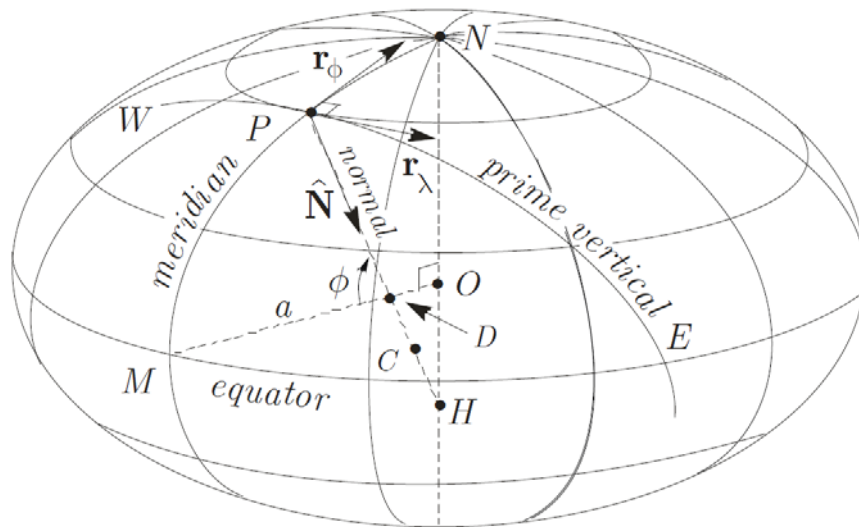




ژئودزی ۲ و محاسبات

(ویژه دوره کارشناسی مهندسی نقشه برداری)



گردآوری: یحیی جمور

زمستان ۱۳۹۱

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

پیشگفتار

زمین یک جسم ویسکو الاستیک است که حول محورش در فضا دوران می کند. محور دورانی زمین از مرکز جرم و قطب های زمین می گذرد ولی نسبت به صفحه حرکت مداری زمین به دور خورشید (صفحه اکلپتیک) مایل است. برآیند نیروهای جاذبه نیوتنی و گریز از مرکز باعث می شود که زمین در قطب های خود به نرمی دچار پخی شده و همین امر عامل بی هنجاری تدریجی سطوح هم پتانسیل میدان ثقل زمین شود. ژئوئید به عنوان یک سطح هم پتانسیل خاص بیانگر سطح متوسط دریاها و اقیانوس ها است. از آنجا که بیش از ۷۰ درصد سطح زمین را دریاها و اقیانوس ها می پوشانند، بنابراین ژئوئید تقریب خوبی از شکل واقعی زمین به حساب می آید. از آنجا که ژئوئید یک سطح نسبتا بی هنجار است، بیان ریاضی آن دشوار است و بنابراین نمی تواند به عنوان یک سطح مبنای مسطحاتی مفید برای انجام محاسبات تعیین موقعیت در نظر گرفته شود.

به همین دلیل در ژئودزی از بیضوی مبنا که یک سطح دورانی ناشی از چرخش یک بیضی حول محور کوچکش است، استفاده می شود. بیضوی های مختلف با ویژگی های هندسی خاص به روش های معینی تعیین می شوند که ممکن است ژئوئید جهانی یا ژئوئید محلی را تقریب نمایند. در صورتیکه بیضوی ها ژئوئید جهانی را تقریب کنند به آنها بیضوی های جهانی یا زمین مرکز گویند و در صورتیکه ژئوئید محلی را تقریب کنند به آنها بیضوی های محلی گویند. اندازه و شکل بیضوی ها به سادگی از نظر ریاضی مشخص می شوند و برای محاسبات تعیین موقعیت سطوح ساده ای هستند، گرچه به سادگی یک کره نیستند. دانش هندسه بیضوی زمین و مولد آن یعنی بیضی بخش مهمی از مطالعات و محاسبات ژئودزی هندسی را در بر می گیرد. جزوه حاضر به منظور تامین مطالب مورد نیاز دانشجویان دوره کارشناسی برای درس ژئودزی هندسی یا ژئودزی و محاسبات تهیه گردیده است. بر اساس تجربه آموزشی نگارنده در دانشگاه ها و مراکز مختلف آموزش عالی و محتوای جزوات و کتاب های موجود در زمینه ژئودزی هندسی و محاسبات ذیربط، مطالبی که در این کتاب در نظر گرفته شده اند به شرح ذیل در ۹ فصل دسته بندی شده اند.

- مقدمه و کلیات
- مروری بر دستگاه های مرجع مختصات و زمان و سطح مبنای ژئودتیک
- هندسه بیضی و روابط مربوط به آن

- رابطه مختصات کارتیزین و منحنی الخط (تبدیل دستگاه‌های مختصات)
- هندسه بیضوی دورانی و کمیت‌های مربوط به آن
- تصحیح و تبدیل مشاهدات بر روی بیضوی
- تعیین موقعیت و سرشکنی بر روی بیضوی
- سیستم‌های تصویر
- حدود ۱۰ برنامه و تمرین محاسباتی

نگارنده امیدوار است این جزوه مورد توجه کلیه خوانندگان محترم بویژه دانشجویان عزیز قرار بگیرد و با این وسیله توانسته باشد خدمتی هر چند کوچک در جهت توسعه و اعتلای مهندسی نقشه برداری به علاقمندان و دانش پژوهان و جامعه دانشگاهی رشته مهندسی نقشه برداری کرده باشد.

یحیی جمور

زمستان ۱۳۹۱

فصل ۱

مقدمه

مفاهیم و تعاریف

ژئودزی به عنوان یک علم قدیمی عبارتست از علم اندازه گیری و تعیین شکل و ابعاد زمین، میدان ثقل زمین و بررسی تغییرات زمانی آنها. بنا به این تعریف یکی از وظایف اصلی ژئودزین ها و مهندسين نقشه بردار تعیین مختصات نقاط واقع بر سطح زمین و تغییرات زمانی آنهاست.

امروزه ژئودزی کلاسیک جای خود را به ژئودزی ماهواره ای داده است که حل مسائل تعیین موقعیت را دگرگون ساخته است. با توجه به تعریف ژئودزی اهداف عمده آن عبارتند از:

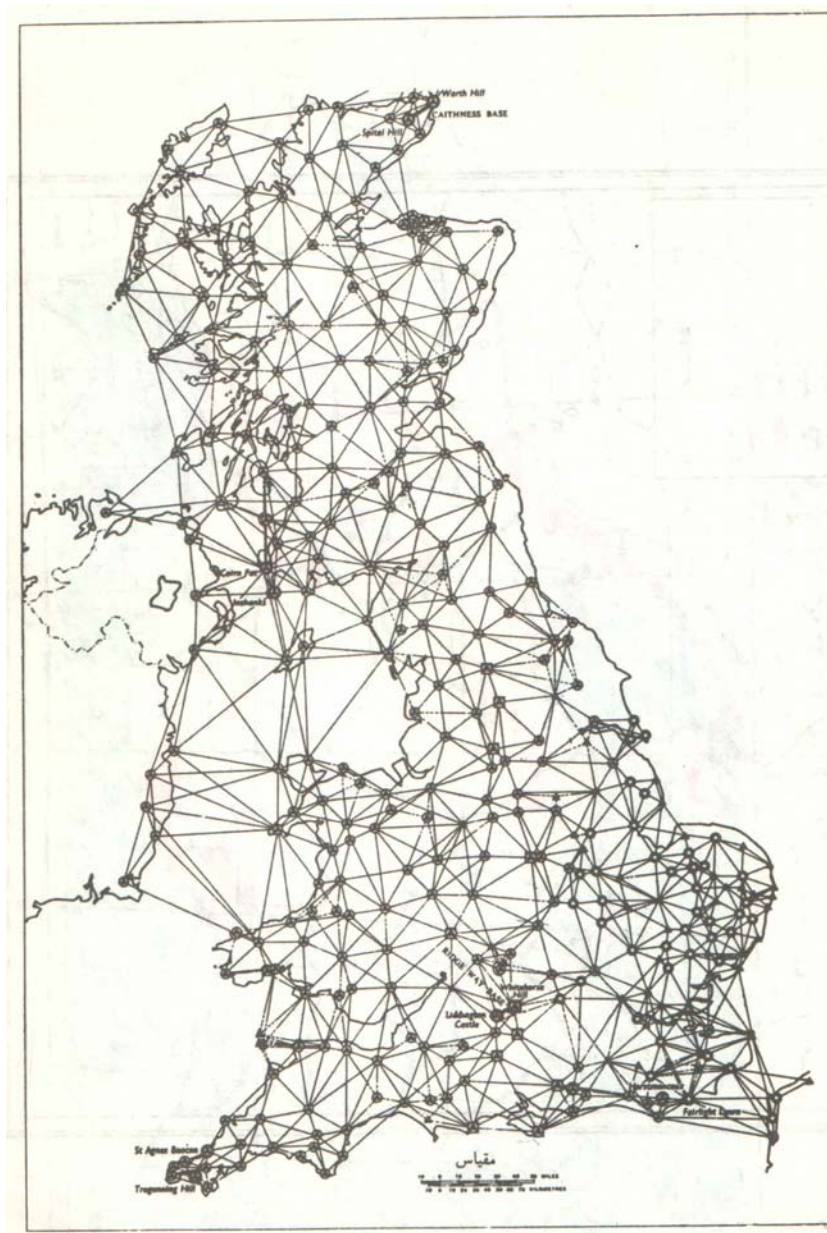
- تعیین دقیق مختصات سه بعدی در مقیاس های جهانی، منطقه ای و محلی،
- تعیین میدان ثقل زمین،
- اندازه گیری و مدلسازی پدیده های ژئودینامیکی نظیر حرکت قطبی، دوران زمین و تغییر شکل پوسته ای زمین.

لازم به توضیح است که در حال حاضر سامانه های تعیین موقعیت ماهواره ای بویژه سامانه های تعیین موقعیت جهانی GNSS نقش بسزایی در موارد فوق ایفا می کند.

تاریخچه توسعه ژئودزی

هر چند تاریخچه ژئودزی به قرن ها قبل از میلاد مسیح و عصر یونان باستان بر می گردد و از اراتستن به عنوان اولین نفری که توانست تقریب خوبی از شکل و ابعاد زمین بر اساس اندازه گیری اختلاف زاویه تابش خورشید در دو شهر آسوان و اسکندریه و فاصله بین این دو شهر ارائه نماید، یاد می شود، اما ژئودزی دقیق مرهون پیشرفت های ریاضی و فیزیک و ابزار محاسباتی در ۲-۳ قرن اخیر می باشد. به طور ویژه می توان گفت تحول اساسی در ژئودزی با پرتاب ماهواره های مصنوعی به فضا در چند دهه اخیر صورت گرفته است. آنچه در طی چند دهه اخیر با بهره گیری از ماهواره های تعیین موقعیت بدست آمده است، انقلابی بزرگ در ژئودزی و سایر رشته های علوم زمین بوده است. سرعت بکارگیری و توسعه سامانه های تعیین موقعیت

ماهواره ای پس از جنگ جهانی دوم با پیشرفت علوم و فنون بویژه در حوزه فیزیک و الکترونیک دچار یک انقلاب و دگرگونی شگرف شد. در نگاره ۱ شبکه ژئودزی کلاسیک کشور انگلیس را می بینید که علیرغم دشواری های مربوط به ایجاد چنین شبکه هایی، به طور نسبتاً یکنواخت و با تراکم مناسب ایجاد شده است.



نگاره ۱- شبکه ژئودزی کلاسیک کشور انگلیس

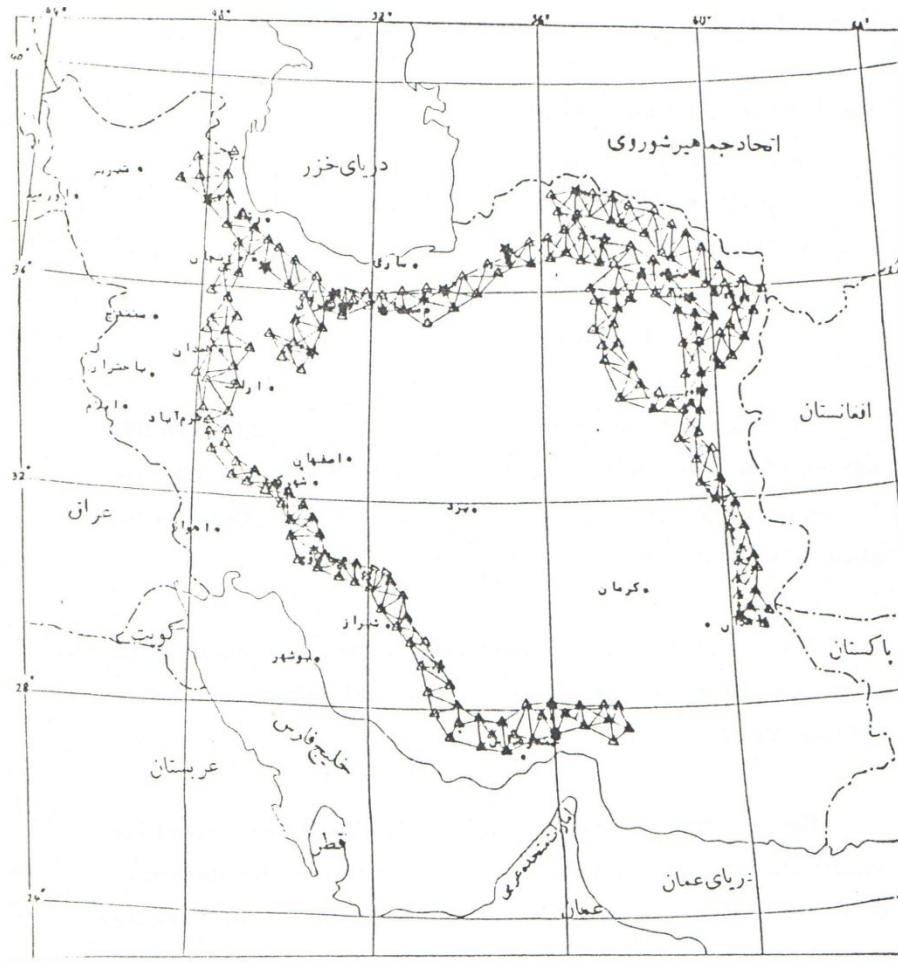
هر چند در دنیا سابقه ژئودزی و بکارگیری عملی آن در ایجاد شبکه های مبنایی مختصات به چند صد سال بر می گردد، لیکن در ایران برای اولین بار به منظور تهیه نقشه های پوششی ۱:۵۰۰۰۰ یک شبکه ژئودزی کلاسیک در فاصله سال های ۱۹۵۴ الی ۱۹۷۷ توسط بخش نقشه برداری ارتش امریکا طراحی و ایجاد شد

نگاره ۲). متاسفانه به جز یک شکل کلی از این شبکه و احتمالا برخی ایستگاه های به جای مانده بر روی زمین هیچ اطلاعات دیگری از این شبکه در دسترس نیست.



نگاره ۲- شبکه ژئودزی کلاسیک ایجاد شده توسط ارتش امریکا (۱۹۵۴-۱۹۷۷)

بعد از انقلاب اسلامی ایران، به دلیل نیاز به یک شبکه مبنایی مختصات برای تمام فعالیت های نقشه برداری و بویژه تهیه نقشه های پوششی ۱:۲۵۰۰۰، یک شبکه کلاسیک دیگر توسط سازمان نقشه برداری کشور در فاصله سال های ۱۹۸۴ الی ۱۹۹۰ متشکل از ۲۴۵ ایستگاه طراحی و اجرا گردید (نگاره ۳). در این شبکه مجموعاً ۳۸۹ طول، ۱۰۲۸ زاویه افقی و ۱۴ آزیموت نجومی اندازه گیری شده است. این شبکه یک بار توسط هامش و عمویی (۱۳۷۰) و یکبار دیگر در قالب پایان نامه کارشناسی ارشد توسط صدیقی (۱۳۷۵) با اتصال به شبکه ژئودزی ماهواره ای درجه یک کشور سرشکن و نتایج آن منتشر شده است. نتایج این سرشکنی بر روی بیضوی هایفورد ارائه شد که بعدها توسط افراد دیگر پارامترهای تبدیل بین این بیضوی و بیضوی WGS84 نیز محاسبه گردید.



نگاره ۳- شبکه ژئودزی کلاسیک ایجاد شده توسط سازمان نقشه برداری کشور (۱۹۸۴-۱۹۹۰)

بعد از ظهور سامانه تعیین موقعیت جهانی (GPS) ایران نیز از این سامانه در زمینه ژئودزی و ایجاد شبکه های مبنایی بهره گرفت. سابقه استفاده از سامانه های تعیین موقعیت ماهواره ای در ایران به سال ۱۳۶۶ بر می گردد که شبکه ای از نقاط کنترل در سطح کشور طراحی و برای اولین بار با بهره گیری از سامانه تعیین موقعیت جهانی GPS اندازه گیری شد. در این شبکه تعداد ۳۸ ایستگاه از ایستگاههای شبکه ماهواره ای با شبکه ژئودزی کلاسیک مشترک بودند. گیرنده های مورد استفاده در این اندازه گیری ها ۳ دستگاه گیرنده WM101 ساخت شرکت لایکا از اولین نسل گیرنده های GPS بودند. اندازه گیری ایستگاه های این شبکه از شهریور ۱۳۶۷ شروع شد و تا اواخر پاییز ۱۳۶۹ ادامه یافت. از مجموع ایستگاه های طراحی شده تعداد ۲۴۲ ایستگاه مورد اندازه گیری قرار گرفتند. نگاره ۴ شبکه ژئودزی ماهواره ای درجه یک کشور را که طی سالهای ۱۳۶۷ تا ۱۳۶۹ اندازه گیری شده است، نشان می دهد. لازم به ذکر است پس از آن شبکه های ژئودزی ماهواره ای متراکم تر موسوم به شبکه های درجه دو و سه متشکل از هزاران ایستگاه و سپس در سال ۱۳۸۵ یک شبکه دائم GPS با ۱۱۵ ایستگاه و اکنون یک شبکه چند منظوره (GPS، ثقل و ترازیبی) حدود ۷۰۰ ایستگاه نیز با جدیدترین تجهیزات و روش ها ایجاد شده اند.



