7y \Rightarrow 10y=-11x \to y=-\frac{11}{10}x$$

$$\frac{x(-\dfrac{11}{10}x)}{2x-\dfrac{11}{10}x}=\frac{5}{3} \Rightarrow \frac{-\dfrac{11}{10}x^2}{\dfrac{9}{10}x}=-\frac{11}{9}x=\frac{5}{3} \Rightarrow x=-\frac{9\times 5}{3\times 11}=-\frac{15}{11}$$