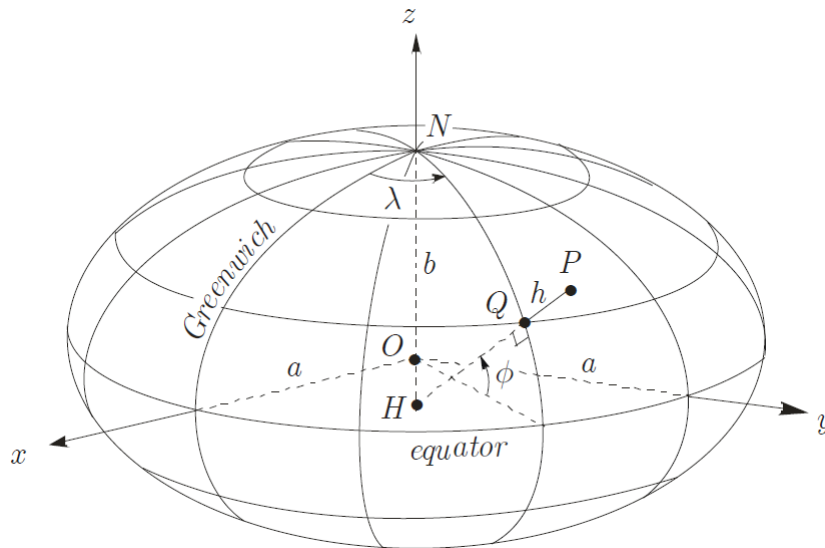
نگاره ۴- شبکه ژئودزی ماهواره ای درجه یک

ویژگی های بیضوی زمین

زمین یک جسم ویسکو الاستیک است که حول محورش در فضا دوران می کند. محور دورانی زمین از مرکز جرم و قطب های زمین می گذرد ولی نسبت به صفحه حرکت مداری زمین به دور خورشید (صفحه اکلیپتیک) مایل است. برآیند نیروهای جاذبه نیوتنی و گریز از مرکز باعث می شود که زمین در قطب های خود به نرمی دچار پخی شده و همین امر عامل بی هنجاری تدریجی سطوح هم پتانسیل میدان ثقل زمین شود. ژئوئید به عنوان یک سطح هم پتانسیل خاص بیانگر سطح متوسط دریاها و اقیانوس ها است. از آنجا که بیش از ۷۰ درصد سطح زمین را دریاها و اقیانوس ها می پوشانند، بنابراین ژئوئید تقریب خوبی از شکل واقعی زمین به حساب می آید. از آنجا که ژئوئید یک سطح نسبتا بی هنجار است، بیان ریاضی آن دشوار است و بنابراین نمی تواند به عنوان یک سطح مبنای مسطحاتی مفید برای انجام محاسبات تعیین موقعیت در نظر گرفته شود.

به همین دلیل در ژئودزی از بیضوی های مبنا که یک سطح دورانی ناشی از چرخش یک بیضی حول محور کوچکش است، استفاده می شود. بیضوی های مختلف با ویژگی های هندسی خاص به روش های معینی تعیین می شوند که ممکن است ژئوئید جهانی یا ژئوئید محلی را تقریب نمایند. در صورتیکه بیضوی ها ژئوئید جهانی را تقریب کنند به آنها بیضوی های جهانی یا زمین مرکز گویند و در صورتیکه ژئوئید محلی را

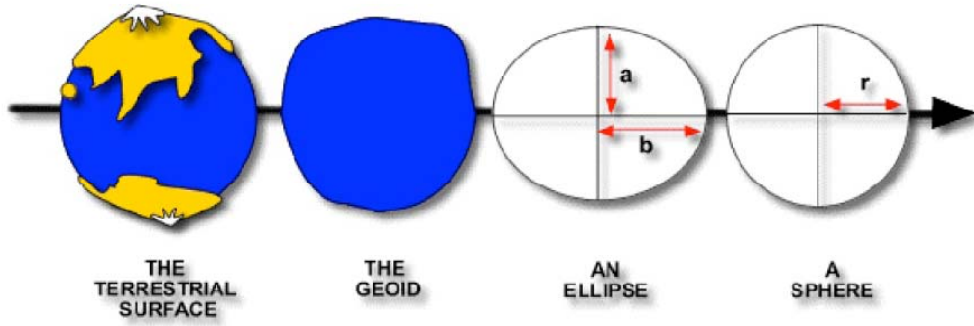
تقریب کنند به آنها بیضوی های محلی گویند. اندازه و شکل بیضوی ها به سادگی از نظر ریاضی مشخص می شوند و برای محاسبات تعیین موقعیت سطوح ساده ای هستند، گرچه به سادگی یک کره نیستند. دانش هندسه بیضوی زمین و مولد آن یعنی بیضی بخش مهمی از مطالعات و محاسبات ژئودزی هندسی را در بر می گیرد.



نگاره ۵- بیضوی مبنا

نگاره ۵ طرح کلی یک بیضوی مبنا را نشان می دهد که نصف النهارها (منحنی های با طول ژئودتیک ثابت) و مدارها (منحنی های با عرض ژئودتیک ثابت) واقع بر روی آن یک شبکه متعامد از منحنی های مرجع را تشکیل می دهند. در این نگاره مختصات ژئودتیک نقطه P بوسیله یک خط گذرنده از آن و عمود بر بیضوی مشخص شده است. این امتداد قائم که بیضوی را در نقطه Q قطع کرده دارای مختصات λ و ϕ است و فاصله قائم $h=PQ$ ارتفاع ژئودتیک نقطه P می باشد. بنابراین مختصات ژئودتیک هر نقطه دلخواه مانند P را با ϕ (عرض ژئودتیک)، λ (طول ژئودتیک) و h (ارتفاع ژئودتیک) نمایش می دهند. همچنین نقطه P با مختصات کارتزین x, y, z نیز قابل نمایش است. در مورد این دو نوع دستگاه مختصات و تبدیلات بین آنها بعداً مطالب بیشتری خواهیم دید. نکته مهم در تبیین بیضوی های مبنای زمین این است که غالباً فرض می شود محور دورانی زمین واقعی منطبق یا نزدیک به محور کوچک بیضوی است.

نصف النهارها منحنی هایی هستند که از تقاطع صفحه های گذرنده از محور کوچک بیضوی (در برگزیده قطب ها) و سطح بیضوی بدست می آیند و همگی بیانگر بیضی مولد بیضوی هستند. مدارها نیز از تقاطع صفحه های عمود بر محور کوچک بیضوی و سطح بیضوی بدست می آیند و همگی دایره هستند و دایره نیز نوع خاصی از بیضی می باشد. بنابراین به وضوح در می یابیم که شناخت بیضی و هندسه بیضوی در ژئودزی هندسی بسیار مهم است.



فصل ۲

مروری بر دستگاه‌های مختصات و زمان

از آنجا که یکی از اهداف اساسی در ژئودزی هندسی تعیین موقعیت نقاط واقع بر سطح یا بالای زمین نسبت به یک چارچوب مختصات می باشد، لذا انتخاب یک دستگاه مختصات مناسب اجتناب ناپذیر است. از طرف دیگر با توجه به حرکت دستگاه‌های مختصات در طول زمان، سنجش دقیق زمان و داشتن یک دستگاه مرجع زمان نیز ضرورت پیدا می کند. بر همین پایه در این فصل با برخی دستگاه‌های مختصات و زمان مورد استفاده در ژئودزی آشنا می شویم.

دستگاه‌های مرجع مختصات

اهمیت توجه بیشتر به تعریف دستگاه‌های مرجع، با افزایش دقت فناوری‌های ژئودزی فضائی، روز به روز زیادتر می شود. در ژئودزی همواره به دو دستگاه مرجع مختصات نیاز است: (۱) دستگاه مرجع سماوی یا اینرشیال قراردادی (CIS) که برای تعیین موقعیت اجرام سماوی ضروری است، و (۲) دستگاه مرجع زمینی قراردادی (CTS) که برای مشخص ساختن موقعیت ایستگاه‌های مشاهداتی لازم است. البته از آنجا که تفسیر برخی پدیده‌ها در یک دستگاه منحنی الخط مثل بیضوی راحت تر و قابل فهم تر است، لذا می توان گفت به یگ دستگاه مختصات دیگری موسوم به سطح مبنای ژئودتیک مانند بیضوی مرجع WGS-84 نیاز می باشد.

دستگاه مرجع زمینی قراردادی یک دستگاه دورانی چسبیده به سطح زمین و دستگاه مرجع سماوی قراردادی یک دستگاه ثابت و چسبیده به ستارگان است. چارچوب‌های قابل ذکر برای بیان این دو دستگاه، چارچوب‌های مرجع زمینی بین المللی ITRF و چارچوب‌های مرجع سماوی بین المللی ICRF می باشند. بدیهی است در تعیین موقعیت نقاط باید بتوانیم تبدیلات بین این دستگاه‌های مرجع مختلف را براحتی انجام دهیم. امروزه بمنظور تحقق بخشیدن به نیازهای دانشمندان به تعریف روشن دستگاه‌های مرجع مختصات و پاسخگویی به نیازهای ناشی از افزایش شگفت انگیز دقت فناوری‌های ژئودزی فضایی، تعریف و توسعه و تکامل دستگاه‌های مرجع مختصات برای زمین تغییر شکل پذیر، به یک علم مستقل تبدیل شده است و مراکز متعدد علمی ملی و بین المللی به این امر مبادرت می ورزند. از بین این مراکز، موسسه ی خدمات بین

المللی چرخش زمین (IERS) که از سال ۱۹۸۸ تاسیس شده است، به طور رسمی مسئول دایر کردن و حفظ و توسعه ی دستگاه های ITRF و ICRF می باشد. این در حالی است که به طور معمول مسئول برپایی، نگهداری و توسعه ی سطوح مبنای ژئودتیک یک موسسه ملی می باشد. موسسه ی خدمات بین المللی چرخش زمین به تنهایی از عهده این کار بر نمی آید و متکی به همکاری گروه های زیاد تحقیقاتی و مراکز ملی برای انجام وظایف و ماموریت هایش می باشد. موسسه ی خدمات بین المللی چرخش زمین دارای یک دفتر مرکزی می باشد که مسئول مدیریت عمومی IERS است و به وسیله یک هیات مدیره اداره می شود. پیمان نامه های مربوط به ITRF و ICRF توسط مک کارتی در سال ۱۹۶۶ منتشر گردیدند و به اجرا گذاشته شدند که یکی از مراجع اصلی این فصل نیز است.

تعیین موقعیت دقیق در دستگاه های مرجع مختصات ITRF و ICRF، مستلزم استفاده از روابط ریاضی پیچیده برای در نظر گرفتن پدیده هایی نظیر حرکت قطبی، حرکات تکتونیکی ورقه های سنگ کره، جزر و مد های زمین جامد و اقیانوسی، جابه جایی های ناشی از بارگذاری های مختلف روی پوسته زمین و همچنین حرکات رقص محوری پرسشن و نوتیشن، می باشد. اطلاعات و نرم افزارهای مربوط به این تصحیحات عموماً در اینترنت یافت می شوند ولی بهترین جستجوی قابل توصیه مراجعه به سایت IERS می باشد. سایت های مهم دیگر عبارتند از: موسسه ی خدمات بین المللی GNSS موسوم به IGS، رصدخانه ی دریایی ایالات متحده (USNO)، سازمان نقشه برداری ملی (NGS).

اکثر دانشمندان علوم زمین ترجیح می دهند که با مختصات کارترین ITRF کار کنند. با این حال، در موارد زیادی تفسیر نتایج برحسب مختصات ژئودتیک منتسب به یک بیضوی مرجع از اهمیت ویژه ای برخوردار است. بر همین اساس تعریف و ایجاد یک بیضوی مرجع مناسب (مرکز، توجیه، اندازه و شکل آن) به عنوان یک دستگاه مختصات و تبیین ارتباط آن با ITRF و دستگاه مرجع زمینی قراردادی (CTRS) ضروری و از وظایف مراکز ملی مرتبط است.

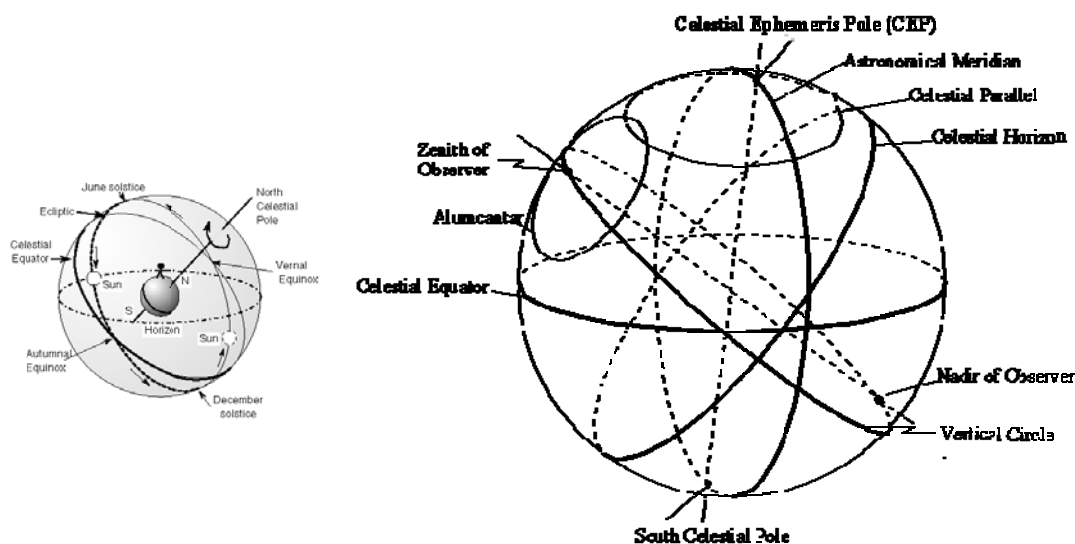
در اینجا لازم است توجه خوانندگان محترم را به تفاوت بین اصطلاحات "دستگاه مرجع مختصات" و "چارچوب مرجع مختصات" جلب نمود. بر خلاف اینکه اصطلاحات "دستگاه مرجع مختصات" و "چارچوب مرجع مختصات" غالباً به صورت معادل و هم ارز مورد استفاده قرار می گیرند، ولی اساساً "دستگاه مرجع" ماهیت تئوری و مفهومی شامل تعریف مبداء و توجیه محورهای مختصات دارد، در حالیکه بروز و تحقق عملی آن در قالب مجموعه ای از نشانه های فضایی یا زمینی مانند ستاره ها و ایستگاه های ژئودزی "چارچوب مرجع" نامیده می شود. نکته دیگر اینکه منظور از عبارات "دستگاه مرجع مختصات اینرشیال" یا "دستگاه مرجع مختصات فضا چسب" به عنوان زیر مجموعه ای از دستگاه های مرجع مختصات سماوی عموماً یکسان می باشد، زیرا معمولاً برای تعریف چنین دستگاه مرجع مختصاتی از اشیاء سماوی و فضایی نظیر سیارات، ستارگان و کوازرها استفاده می شود.

دستگاه های مختصات سماوی کره سماوی (Celestial Sphere)

ستارگان در فواصل بسیار دوری از زمین قرار دارند، فاصله نزدیک ترین ستاره خارج از منظومه شمسی تا زمین در حدود 10^8 برابر شعاع زمین است که این فاصله تقریباً ۴ سال نوری است و به عنوان مثال ستاره قطبی (Polaris) در حدود ۵۰ سال نوری با زمین فاصله دارد.

این فواصل نسبت به فواصل اجرام سماوی در منظومه شمسی بخصوص فاصله زمین تا خورشید که در حدود ۸ دقیقه نوری است بسیار طولانی تر می باشند، بنابراین می توان نتیجه گیری کرد که فواصل در نجوم قابل اندازه گیری نیستند، همچنین ابعاد خورشید، زمین و فاصله بین زمین و خورشید قابل اغماض هستند و ما مجاز هستیم مجموعه زمین و خورشید را بصورت یک نقطه در نظر بگیریم.

با توجه به موضوع فوق کره سماوی را اینچنین تعریف می کنیم: کره ای است به شعاع واحد که مرکز آن منطبق بر مرکز ثقل خورشید است و تمامی ستارگان روی سطح آن تصویر شده اند (نگاره ۱).



نگاره ۱ - کره سماوی

محور دورانی لحظه ای زمین، کره سماوی را در دو قطب شمال سماوی (North Celestial Pole) و جنوب سماوی (South Celestial Pole) قطع می کند. اگر صفحه استوای زمین را از هر طرف گسترش دهیم، سطح کره سماوی را در یک دایره قطع خواهد کرد که به آن استوای سماوی می گویند. امتداد شاقولی هر نقطه دلخواه در سطح زمین کره سماوی را در دو نقطه قطع می کند، نقطه ای که در بالا قرار می گیرد، زنیت (سرسو) و نقطه ای در پایین قرار می گیرد نادیر (پاسو) نامیده می شود. صفحه ای که از دو قطب سماوی عبور می کند و بر صفحه استوای سماوی عمود است، صفحه نصف النهار سماوی نامیده می شود.

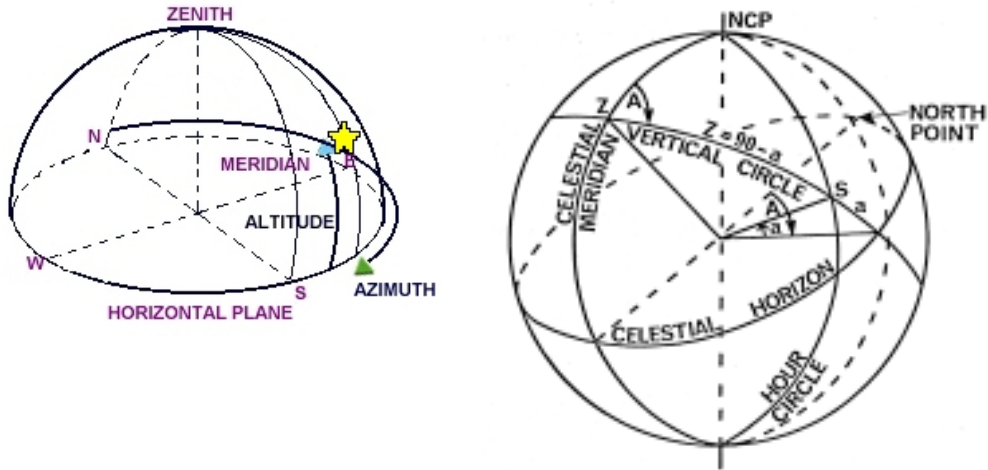
صفحه نصف‌النهار سماوی گذرنده از زینت را صفحه نصف‌النهار سماوی محلی می‌نامند. صفحه نصف‌النهار سماوی گذرنده از هر ستاره، دایره ساعتی آن ستاره نامیده می‌شود. صفحه عمود بر قائم محل و گذرنده از مرکز کره سماوی، صفحه افق سماوی نام دارد. صفحه عمود بر افق سماوی و گذرنده از زینت محلی، صفحه قائم نامیده می‌شود. صفحه قائمی که عمود بر صفحه نصف‌النهار سماوی ناظر باشد و جهت آن شرقی-غربی باشد، صفحه قائم اولیه نامیده می‌شود. امتدادهای برخورد نصف‌النهار سماوی با افق سماوی، شمال و جنوب نجومی نامیده می‌شوند.

مسیر ظاهری حرکت خورشید به دور زمین، صفحه اکلپتیک (Ecliptic) است. این صفحه، استوای سماوی را در دو نقطه که طول روز و شب در آنها برابر است به نام نقاط اعتدال بهاری و پاییزی قطع می‌کند. نقطه‌ای که خورشید در مسیر ظاهری اش حین عبور از نیمکره جنوبی به نیمکره شمالی، استوای سماوی را قطع کند، اعتدال بهاری (Vernal) و نقطه مقابل آن اعتدال پاییزی (Autumnal) نام دارد. زاویه بین صفحات اکلپتیک با استوای سماوی تقریباً ثابت و در حدود $23^{\circ} 27'$ می‌باشد. نقاطی که به فاصله 90° درجه از هر یک از نقاط اعتدال واقع‌اند به نقاط انقلاب تابستانی (Summersolstice) و زمستانی (Wintersolstice) موسوم هستند.

حال پس از آشنایی با واژه‌ها و مفاهیم مربوط به کره سماوی، به منظور تعیین مختصات ستارگان روی کره سماوی دستگاه‌های مختصات سماوی به شرح زیر تعریف می‌شوند.

دستگاه مختصات افقی (Horizontal)

- مبدا: مرکز ثقل خورشید
- محور Z: در راستای شاقولی و در جهت زینت
- محور X: فصل مشترک صفحه افق سماوی و نصف‌النهار سماوی ناظر در جهت شمال نجومی
- محور Y: به گونه‌ای است که دستگاه دست‌چپی می‌شود.



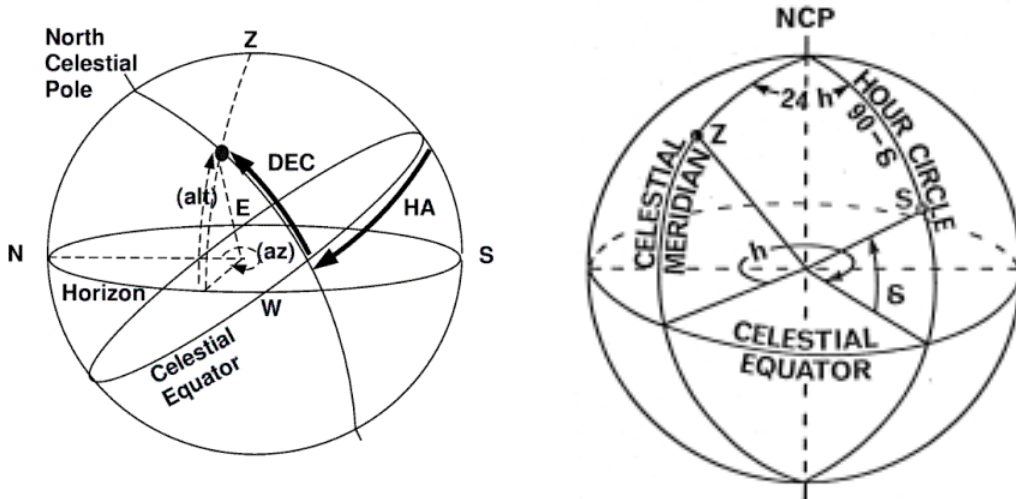
نگاره ۲ - دستگاه مختصات افقی

در این دستگاه مختصات، مختصات یک ستاره را با دو پارامتر ارتفاع ستاره (a) و آزیموت (A) نشان می‌دهند (نگاره ۲). ارتفاع ستاره زاویه بین صفحه افق سماوی و امتداد ستاره که در صفحه قائم گذرنده از ستاره از ۰ تا ۹۰ درجه می‌باشد. آزیموت ستاره زاویه بین نصف‌النهار سماوی ناظر و صفحه قائم ستاره در صفحه افق سماوی بین ۰ تا ۳۶۰ درجه می‌باشد. بردار پایه در این دستگاه به صورت زیر است :

$$\vec{e}_H = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_H = \begin{bmatrix} \cos a \cos A \\ \cos a \sin A \\ \sin a \end{bmatrix}$$

دستگاه زاویه ساعتی (Hour Angle)

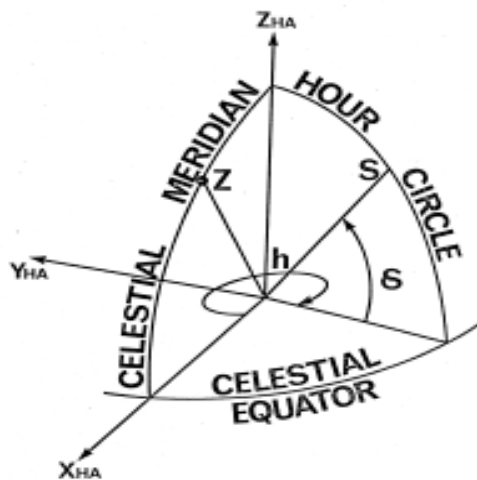
- مبدا : مرکز ثقل خورشید
- محور Z : در راستای محور دوران لحظه‌ای زمین و گذرنده از قطب شمال سماوی
- محور X : فصل مشترک صفحه استوای سماوی و نصف‌النهار سماوی ناظر
- محور Y : به گونه ای است که دستگاه دست‌چپی می‌شود.



نگاره ۳ - سیستم زاویه ساعتی

مختصات یک ستاره در این دستگاه با دو پارامتر میل ستاره (Declination) و زاویه ساعتی ستاره (Hour Angle) مشخص می‌شود (نگاره ۴). میل یک ستاره (δ) زاویه بین صفحه استوای سماوی و امتداد ستاره است که در صفحه دایره ساعتی بین 0° تا 90° درجه اندازه‌گیری می‌شود. زاویه ساعتی ستاره (h) زاویه بین نصف‌النهار سماوی ناظر و دایره ساعتی ستاره که در صفحه استوای سماوی بین 0° تا 360° درجه یا 0° تا 24° ساعت اندازه‌گیری می‌شود. بردار پایه در این دستگاه به صورت زیر است :

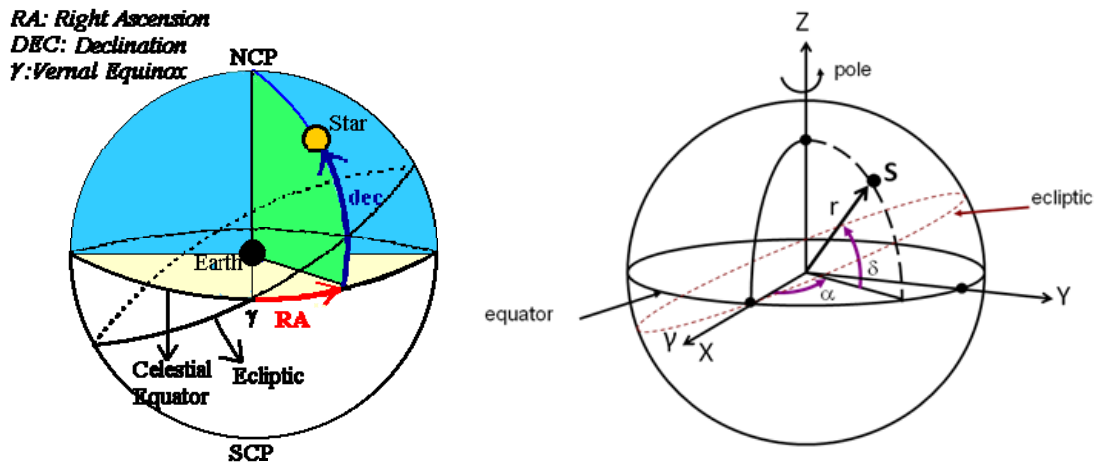
$$\bar{e}_{HA} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{HA} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cosh \\ \cos \delta \sinh \\ \sin \delta \end{bmatrix}$$



نگاره ۴ - میل ستاره و زاویه ساعتی ستاره

دستگاه مختصات بعدی (Right Ascension یا Apparent Place)

- مبدا: مرکز ثقل خورشید
- محور Z: در راستای محور دوران لحظه‌ای زمین و گذرنده از قطب شمال سماوی
- محور X: فصل مشترک صفحه استوای سماوی و دایره ساعتی گذرنده از نقطه γ
- محور Y: طوری است که دستگاه دست راستی باشد.

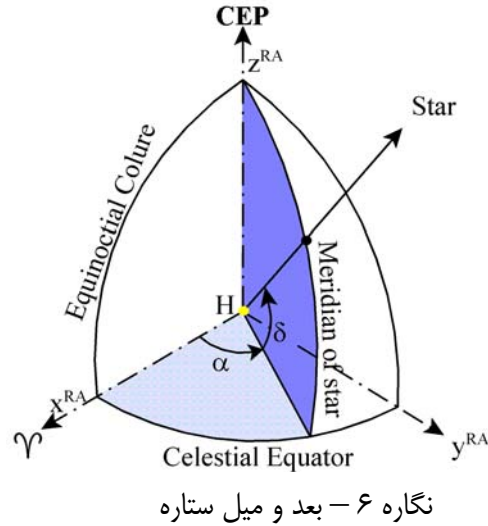


نگاره ۵ - سیستم مختصات بعدی

مختصات هر ستاره در این دستگاه با دو پارامتر بعد (α) و میل (δ) ستاره نشان داده می‌شود. بعد ستاره (Right Ascension) زاویه بین دایره ساعتی نقطه γ و دایره ساعتی ستاره بین ۰ تا ۲۴ ساعت اندازه‌گیری می‌شود (نگاره ۶). اگر اثر هر دو حرکت پرسشن و نوتیشن را بر روی نقطه γ در نظر بگیریم نقطه γ حقیقی است و به آن دستگاه بعدی حقیقی گفته می‌شود. اگر نقطه γ را فقط تحت تأثیر پرسشن در نظر بگیریم به آن γ ای متوسط می‌گوییم و به این دستگاه، دستگاه بعدی متوسط گفته می‌شود.

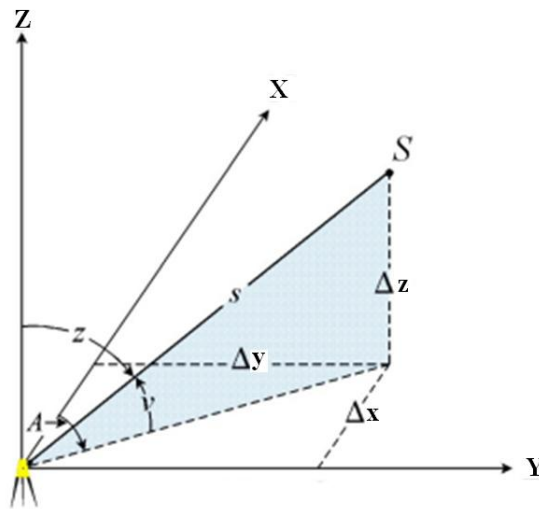
بردار پایه در این سیستم به صورت زیر است :

$$\bar{e}_{RA} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{RA} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{bmatrix}$$



دستگاه مختصات نجومی محلی (Local astronomical)

- مبدأ: روی سطح زمین (نقطه مشاهداتی)
- محور Z: در راستای شاقولی و در جهت زینیت
- محور X: فصل مشترک صفحه افق سماوی و نصف‌النهار سماوی ناظر در جهت شمال نجومی
- محور Y: به گونه ای است که دستگاه دست چپی می شود.



نگاره ۹ - دستگاه مختصات نجومی محلی

مختصات هر ستاره در این دستگاه با دو پارامتر زاویه قائم (ν) یا زاویه ارتفاعی (Z) و آزیموت نجومی (A) ستاره نشان داده می‌شود. زاویه قائم (ν) همان ارتفاع ستاره زاویه بین صفحه افق سماوی و امتداد ستاره که در صفحه قائم گذرنده از ستاره از 0° تا 90° درجه می باشد. آزیموت ستاره نیز زاویه بین نصف‌النهار سماوی ناظر و صفحه قائم ستاره در صفحه افق سماوی بین 0° تا 360° درجه می باشد.

بردار پایه در این دستگاه به صورت زیر است :

$$\vec{e}_{LA} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{LA} = \begin{bmatrix} \cos v \cos A \\ \cos v \sin A \\ \sin v \end{bmatrix}$$

دستگاه های مختصات زمینی

جهت تعیین مختصات نقاط در سطح زمین از این دسته از دستگاه های مختصات استفاده می شود. این دسته از دستگاه های مختصات نسبت به زمین ثابت هستند، یعنی در حرکات روزانه و سالیانه زمین شرکت ندارند. این دستگاه ها به دو دسته کلی ژئوسنتریک و توپوسنتریک تقسیم می شوند. دسته اول دستگاه هایی هستند که مرکز آنها بر مرکز ثقل زمین منطبق است و دسته دوم مرکز آنها روی سطح زمین است. در زیر مشخصات کلی این دستگاه ها را بیان می کنیم.

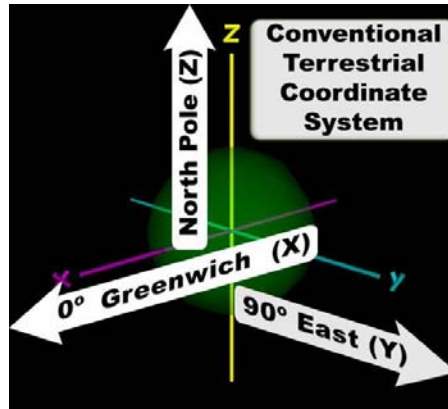
دستگاه مختصات زمینی ژئوسنتریک لحظه ای (IT)

- مبدأ: مرکز ثقل زمین
 - محور Z: در راستای محور دورانی لحظه ای زمین و گذرنده از قطب لحظه ای
 - محور X: فصل مشترک صفحه استوایی لحظه ای و صفحه نصف النهار گرینویچ لحظه ای زمین
 - محور Y: طوری انتخاب می شود که دستگاه دست راستی باشد.
- بردار پایه در این دستگاه به صورت زیر خواهد شد.

$$\vec{e}_{IT} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{IT} = \begin{bmatrix} \cos \Phi^{IT} \cos \Lambda^{IT} \\ \cos \Phi^{IT} \sin \Lambda^{IT} \\ \sin \Phi^{IT} \end{bmatrix}$$

دستگاه مختصات زمینی ژئوسنتریک قراردادی (CT)

- مبدأ: مرکز ثقل زمین
- محور Z: در راستای محور دورانی متوسط زمین و گذرنده از نقطه CIO
- محور X: فصل مشترک صفحه استوای متوسط و صفحه نصف النهار گرینویچ متوسط زمین
- محور Y: طوری انتخاب می شود که دستگاه دست راستی باشد.



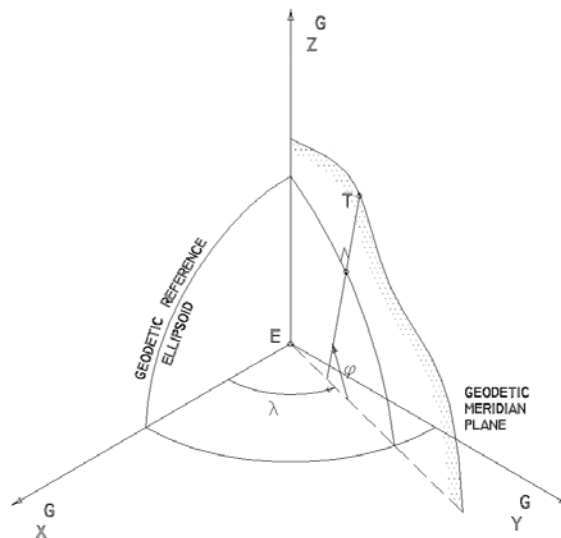
نگاره ۷- دستگاه مختصات زمینی ژئوسنتریک قراردادی

بردار پایه در این دستگاه به صورت زیر خواهد شد.

$$\vec{e}_{CT} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{CT} = \begin{bmatrix} \cos \Phi^{CT} \cos \Lambda^{CT} \\ \cos \Phi^{CT} \sin \Lambda^{CT} \\ \sin \Phi^{CT} \end{bmatrix}$$

دستگاه مختصات ژئودتیکی (G)

- مبدأ: مرکز بیضوی
- محور Z: منطبق بر محور کوچک بیضوی و گذرنده از قطب شمال ژئودتیکی
- محور X: فصل مشترک صفحه استوای ژئودتیکی و صفحه نصف‌النهار ژئودتیکی گرینویچ
- محور Y: طوری انتخاب می‌شود که دستگاه دست راستی باشد.



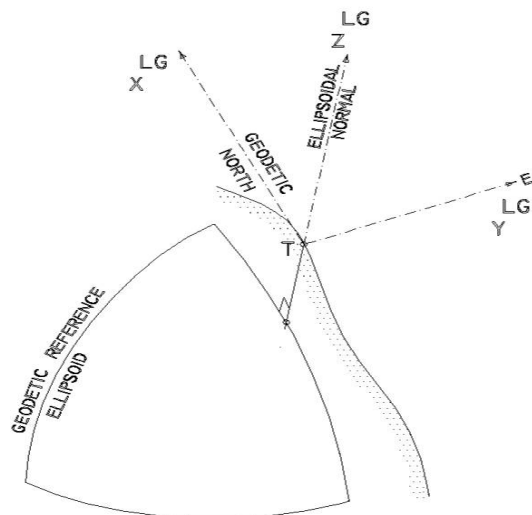
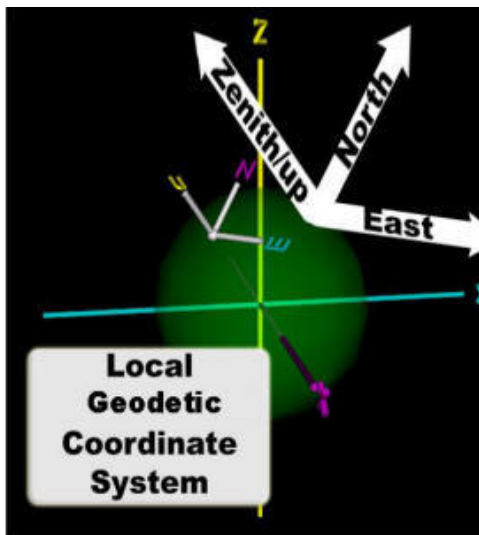
نگاره ۸- دستگاه مختصات ژئودتیکی

بردار پایه در این دستگاه به صورت زیر است:

$$\vec{e}_G = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$$

دستگاه مختصات زمینی ژئودتیکی محلی (LG)

- مبدأ: روی سطح زمین (نقطه مشاهداتی)
- محور Z: در راستای بردار شتاب ثقل نرمال (عمود بر سطح بیضوی) و در خلاف جهت آن
- محور X: فصل مشترک مماس بر سطح بیضوی و صفحه نصف‌النهار ژئودتیکی گذرنده از نقطه مشاهداتی گذرنده به سوی شمال ژئودتیکی
- محور Y: طوری انتخاب می‌شود که دستگاه دست‌چپی باشد.



نگاره ۹ - دستگاه مختصات ژئودتیکی محلی

بردار پایه در این دستگاه به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{e}_{LG} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{LG} = \begin{bmatrix} \cos v' \cos \alpha \\ \cos v' \sin \alpha \\ \sin v' \end{bmatrix}$$

که در آن α آزیموت ژئودتیکی و v' زاویه قائم ژئودتیکی می‌باشند.

تبدیل دستگاه های مختصات

- دوران حول محور X

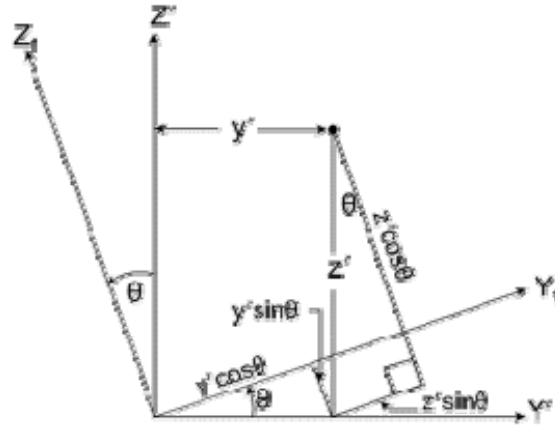
$$x_1 = x'$$

$$y_1 = y' \cos \theta + z' \sin \theta$$

$$z_1 = -y' \sin \theta + z' \cos \theta$$

$$X_1 = R_1 X'$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$



- دوران حول محور Y

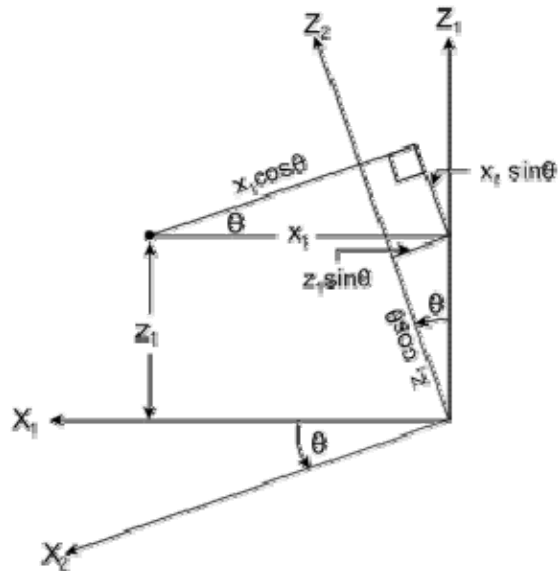
$$x_2 = x_1 \cos \theta - z_1 \sin \theta$$

$$y_2 = y_1$$

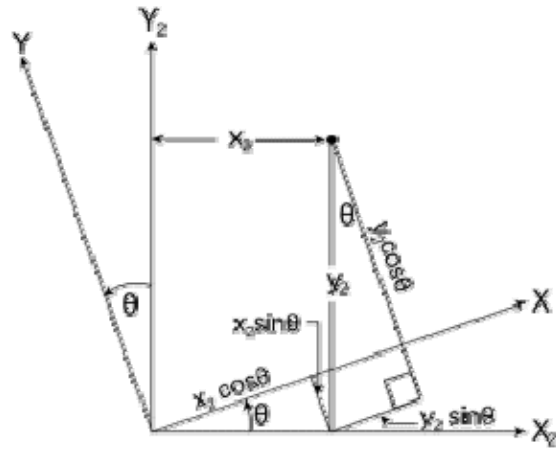
$$z_2 = x_1 \sin \theta + z_1 \cos \theta$$

$$X_2 = R_2 X_1$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$



• دوران حول محور Z



$$x = x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta$$

$$y = -x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta$$

$$z = z_2$$

$$X = R_3 X_2$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad R_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• دوران کلی حول سه محور

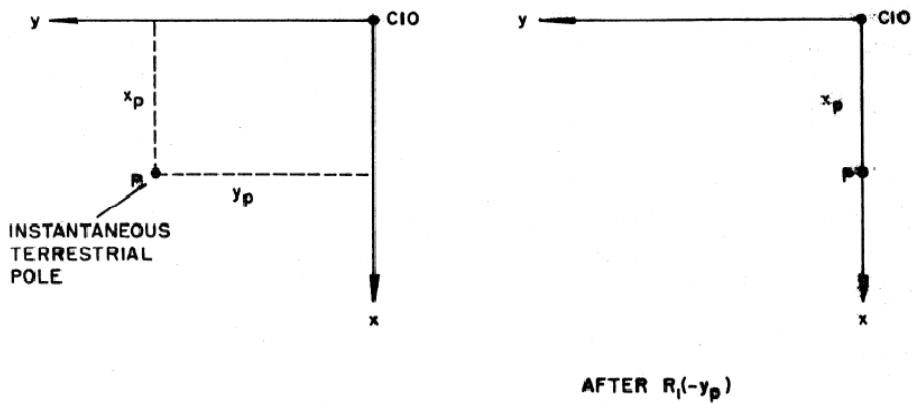
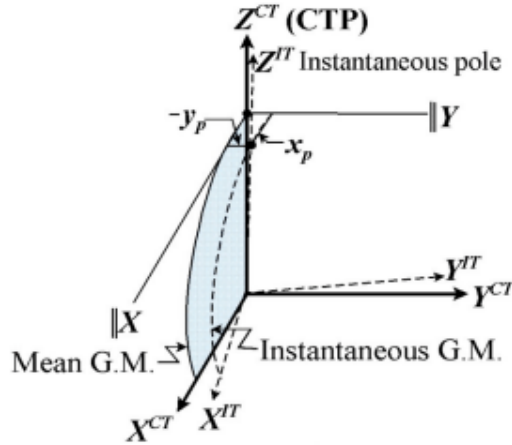
$$X = R_3 R_2 R_1 X' = RX'$$

$$R =$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- $r_{11} = \cos(\theta_2) \cos(\theta_3)$
- $r_{12} = \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_3)$
- $r_{13} = -\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_3)$
- $r_{21} = -\cos(\theta_2) \sin(\theta_3)$
- $r_{22} = -\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) + \cos(\theta_1) \cos(\theta_3)$
- $r_{23} = \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) + \sin(\theta_1) \cos(\theta_3)$
- $r_{31} \sin(\theta_2)$
- $r_{32} = -\sin(\theta_1) \cos(\theta_2)$
- $r_{33} = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2)$

رابطه بین دستگاه های مختصات CT و IT



نگاره ۱۰- رابطه بین دستگاه های مختصات CT و IT

مطابق شکل و بر اساس روابط ماتریس های دوران می توان نوشت:

$$e^{\rightarrow CT} = R_2(-x_p)R_1(-y_p) e^{\rightarrow IT}$$

(x_p, y_p) مختصات قطب لحظه ای هستند.

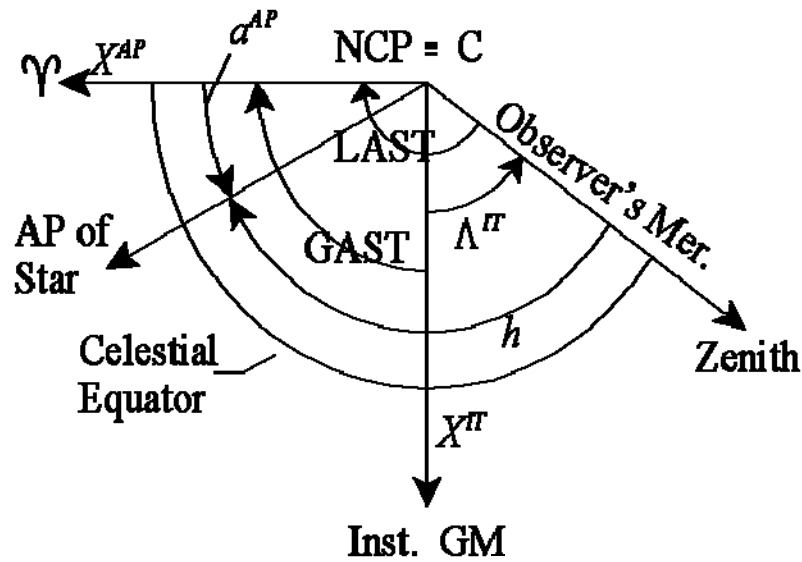
$$R_1(-y_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-y_p) & \sin(-y_p) \\ 0 & -\sin(-y_p) & \cos(-y_p) \end{bmatrix}$$

$$R_2(-x_p) = \begin{bmatrix} \cos(-x_p) & 0 & -\sin(-x_p) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-x_p) & 0 & \cos(-x_p) \end{bmatrix}$$

رابطه معکوس بین این دو دستگاه نیز با توجه به $R^{-1}(\theta) = R^T(\theta) = R(-\theta)$ به صورت زیر خواهد شد.

$$\overset{\rightarrow}{IT} e = R_1(y_p) R_2(x_p) \overset{\rightarrow}{CT} e$$

رابطه بین دستگاه های مختصات IT و RA (یا AP)



نگاره ۱۱- ارتباط بین دستگاه های IT و AP

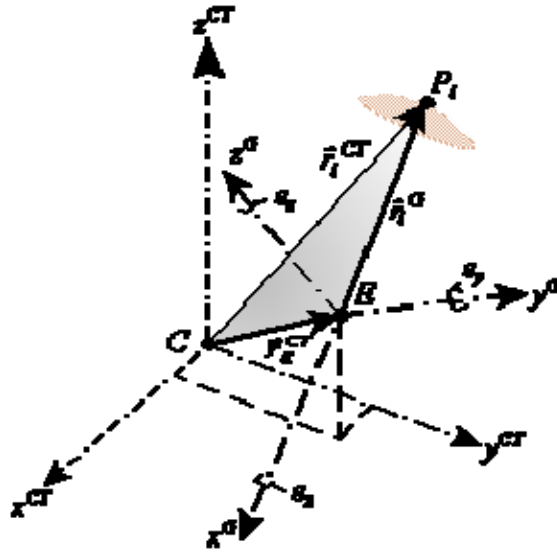
$$\overset{\rightarrow}{IT} e = R_3(GAST) \overset{\rightarrow}{AP} e$$

GAST زمان نجومی حقیقی گرینویچ است.

رابطه معکوس بین این دو دستگاه به صورت زیر خواهد شد:

$$\overset{\rightarrow}{AP} e = R_3(-GAST) \overset{\rightarrow}{IT} e$$

رابطه بین دستگاه های ژئودتیکی (G) و زمینی متوسط (CT)



نگاره ۱۲- ارتباط بین دستگاه های G و CT

برای این ارتباط باید مختصات مرکز بیضوی نسبت به مرکز ثقل زمین و دوران های محورهای بیضوی نسبت به محورهای دستگاه زمینی مشخص باشند.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{CT} = R(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^G + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}^{CT}$$

$$\vec{r}^{CT} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{CT} = R_1(\varepsilon_x)R_2(\varepsilon_y)R_3(\varepsilon_z) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^G + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}^{CT}$$

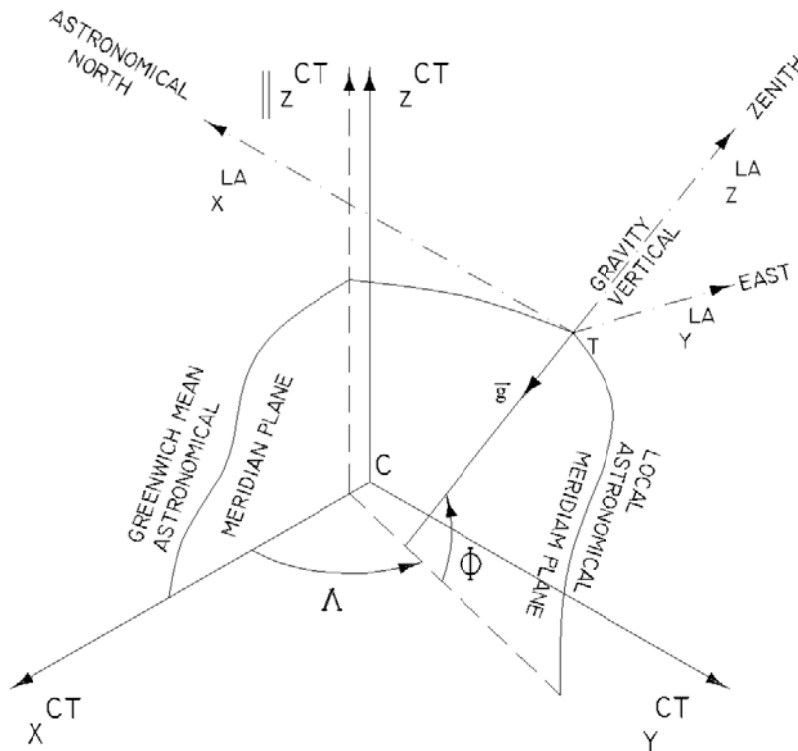
اگر $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$:

$$\vec{r}^{CT} = \vec{r}^G + \vec{T}$$

اگر $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ و ε_z خیلی کوچک باشند:

$$\vec{r}^{CT} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^G + \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}^{CT}$$

رابطه بین دستگاه های زمینی متوسط (CT) و نجومی محلی (LA)



نگاره ۱۳- ارتباط بین دستگاه های CT , LA

برای این ارتباط باید مختصات زمینی متوسط (Φ, Λ) در نقطه مشاهداتی مشخص باشند. همچنین از ماتریس انعکاسی جهت تبدیل دستگاه دست چپی به دست راستی استفاده شود.

$$\vec{e}^{\rightarrow CT} = R_3(\pi - \Lambda)R_2\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right)p_2 \vec{e}^{\rightarrow LA}$$

رابطه معکوس بین این دو دستگاه عبارتست از:

$$\vec{e}^{\rightarrow LA} = P_2R_2\left(\Phi - \frac{\pi}{2}\right)R_3(\Lambda - \pi) \vec{e}^{\rightarrow CT}$$

دستگاه های مرجع زمان

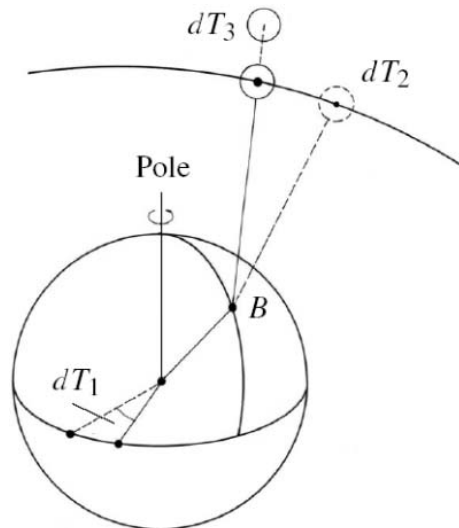
نیاز به سنجش زمان و تعریف یک دستگاه مرجع جهت سنجش زمان یکی از مسائل مورد بحث در ادوار مختلف تاریخ و یکی از نیازهای بشر بوده است. اخترشناسان، ژئودزین ها و ناوبران نیازمند زمانی می باشند که با زاویه دوران زمین در فضا یعنی حرکت روزانه زمین مرتبط باشد. بنابراین با توجه به امکانات موجود در هر دوره تاریخی و با در نظر گرفتن نیازهای گروه های مختلف، مقیاس های زمانی مختلفی ارائه گردیده اند. تعریف این مقیاس های زمانی بر اساس پدیده های مختلف طبیعی صورت پذیرفته است. دوران روزانه زمین حول محور دورانش، گردش سالیانه زمین در مدار آن حول خورشید، دوران زمین نسبت به ستارگان و تعداد مشخص تناوب های یک اتم خاص مانند سزیم را می توان به عنوان مثال هایی برای این پدیده های طبیعی نام برد. بدین ترتیب، هر دستگاه مرجع زمان دارای مشخصاتی منحصر به فرد می باشد که با استفاده از آنها تعریف و مورد استفاده قرار می گیرد. از جمله این مشخصات می توان به لحظه آغاز (اپک مرجع)، نحوه تعریف تقسیمات زمان (شامل ثانیه، روز، سال و ...) و میزان یکنواختی آن اشاره نمود.

هدف اصلی دستگاه های مرجع زمان، تعیین لحظه دقیق یک رویداد است. در مکانیک سماوی و ژئودزی زمان از اهمیت ویژه ای برخوردار است، زیرا مختصات اجرام سماوی و ستاره ها بستگی به ثبت دقیق زمان دارد. برای داشتن یک دستگاه مرجع زمان به صورت عملی، نیاز به یک بازه زمانی قابل تکرار و دقیق است که بر پایه برخی پدیده های فیزیکی قابل اندازه گیری، استوار باشد. همچنین یک مقطع زمانی مرجع لازم است تا بازه های زمانی نسبت به آن محاسبه شوند.

در حال حاضر زمان های نجومی و خورشیدی و زمان اتمی بسیار رایج و مورد استفاده در ژئودزی می باشند. این زمان ها به ترتیب به دلیل ارتباط مشاهدات زمینی به یک چارچوب فضا-چسب مورد نیاز می باشند. زمان نجومی و زمان خورشیدی بر پایه دوران زمین تعریف شده اند و ارتباط آن ها بوسیله روابط ریاضی مشخص می باشد، در حالیکه زمان اتمی مستقل از دوران زمین می باشد.

مفهوم دقت در دستگاه های مرجع زمان

به منظور دستیابی به دقت های مورد نظر، می بایست ارتباط بین دستگاه های مختلف زمانی با بالاترین دقت مشخص باشد. برای مثال دقت زمانی متناظر با خطای ۱ سانتی متر در موقعیت، با در نظر گرفتن یک نقطه در استوا و دوران زمین $dT_1 = 2 \times 10^{-5} s$ ، یک ماهواره نزدیک به سطح زمین در مدار خود $dT_2 = 1 \times 10^{-6} s$ و یک فاصله بدست آمده از مدت زمان طی شده توسط یک سیگنال از ماهواره تا ایستگاه زمینی $dT_3 = 1 \times 10^{-10} s$ است (نگاره ۱۴). بنابراین با توجه به دقت های زمانی ارائه شده در می یابیم که دستگاه های مرجع زمان مربوط به هر یک باید از دقتی بالاتر برخوردار باشند.



نگاره ۱۴- اثر خطاهای زمان سنجی در ژئودزی

زمان های مبتنی بر دوران زمین

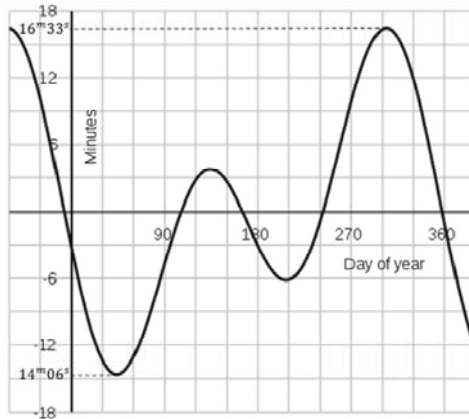
• زمان خورشیدی

زمان ظاهری خورشیدی، فاصله میان گذرهای متوالی خورشید است که از یک طول جغرافیایی مشخص، مشاهده می‌شود. به عبارت دیگر یک روز خورشیدی فاصله زمانی میان دو گذر متوالی خورشید از نصف‌النهار محل است که از گردش زمین به دور محور دورانی خود به دست می‌آید. لازم به ذکر است که به صورت قراردادی ۱۲ ساعت به لحظه گذر خورشید نصف النهار محلی یا گرینویچ اضافه می‌شود تا شروع یک شبانه روز در نیمه شب قرار گیرد.

• زمان جهانی (UT)

به دلیل حرکت زمین در یک مدار بیضی شکل به دور خورشید و عمود نبودن محور دورانی بر صفحه اقلیتیک و نیز وجود تغییرات دائمی و غیر منظم در سرعت دورانی زمین، شاهد تغییر طول روزها در طی سال هستیم. این بی‌نظمی‌های موجود در حرکت ظاهری خورشید سبب ایجاد مشکل در محاسبات می‌شود. به همین دلیل به جای خورشید واقعی، خورشید متوسط به عنوان نقطه‌ای خیالی بر روی استوای سماوی با سرعت یکنواخت روزانه در مدت زمان یک دوران کامل خورشید واقعی بر روی اقلیتیک در نظر گرفته می‌شود و روز خورشیدی متوسط را تولید می‌کند. در واقع یک روز خورشیدی متوسط، میانگین همه روزهای خورشیدی واقعی در طول یک سال است. از اینرو زمان جهانی (UT) بر مبنای خورشید ظاهری متوسط که دارای حرکت یکنواخت می‌باشد تعریف شده است.

اختلاف بین زمان ظاهری و زمان متوسط خورشیدی در طول یک سال در نگاره ۱۵ آمده است. همانطور که ملاحظه می‌شود حداکثر اختلاف ۱۶ دقیقه و ۳۳ ثانیه در اوایل نوامبر و حداقل آن ۱۴ دقیقه و ۶ ثانیه در اوایل فوریه است. این تغییرات تقریباً به طور مشابه در سال‌های مختلف تکرار می‌گردد.

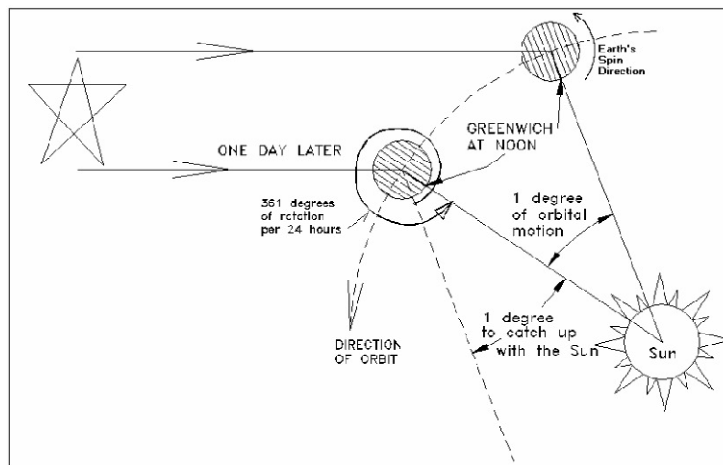


نگاره ۱۵- اختلاف بین زمان ظاهری و زمان متوسط خورشیدی

سه نسخه از زمان جهانی با اندکی تفاوت بنام های UT_0 ، UT_1 و UT_2 ارائه شده اند که اختلاف میان آن‌ها ناچیز بوده و تنها در کارهای دقیق مورد توجه قرار می‌گیرد. زمان UT_0 به عنوان زمان جهانی خام بر اساس مشاهدات نجومی در ایستگاه‌های زمینی معینی بدون هیچ نوع تصحیحی بدست می‌آید. اگر تصحیح مربوط به حرکت قطبی به زمان (طول جغرافیایی) UT_0 اعمال گردد، در این صورت زمان UT_1 حاصل می‌شود که دیگر مستقل از موقعیت ایستگاه است. چنانچه تصحیحات مربوط به تغییرات فصلی سرعت دورانی زمین نیز به زمان UT_1 اعمال شود، زمان UT_2 بدست می‌آید که مطلق در نظر گرفته می‌شود.

• زمان نجومی

حرکت دورانی زمین به دور خود نسبت به ستاره‌ها، مبنای تعریف زمان نجومی است. یک روز نجومی فاصله زمانی میان دو گذر متوالی یک ستاره از نصف‌النهار محل است. به دلیل حرکت سالیانه زمین به دور خورشید طول روز خورشیدی و روز نجومی یکسان نمی‌باشد و در واقع حدود یک روز در سال با هم اختلاف دارند (نگاره ۱۶). در واقع یک روز نجومی معادل ۲۳ ساعت ۵۶ دقیقه و ۴ ثانیه یا ۲۳.۹۳۴۴۷ ساعت در مقیاس روز متوسط خورشیدی است. به بیانی دیگر یک سال خورشیدی در برگیرنده ۳۶۶.۲۴۲ روز نجومی است.

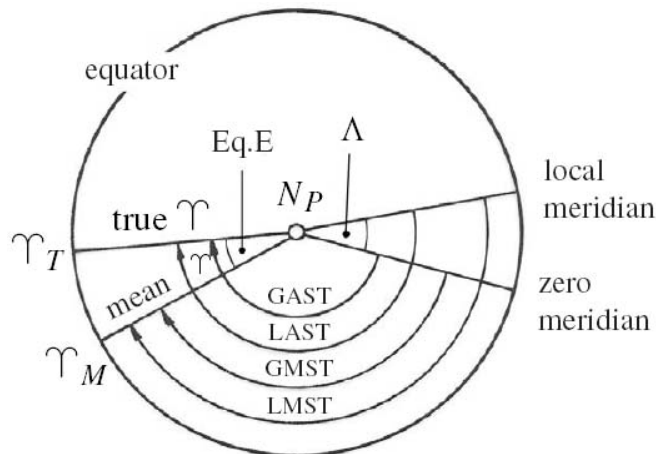


نگاره ۱۶- اختلاف بین زمان خورشیدی و زمان نجومی

اگر زاویه ساعتی نقطه اعتدال بهاری نسبت به نصف‌النهار نجومی گرینویچ اندازه گیری شود، زمان نجومی ظاهری گرینویچ (GAST) یا زمان نجومی متوسط گرینویچ (GMST) بدست می‌آید که تفاوت آنها در اختلاف بین نقطه اعتدال بهاری حقیقی و نقطه اعتدال بهاری متوسط می باشد (نگاره ۱۷). به همین ترتیب اگر زاویه ساعتی نقطه اعتدال بهاری نسبت به نصف‌النهار نجومی محلی اندازه گیری شود، زمان نجومی ظاهری محلی (LAST) یا زمان نجومی متوسط محلی (LMST) بدست می‌آید که مجدداً تفاوت آنها در اختلاف بین نقطه اعتدال بهاری حقیقی و نقطه اعتدال بهاری متوسط می باشد. روابط بین این زمان ها به صورت زیر قابل بیان می باشد. در صورتیکه اثر حرکت نوتیشن از روی نقطه اعتدال بهاری حقیقی حذف شود، نقطه اعتدال بهاری متوسط به دست می‌آید که تنها تحت تاثیر حرکت پرسیشن قرار می‌گیرد.

$$GMST - GAST = \Delta \psi \cos \varepsilon$$

$$LMST - GMST = LAST - GAST = \Lambda$$



نگاره ۱۷- تعریف و ارتباط بین انواع زمان های نجومی

زمان های اتمی

• زمان اتمی بین المللی (TAI)

همان طور که از نام آن مشخص است، در این دستگاه مرجع زمان از ساعت‌های اتمی استفاده می‌شود. زمان اتمی که مقیاس زمانی پایه را برای سرویس‌های نگهداری زمان (time-keeping) تعیین می‌نماید، زمان اتمی بین المللی (TAI) می‌باشد که در سال ۱۹۶۴ ارائه گردید. زمان اتمی بین المللی بر پایه شمارش سیکل‌های یک جریان الکتریکی با فرکانس بالا استوار است که از رزنانس انتقال اتمی سزیم ۱۳۳ حاصل می‌شود. شایان ذکر است که اثرات نسبیت مانند موقعیت ساعت نسبت به ژئوئید، بر نرخ این سیکل‌ها اثرگذار است. واحد زمان اتمی در سطح آب‌های آزاد، ثانیه SI است. یک ثانیه SI برابر است با ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ دوره

تناوب انتقال الکترون میان دو سطح تراز فوق ظریف از حالت پایه اتم سزیم ۱۳۳، در دمای صفر درجه کلون.

• **زمان جهانی هماهنگ (UTC)**

رایج‌ترین زمان مورد استفاده، زمان جهانی هماهنگ (UTC) است که از زمان اتمی مشتق شده است. زمان UTC با فاصله ± 0.9 ثانیه، از زمان UT1 تبعیت می‌کند ($\Delta UT1 = UT1 - UTC$). با توجه به تغییرات نامنظم UT1 بر اثر نامنظمی‌های موجود در دوران زمین، می‌بایست ثانیه‌های جهشی به صورت دوره‌ای به زمان UTC اضافه شود تا اختلاف معین میان دو مقیاس زمانی حفظ شود. ثانیه‌های جهشی در آخر ژوئن یا دسامبر اضافه می‌شوند.

• **زمان GPS (GPS time)**

سامانه‌های تعیین موقعیت ماهواره‌ای هر یک دستگاه مرجع زمان مخصوصی برای خود ایجاد و نگهداری می‌کنند. بر همین اساس سامانه GPS نیز از دستگاه مرجع زمان مختص خود موسوم به زمان GPS برخوردار است. این دستگاه مرجع زمان بر پایه زمان اتمی تعریف شده است و ارتباط مشخصی با زمان جهانی هماهنگ (UTC) دارد. به عنوان مثال اختلاف بین این دو در ۵ ژانویه ۱۹۸۰ صفر و در سال ۲۰۰۳ تقریباً ۱۳ ثانیه گزارش شده است. این اختلافات به طور دائم توسط مراکز ذیربط محاسبه و در سایت‌های مرتبط به خود نظیر USNO و BIPM برای عموم انتشار می‌یابند.

تبدیلات بین زمان‌های مرجع

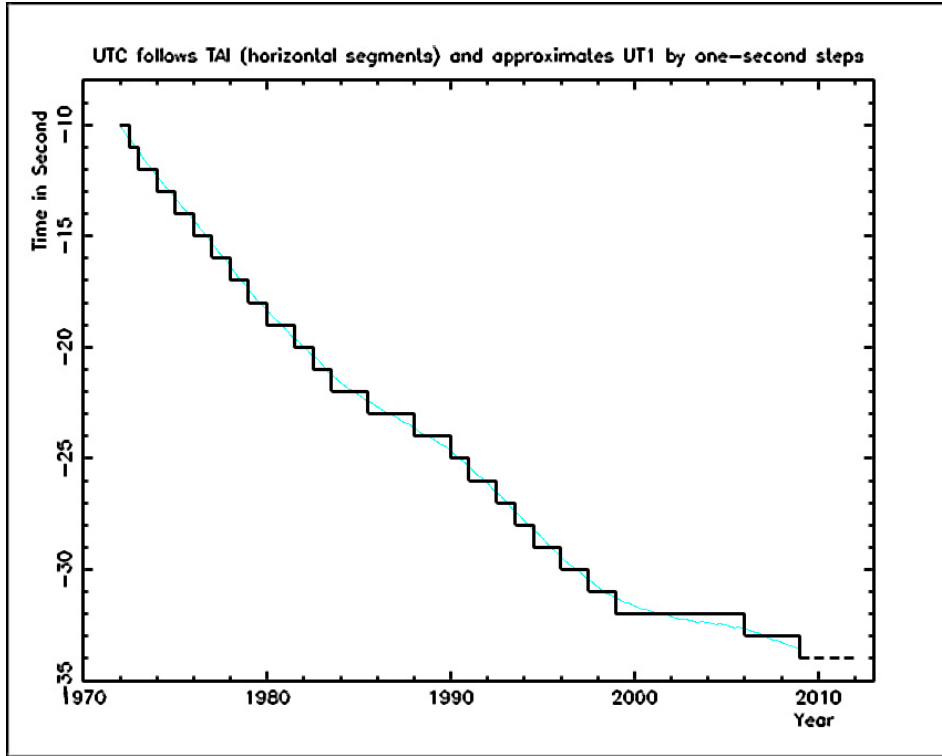
ارتباط بین زمان‌های مختلف به صورت زیر داده شده است (نگاره‌های ۱۸ و ۱۹):

$$UT1 = UTC + dUT1$$

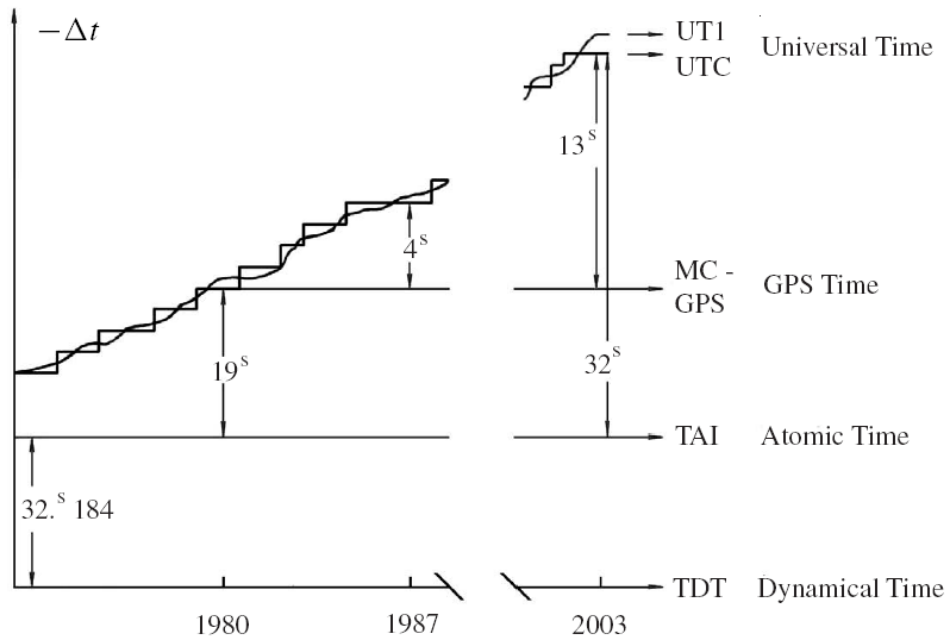
$$TAI = GPST + 19.000s$$

$$TAI = UTC + 1.000s \times n$$

که در آن $dUT1$ بیانگر تفاوت بین زمان UTC و زمان UT1 با قید کمتر از ۰.۹ ثانیه و n عدد صحیح مربوط به جهش‌های یک ثانیه‌ای است که هنگام بروز تفاوت بیش از ۰.۹ ثانیه اعمال می‌شود. مقادیر $dUT1$ و n به صورت رسمی توسط IERS محاسبه و منتشر می‌شوند. برای مثال مقدار n برای اول ژانویه سال ۲۰۰۹ توسط IERS ۳۴ ثانیه محاسبه و اعلام شده است. یادآوری می‌شود در عمل برای تبدیل بین دستگاه‌های مختصات سماوی بعدی و زمینی لحظه‌ای از زمان UT1 که متناظر با زمان نجومی ظاهری گرینویچ (GAST) است، استفاده می‌شود.



نگاره ۱۸- اختلاف بین زمان های UTC و $UT1$



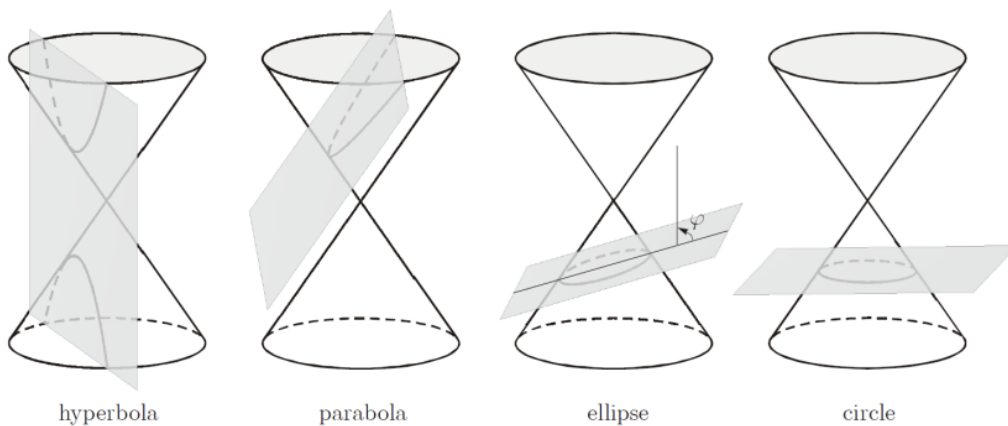
نگاره ۱۹- ارتباط بین زمان های مورد استفاده در ژئودزی

فصل ۳

بیضی: ویژگی ها و روابط ریاضی مربوط به آن

بیضی یکی از مقاطع مخروطی به حساب می آید. چنانچه یک مخروط که مولد آن با محور مخروط یک زاویه به اندازه γ بسازد در نظر بگیریم، در اینصورت مطابق نگاره ۱ اگر زاویه بین یک صفحه قطع کننده مخروط با محور آن بزرگتر از γ و کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ باشد ($\gamma < \varphi < \frac{\pi}{2}$)، فصل مشترک حاصل همان بیضی خواهد بود. حالت های دیگر عبارت خواهند بود از:

- هذلولی: اگر $\varphi < \gamma$
- سهمی: اگر $\varphi = \gamma$
- دایره: اگر $\varphi = \frac{\pi}{2}$



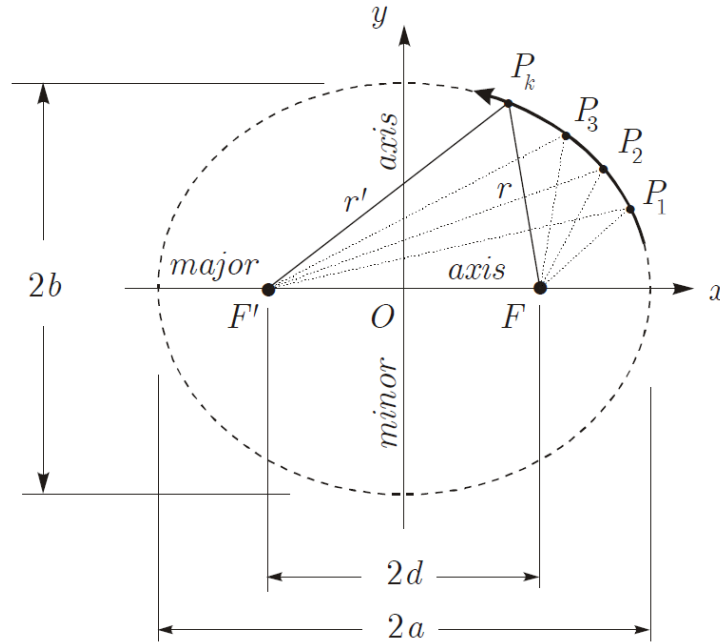
نگاره ۱- مقاطع مخروطی

معادله بیضی

چنانچه یک دستگاه مختصات کارتزین به گونه ای که مبدا آن منطبق بر مرکز بیضی و محورهای X و Y آن به ترتیب منطبق بر محورهای بزرگ (به سمت راست) و کوچک (به سمت بالا) آن باشد، در آن صورت معادله بیضی به صورت زیر نوشته می شود.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

۱



نگاره ۲- بیضی

برای رسیدن به معادله فوق می توان با توجه به نگاره ۲ به ترتیب از روابط زیر استفاده نمود.

$$r + r' = 2a$$

$$d = OF = OF'$$

$$\sqrt{(x+d)^2 + y^2} + \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = 2a$$

$$4a\sqrt{(x-d)^2 + y^2} = 4a^2 + (x-d)^2 - (x+d)^2$$

$$= 4a^2 - 4xd$$

$$\sqrt{(x-d)^2 + y^2} = a - \frac{d}{a}x$$

$$x^2 \left(\frac{a^2 - d^2}{a^2} \right) + y^2 = a^2 - d^2$$

$$a^2 = b^2 + d^2; \quad b^2 = a^2 - d^2; \quad d^2 = a^2 - b^2$$

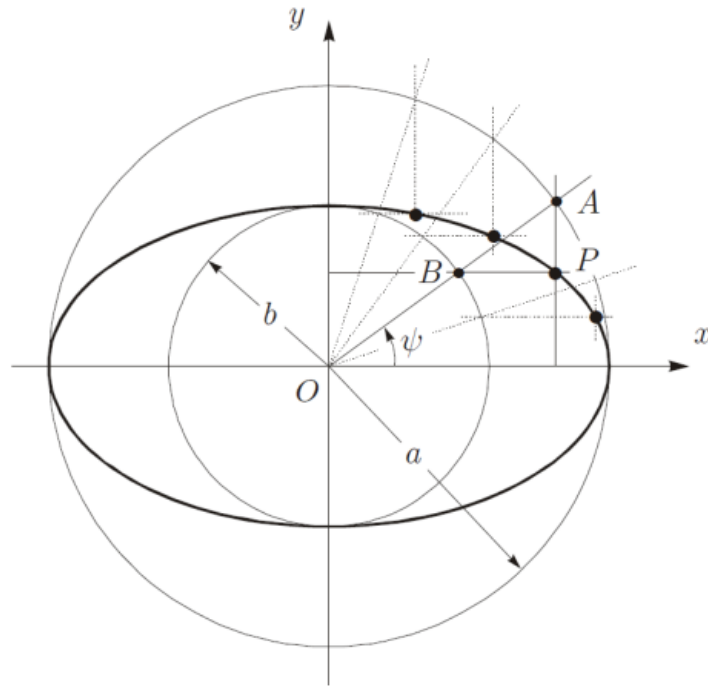
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

مطابق نگاره ۳ چنانچه دو دایره کمکی محیطی و محاطی بیضی به شعاع های a و b را در نظر بگیریم، در این صورت معادله پارامتری بیضی به صورت زیر خواهد بود.

$$x = a \cos \psi$$

۲

$$y = b \sin \psi$$



نگاره ۳- بیضی و دایره های کمکی

اثبات رابطه فوق به صورت زیر است.

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 = b^2$$

$$x_A^2 + y_A^2 = a^2 \quad \text{and} \quad \frac{x_P^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2} = 1$$

$$x_A^2 = a^2 - y_A^2 \quad \text{and} \quad x_P^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y_P^2$$

$$a^2 - y_A^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y_P^2$$

$$y_P = \frac{b}{a} y_A$$

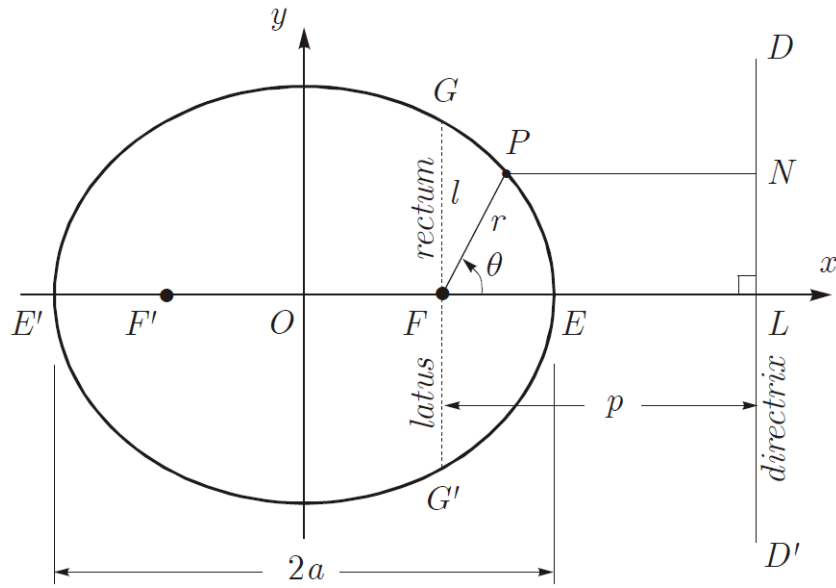
$$\begin{aligned} x_A &= a \cos \psi & x_P &= x_A \\ y_A &= a \sin \psi & \text{and} & \\ & & y_P &= \frac{b}{a} y_A \\ x &= a \cos \psi \\ y &= b \sin \psi \end{aligned}$$

روشی دیگر برای اثبات معادله کارتزین بیضی به صورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned} x_B^2 + y_B^2 &= b^2 & \text{and} & \frac{x_P^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2} = 1 \\ y_B^2 &= b^2 - x_B^2 & \text{and} & y_P^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_P^2 \\ b^2 - x_B^2 &= b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_P^2 \\ x_P &= \frac{a}{b} x_B \\ x_B &= b \cos \psi & \text{and} & x_P = \frac{a}{b} x_B \\ y_B &= b \sin \psi & \text{and} & y_P = y_B \\ x^2 &= a^2 \cos^2 \psi & \text{and} & y^2 = b^2 \sin^2 \psi \\ \frac{x^2}{a^2} &= \cos^2 \psi & \text{and} & \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \psi \\ \sin^2 \psi + \cos^2 \psi &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

چنانچه بر پایه نگاره ۴ مختصات هر نقطه دلخواه P بر روی بیضی را نسبت به کانون F نمایش دهیم، به روابط زیر خواهیم رسید.

$$\begin{aligned} r &= \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} & ۳ \\ r &= \frac{l}{1 + e \cos \theta} \end{aligned}$$



نگاره ۴- بیضی (کانون ها و خط هادی)

اثبات رابطه فوق به صورت زیر می باشد.

$$\frac{PF}{PN} = e$$

$$\frac{FE}{EL} = e \quad \text{and} \quad \frac{FE'}{E'L} = e$$

$$FE = e(EL), FE' = e(E'L) \text{ and } FE + FE' = e(EL + E'L)$$

$$FE + FE' = 2(OE) = 2a \text{ and } EL + E'L = 2(OL)$$

$$OL = \frac{a}{e}$$

$$FE' - FE = e(E'L - EL)$$

$$EE' - 2(FE) = e(EE')$$

$$EE'(1 - e) = 2(FE)$$

$$2a(1 - e) = 2(FE)$$

$$FE = a(1 - e)$$

$$EE' - 2(FE) = 2(OF) \text{ and } EE' = 2a$$

$$OF = ae$$

$$l = FG$$

$$OL - OF = \frac{a}{e} - ae$$

$$\frac{l}{\frac{a}{e} - ae} = e$$

$$l = a(1 - e^2)$$

$$p = FL = OL - OF$$

$$p = \frac{a}{e}(1 - e^2)$$

$$PF = r$$

$$PN = p - r \cos \theta$$

$$\frac{PF}{PN} = e$$

$$\frac{r}{e} = p - r \cos \theta$$

$$r = \frac{ep}{1 + e \cos \theta}$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

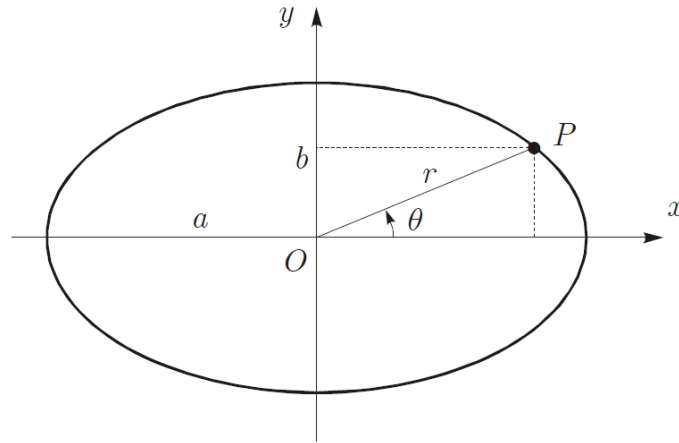
$$r = \frac{l}{1 + e \cos \theta}$$

اگر مطابق نگاره ۵ دستگاه مختصات قطبی را نسبت به مرکز بیضی در نظر بگیریم، در آن صورت به روابط زیر می‌رسیم.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & x^2 &= r^2 \cos^2 \theta \\ y &= r \sin \theta & \text{and} & \\ y^2 &= r^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad ۴$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}$$

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}$$



نگاره ۵- بیضی (معادله قطبی)

خروج از مرکزی های بیضی

خروج از مرکزی یک بیضی معمولاً با نماد e نمایش داده می شود که به خروج از مرکزی اول معروف است و از رابطه زیر تعریف می شود.

$$e = \frac{OF}{a} \quad ۵$$

از نگاره ۲ می توان دید که

$$OF = d = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{and} \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

بنابراین مجذور آن که در ژئودزی متداولتر است به صورت زیر ارائه می شود.

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad ۶$$

نوع دیگری از خروج از مرکزی موسوم به خروج از مرکزی دوم که با e' معرفی می شود، مجذور آن به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1 \quad ۷$$

فشرده‌گی بیضی

فشرده‌گی یک بیضی که با f نمایش داده می‌شود بیانگر میزان پخ‌ی آن است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} \quad ۸$$

دیگر پارامترهای بیضی

در برخی از روابط مورد نیاز در محاسبات ژئودزی از کمیت‌های دیگری موسوم به پارامترها یا ثابت‌های C ، m و n بیضی استفاده می‌شود که به صورت زیر معرفی می‌شوند.

$$c = \frac{a^2}{b} \quad ۹$$

$$m = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad ۱۰$$

$$n = \frac{a-b}{a+b} \quad ۱۱$$

توجه نمایید که C شعاع قطبی و m گاهی اوقات مجذور خروج از مرکزی سوم نامیده می‌شوند. همچنین فشرده‌گی دوم و سوم نیز به صورت زیر تعریف شده‌اند.

$$f' = (a-b)/b$$

$$f'' = n = (a-b)/(a+b)$$

روابط بین پارامترهای بیضی

پارامترهای مختلف بیضی مانند a ، b ، c ، e ، e' ، m و n به صورت زیر با یکدیگر ارتباط دارند (نگاره ۶).

$$a = b\sqrt{1+e'^2} = \frac{b}{\sqrt{1-e^2}} = c\left(\frac{1-n}{1+n}\right) = c(1-f) \quad ۱۲$$

$$b = a(1-f) = a\sqrt{1-e^2} = \frac{a}{\sqrt{1+e'^2}} = \frac{c}{1+e'^2} = c(1-e^2)$$

$$\frac{b}{a} = (1-f) = \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{\sqrt{1+e'^2}} = \frac{e}{e'} = \frac{1-n}{1+n} = \sqrt{\frac{1-m}{1+m}}$$

$$f = 1 - \sqrt{1 - e^2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}} = \frac{2n}{1 + n}$$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} = f(2 - f) = \frac{4n}{(1 + n)^2} = \frac{2m}{1 + m}$$

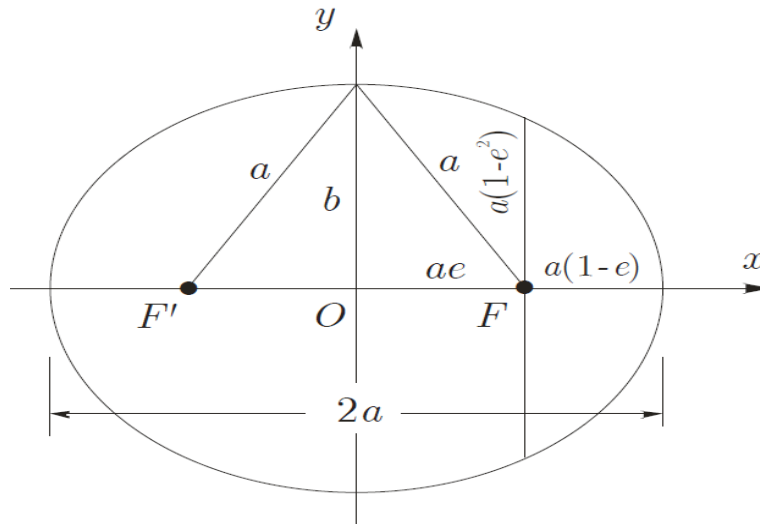
$$1 - e^2 = (1 - f)^2$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} = \frac{f(2 - f)}{(1 - f)^2} = \frac{4n}{(1 - n)^2} = \frac{2m}{1 - m}$$

$$(1 - e^2)(1 + e'^2) = 1$$

$$m = \frac{f(2 - f)}{1 + (1 - f)^2} = \frac{2n}{1 + n^2}$$

$$n = \frac{f}{2 - f} = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}} = \frac{\sqrt{1 + e'^2} - 1}{\sqrt{1 + e'^2} + 1}$$



نگاره ۶- هندسه بیضی

هندسه بیضی

در نگاره ۷ زوایای φ ، ψ و θ به عنوان عرض های یک نقطه دلخواه مانند P شناخته شده اند که به ترتیب عبارتند از: زاویه بین محور بزرگ بیضی و قائم بر بیضی در نقطه P ، زاویه بین محور بزرگ بیضی و قائم بر دایره کمکی در نقطه A و زاویه بین محور بزرگ بیضی و بردار شعاعی OP . مختصات کارترین نقطه $P(x, y)$ می توانند به عنوان تابع هایی از φ ، ψ و θ بیان شوند. بنابراین این تابع ها می توانند برای تعریف فاصله های PH ، PD و OH بر حسب پارامترهای بیضی a و e^2 استفاده شوند که در بخش های بعدی خواهیم دید.

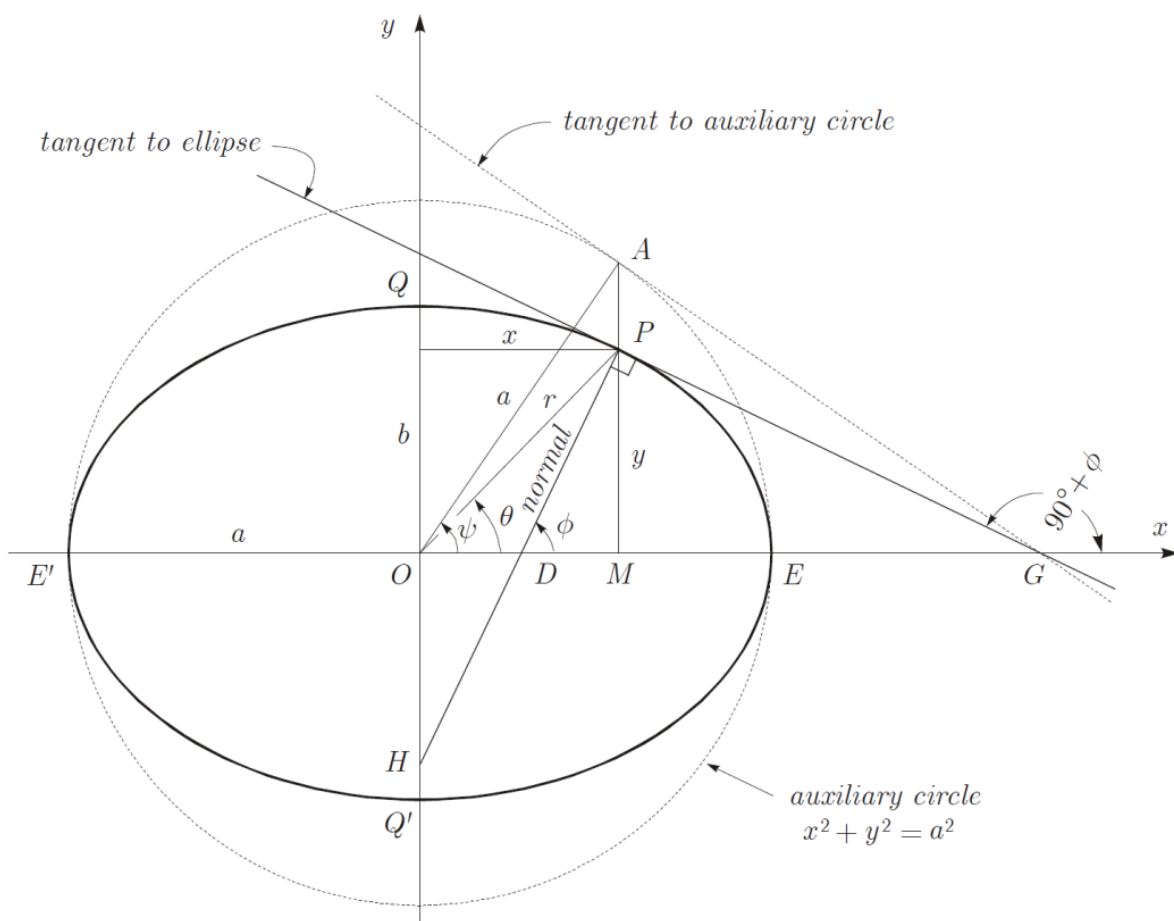
• X و Y بر حسب ϕ

با مشتق گیری از معادله (۱) نسبت به X خواهیم داشت.

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

با کمی دستکاری و جابجایی به رابطه زیر می رسیم.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$$



نگاره ۷- بیضی و دایره کمکی

حال بنابر تعریف $\frac{dy}{dx}$ که همان شیب مماس بر بیضی است و با توجه به شکل ۷ داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(90^\circ + \phi) = -\cot \phi = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$$

از رابطه فوق می توانیم به روابط زیر برسیم.

$$y = \frac{b^2}{a^2} x \tan \phi$$

$$x = \frac{a^2}{b^2} \frac{y}{\tan \phi}$$

با جایگذاری معادله y فوق در معادله کارتزین بیضی به روابط زیر خواهیم رسید.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^4} x^2 \tan^2 \phi = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} \left\{ 1 + \frac{b^2 \sin^2 \phi}{a^2 \cos^2 \phi} \right\} = 1$$

حال با توجه به رابطه $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$ می توان به رابطه زیر رسید.

$$\frac{x^2}{a^2} \left\{ 1 + (1 - e^2) \frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \phi} \right\} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} \left\{ \frac{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi - e^2 \sin^2 \phi}{\cos^2 \phi} \right\} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} \left\{ \frac{1 - e^2 \sin^2 \phi}{\cos^2 \phi} \right\} = 1$$

به این ترتیب به معادله نهایی زیر برای X می رسیم.

$$x = \frac{a \cos \phi}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}}$$

به طور مشابه برای y هم به روابط زیر می‌رسیم.

$$\frac{a^2}{b^4} \frac{y^2}{\tan^2 \phi} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} \left\{ 1 + \frac{a^2 \cos^2 \phi}{b^2 \sin^2 \phi} \right\} = 1$$

با در نظر گرفتن $\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{1-e^2}$ خواهیم داشت.

$$\frac{y^2}{b^2} \left\{ 1 + \frac{\cos^2 \phi}{(1-e^2) \sin^2 \phi} \right\} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} \left\{ \frac{\sin^2 \phi - e^2 \sin^2 \phi + \cos^2 \phi}{(1-e^2) \sin^2 \phi} \right\} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} \left\{ \frac{1 - e^2 \sin^2 \phi}{(1-e^2) \sin^2 \phi} \right\} = 1$$

و سرانجام به رابطه زیر می‌رسیم.

$$y = \frac{b\sqrt{1-e^2} \sin \phi}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \quad ۱۴$$

• تعریف دو پارامتر W و V و c

$$x = \frac{a}{W} \cos \phi$$

$$y = \frac{b\sqrt{1-e^2}}{W} \sin \phi$$

$$W^2 = 1 - e^2 \sin^2 \phi \quad ۱۵$$

$$\begin{aligned} W^2 &= 1 - \frac{e'^2}{1 + e'^2} \sin^2 \phi \\ &= \frac{1 + e'^2 - e'^2 \sin^2 \phi}{1 + e'^2} \\ &= \frac{1 + e'^2 (1 - \sin^2 \phi)}{1 + e'^2} \end{aligned}$$

$$W^2 = \frac{1 + e'^2 \cos^2 \phi}{1 + e'^2} \quad ۱۶$$

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \phi$$

$$W^2 = \frac{V^2}{1 + e'^2} = \frac{b^2}{a^2} V^2$$

$$x = \frac{a^2 \cos \phi}{bV} = \frac{c}{V} \cos \phi \quad ۱۷$$

$$y = \frac{b}{V} \sin \phi$$

$$c = \frac{a^2}{b}$$

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \phi$$

$$W^2 = 1 - e^2 \sin^2 \phi; \quad V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \phi \quad \text{and} \quad c = \frac{a^2}{b} \quad ۱۸$$

$$W^2 = \frac{b^2}{a^2} V^2 = \frac{b}{c} V^2 = V^2 (1 - e^2) = \frac{V^2}{1 + e'^2}$$

$$V^2 = \frac{a^2}{b^2} W^2 = \frac{c}{b} W^2 = \frac{W^2}{1 - e^2} = W^2 (1 + e'^2)$$

• طول قائم تا محور کوچک بیضی

$$PH = \frac{x}{\cos \phi} = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} = \frac{a}{W} = \frac{c}{V} \quad ۱۹$$

• طول قائم تا محور بزرگ بیضی

$$PD = \frac{y}{\sin \phi} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} = PH(1-e^2) = \frac{a}{W}(1-e^2) = \frac{c}{V}(1-e^2) \quad 20$$

• طول DH در امتداد قائم

$$DH = PH - PD = \frac{a}{W}e^2 = \frac{c}{V}e^2 \quad 21$$

• طول OH در امتداد محور کوچک بیضی

$$OH = DH \sin \phi = \frac{a}{W}e^2 \sin \phi = \frac{c}{V}e^2 \sin \phi \quad 22$$

• ارتباط بین عرض های مختلف

با مشتق گیری از (۲) نسبت به ψ داریم:

$$\frac{dx}{d\psi} = -a \sin \psi; \quad \frac{dy}{d\psi} = b \cos \psi$$

بنابراین

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\psi} \frac{d\psi}{dx} = -\frac{b}{a} \cot \psi$$

بنابر تعریف $\frac{dy}{dx}$ به عنوان شیب مماس بر بیضی:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(90^\circ + \phi) = -\cot \phi$$

حال با توجه به دو معادله قبلی، ارتباط بین ψ و ϕ به صورت زیر تعیین می شود.

$$\tan \psi = \frac{b}{a} \tan \phi = \sqrt{1 - e^2} \tan \phi = (1 - f) \tan \phi \quad 23$$

همچنین بر اساس نگاره ۷ و معادلات (۱۵) داریم:

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{a(1 - e^2) \sin \phi}{W} \frac{W}{a \cos \phi}$$

بنابراین ارتباط بین θ و ϕ نیز به صورت زیر تعیین می شود.

$$\tan \theta = (1 - e^2) \tan \phi = \frac{b^2}{a^2} \tan \phi = (1 - f)^2 \tan \phi \quad 24$$

با در نظر گرفتن دو معادله (۲۳) و (۲۴)، ارتباط بین ψ و θ نیز به صورت زیر به دست می آید.

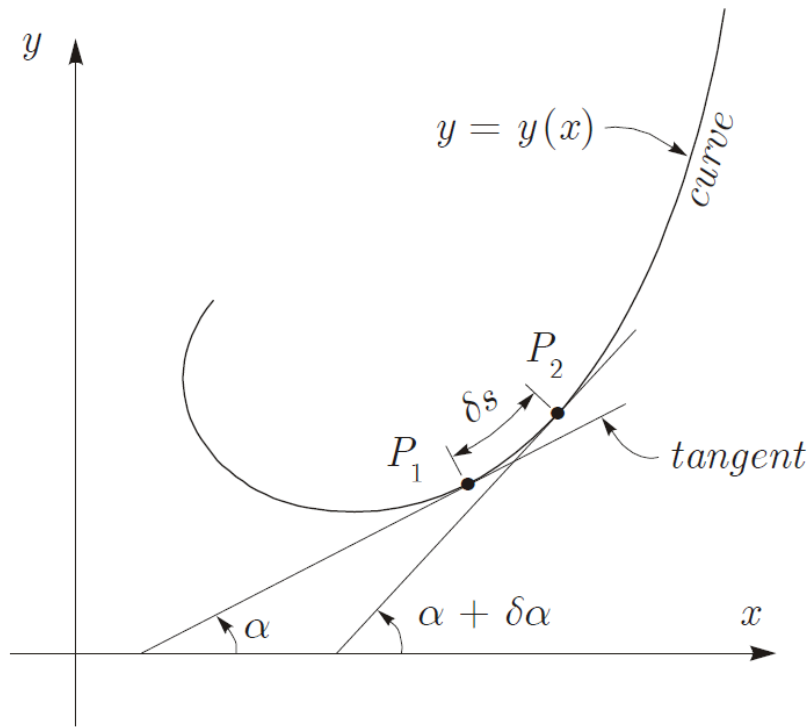
$$\tan \theta = \sqrt{1 - e^2} \tan \psi = \frac{b}{a} \tan \psi = (1 - f) \tan \psi \quad 25$$

انحنای

برای محاسبه فاصله بر روی بیضی یا بیضوی، دانستن برخی مطالب در مورد انحنای بیضی مورد نیاز است. انحنای در هر نقطه دلخواه روی بیضی می تواند از روابط عمومی قابل استفاده برای هر منحنی دیگر تعیین شود.

انحنای K برای هر نقطه دلخواه روی منحنی $y = y(x)$ به عنوان نرخ تغییر جهت منحنی یا نرخ تغییر جهت مماس بر منحنی نسبت به طول کمان تعریف می شود (نگاره ۸). بنابراین این تعریف می توان رابطه زیر را نوشت.

$$\kappa = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta \alpha}{\delta s} = \frac{d\alpha}{ds} \quad 26$$



نگاره ۸- انحنای

شیب مماس بر منحنی بنا به تعریف مشتق اول است، یعنی $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$ ، و مشتق دوم نیز به صورت زیر می باشد.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 \alpha \frac{d\alpha}{dx} = \sec^2 \alpha \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dx} \quad 27$$

اما از معادله (۲۶)، $\kappa = \frac{d\alpha}{ds}$ ، و مثلث جزئی، که رابطه $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$ را به

دست می دهد و با جایگذاری آنها در معادله (۲۷) به $\frac{d^2y}{dx^2} = \kappa \sec^3 \alpha$ می رسیم. با کمی جابجایی و دستکاری به رابطه زیر برای انحنای می رسیم.

$$\kappa = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sec^3 \alpha} \quad 28$$

حال با در نظر گرفتن

$$\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha ; \text{ so } \sec \alpha = \pm(1 + \tan^2 \alpha)^{1/2} \text{ and } \sec^3 \alpha = \pm(1 + \tan^2 \alpha)^{3/2}$$

می توان معادله (۲۸) را ساده تر نمود. از آنجا که

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha , \text{ then } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \tan^2 \alpha , \text{ thus } \sec^3 \alpha = \pm \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}$$

می توان با جایگذاری در معادله (۲۸)، سرانجام به یک رابطه جدید برای انحنا برسیم.

$$\kappa = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}} = \pm \frac{y''}{\left\{1 + (y')^2\right\}^{3/2}} \quad ۲۹$$

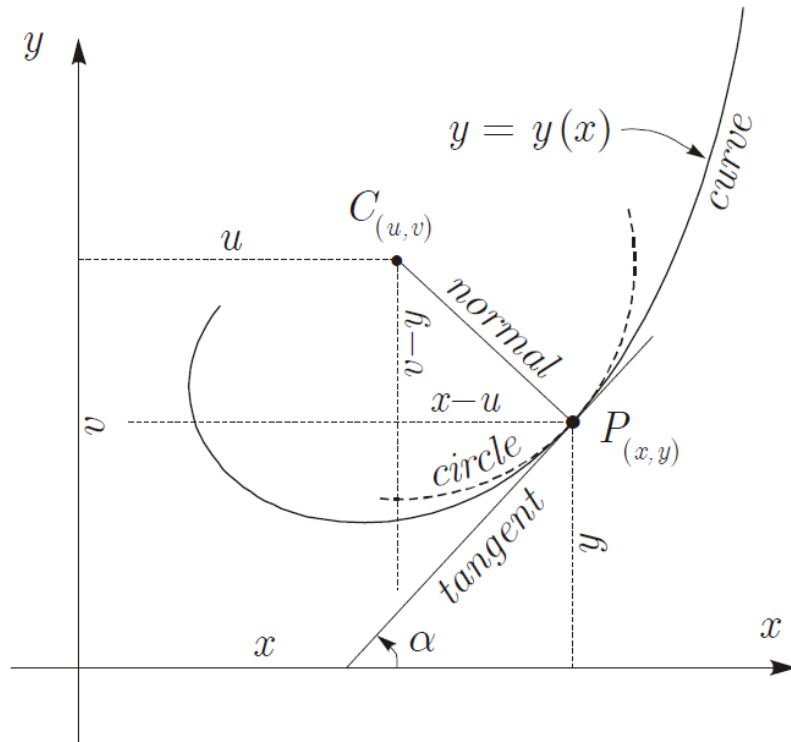
$$\text{where } \frac{dy}{dx} = y' \text{ and } \frac{d^2y}{dx^2} = y''$$

شعاع انحنا

شعاع انحنا ρ برای یک نقطه دلخواه مانند $P(x, y)$ بر روی منحنی $y = y(x)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|} \text{ for } \kappa \neq 0 \text{ and } \rho = \infty \text{ for } \kappa = 0 \quad ۳۰$$

شعاع انحنا در واقع شعاع دایره بوسانی است که منحنی را در همان نقطه تقریب می کند. در نگاره ۹، شعاع انحنا در نقطه P برابر $\rho = CP$ است و $C(u, v)$ مرکز انحنا با مختصات $x = u$ و $y = v$ است.



نگاره ۹- مرکز انحنا

به منظور بدست آوردن یک معادله برای محاسبه شعاع انحنا می توان به روش زیر عمل کرد. از تعریف معادله شیب مماس بر بیضی می توان آن را به عنوان مشتق اول به صورت زیر تعیین نمود.

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\cot \phi = -\frac{\cos \phi}{\sin \phi} \quad ۳۱$$

مشتق دوم نیز به صورت زیر تعیین می گردد.

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{-1}{\tan \phi} \right) \frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{d\phi}{dx} \quad ۳۲$$

مشتق $\frac{d\phi}{dx}$ نیز از رابطه زیر به دست می آید.

$$x = \frac{a \cos \phi}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}}$$

با استفاده از قاعده مشتق گیری توابع کسری می باشد.

مشتق $\frac{dx}{d\phi}$ به صورت زیر

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\phi} &= \frac{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2} (-a \sin \phi) - a \cos \phi \left(\frac{1}{2} (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2} \right) 2e^2 \sin \phi \cos \phi}{1 - e^2 \sin^2 \phi} \\ &= \frac{a \sin \phi}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \{1 - e^2 \sin^2 \phi - e^2 \cos^2 \phi\} \\ &= \frac{a \sin \phi}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \{1 - e^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)\} \\ &= \frac{a(1 - e^2) \sin \phi}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}}{a(1 - e^2) \sin \phi} \quad 33$$

حال با جایگذاری رابطه فوق در معادله مشتق دوم (۳۲) به معادله زیر می رسیم.

$$y'' = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}}{a(1 - e^2) \sin^3 \phi} \quad 34$$

اکنون می توان معادله شعاع انحنا را به صورت زیر بازنویسی نمود.

$$\rho^{2/3} = \frac{1 + (y')^2}{y''^{2/3}}$$

با جایگذاری (۳۱) و (۳۴) در معادله فوق به رابطه زیر می رسیم.

$$\begin{aligned}\rho^{2/3} &= \left(1 + \frac{\cos^2 \phi}{\sin^2 \phi}\right) \frac{a^{2/3} (1 - e^2)^{2/3} \sin^2 \phi}{1 - e^2 \sin^2 \phi} \\ &= \frac{a^{2/3} (1 - e^2)^{2/3}}{1 - e^2 \sin^2 \phi}\end{aligned}$$

سرانجام با کمی دستکاری در معادله فوق به رابطه پایانی شعاع انحنا می‌رسیم.

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} = \frac{a(1 - e^2)}{W^3} = \frac{c}{V^3}$$

مرکز انحنا

مطابق نگاره ۹، مرکز انحنا برای یک نقطه دلخواه مانند $P(x, y)$ بر روی منحنی $y = y(x)$ ، $C(u, v)$ است که در امتداد قائم بر منحنی در نقطه P قرار گرفته و در واقع منطبق بر مرکز دایره بوسان در این نقطه می‌باشد.
مختصات $(x = u$ و $y = v)$ مرکز انحنا به کمک معادله (۳۰) و معادلات عمومی خطوط مماس و قائم به دست می‌آیند.

$$\text{tangent: } y - y_0 = m(x - x_0) \quad ۳۵$$

$$\text{normal: } y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$$

$$m = \tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \dot{y}$$

مرکز انحنای $C(u, v)$ هم در امتداد قائم گذرنده از $P(x, y)$ و هم در فاصله ρ از نقطه P در سمت تعقر منحنی $y = y(x)$ قرار می‌گیرد. بنابراین می‌توان دو معادله زیر را نوشت.

$$v - y = -\frac{1}{y'}(u - x) \quad ۳۶$$

$$(u - x)^2 + (v - y)^2 = \rho^2 = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2} \quad ۳۷$$

با مرتب سازی معادله (۳۶) به صورت $(u - x) = -y'(v - y)$ و جایگذاری در (۳۷)، آنگاه:

$$\begin{aligned} (-y')^2 (v - y)^2 + (v - y)^2 &= \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2} \\ (v - y)^2 \{1 + y'^2\} &= \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2} \\ (v - y)^2 &= \frac{(1 + y'^2)^2}{y''^2} \end{aligned}$$

و نهایتاً به معادله زیر خواهیم رسید.

$$v - y = \pm \frac{1 + y'^2}{y''} \quad 38$$

باید توجه نمود وقتی که تعقر منحنی به طرف بالا است، $y'' > 0$ و از آنجا که C بالای P قرار می گیرد، آنگاه $(v - y) > 0$ و بنابراین علامت ویژه معادله فوق مثبت (+) است. همین حالت برای زمانی که $y'' < 0$ نیز صادق است و با علامت مثبت مواجه هستیم. لذا معادله (38) را به صورت زیر خواهیم داشت.

$$v - y = \frac{1 + y'^2}{y''} \quad 39$$

حال با جایگذاری معادله فوق در (36) به رابطه زیر دست می یابیم.

$$\frac{1 + y'^2}{y''} = -\frac{1}{y'}(u - x) \quad 40$$

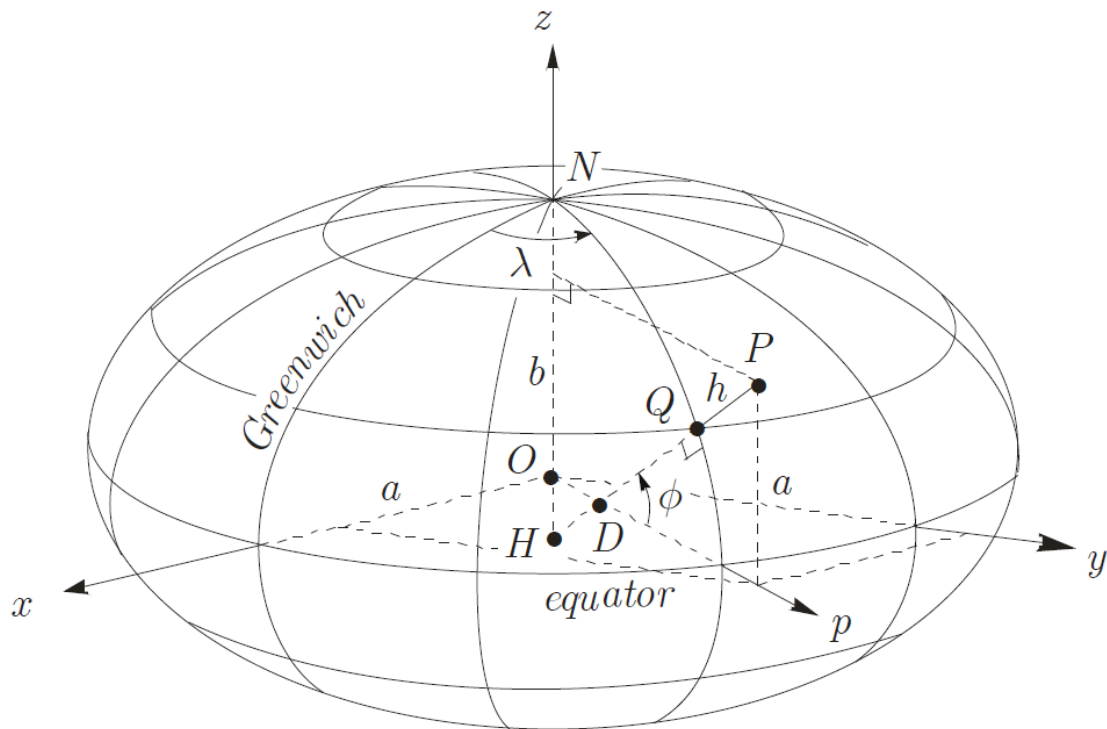
نهایتاً با مرتب سازی معادلات (39) و (40) به معادلات مختصات (u, v) به عنوان مرکز انحنای C می رسیم.

$$\begin{aligned} u &= x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} \\ v &= y + \frac{1 + y'^2}{y''} \end{aligned} \quad 41$$

فصل ۴

رابطه بین مختصات کارتیزین و منحنی الخط

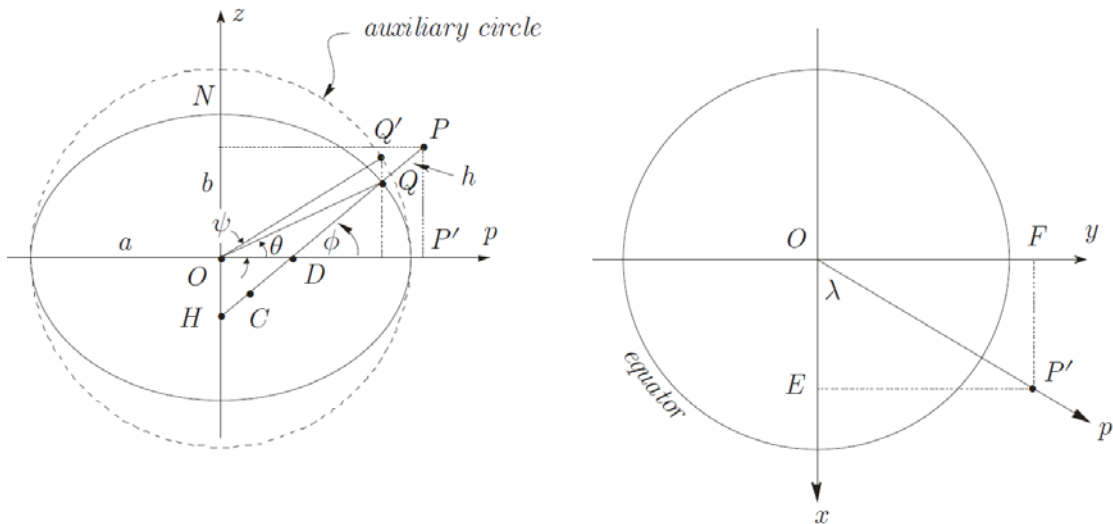
یکی از مباحث مهم و کاربردی در محاسبات ژئودزی تبدیل بین مختصات کارتیزین و منحنی الخط در یک دستگاه مختصات مرجع ژئودتیک می باشد. برای این منظور مطابق نگاره ۱، یک نقطه دلخواه مانند P را در فضا در نظر می گیریم که از طریق یک قائم بر سطح بیضوی مانند PH به بیضوی مرتبط شده است که آن را در نقطه ای مانند Q قطع کرده است.



نگاره ۱- ارتباط نقطه P با بیضوی مرجع

مطابق نگاره ۱، نقطه P در ارتفاع $h=QP$ (ارتفاع ژئودتیک) بالای بیضوی قرار دارد و قائم بر بیضوی، صفحه استوایی xOy را در D و محور z را در H قطع می کند. این قائم با صفحه استوایی xOy زاویه ϕ (عرض ژئودتیک) و در صفحه نصف النهاری ONQ یک زاویه به اندازه λ (طول ژئودتیک) با صفحه نصف

النهارى گرينويچ مى سازد. با اين توضيحات مختصات ژئودتيك نقطه P به صورت φ (عرض ژئودتيك)، λ (طول ژئودتيك) و h (ارتفاع ژئودتيك) معرفى مى شود كه به آن مختصات منحنى الخط گفته مى شود. توجه شود كه نقطه Q به عنوان تصوير قائم نقطه P روى بيضوى، داراى مختصات φ و λ يكسانى با نقطه P اما داراى $h=0$ است. نقطه P علاوه بر مختصات منحنى الخط داراى مختصات كارتزين x, y, z نيز مى باشد. اين دو دسته مختصات هم ارز مى باشند و مبدا هر دو دستگاه مختصات در مركز بيضوى قرار دارند.



(a) ارتباط نقطه P با بیضی نصف النهاری

(b) تصویر نقطه P در صفحه استوایی

نگاره ۲- ارتباط مختصات كارتزين و ژئودتيك

در نگاره ۲ (a) بیضی نصف النهاری (مقطع قائم نصف النهاری) در صفحه نصف النهاری ZOp نمایش داده شده است. نقطه P در این صفحه قرار دارد و از طریق خط قائم به بیضی نصف النهاری مرتبط می شود. خط قائم بیضی نصف النهاری را در Q ، صفحه استوایی را در D و محور Z را در H قطع می کند. مرکز انحنای بیضی نصف النهاری برای نقطه Q در امتداد خط قائم در C قرار می گیرد. تصویر نقطه P در صفحه استوایی نیز با P' نمایش داده شده است. دایره کمکی نیز با تصویر نقطه Q در امتداد عمود بر محور p نمایش داده شده است. همچنین عرض های پارامتریك ψ و ژئوسنتریك θ در این نگاره نشان داده شده اند. نگاره ۲ (b) صفحه استوایی بیضوی را نشان می دهد كه در آن P' تصویر نقطه P نیز نمایش داده شده است.

در بخش های قبلی روابط بین پارامترهای مختلف بیضی اثبات شده اند که به دلیل نیاز، مجددا در اینجا یادآوری می شوند.

$$QH = \frac{a}{W} = \frac{c}{V} = \nu \quad \text{radius of curvature in prime vertical section}$$

$$QD = \frac{a}{W}(1 - e^2) = \frac{c}{V}(1 - e^2) = \nu(1 - e^2) = \frac{b}{V}$$

$$OH = \frac{a}{W} e^2 \sin \phi = \frac{c}{V} e^2 \sin \phi = \nu e^2 \sin \phi$$

$$DH = \frac{a}{W} e^2 = \frac{c}{V} e^2 = \nu e^2$$

برای عرض های مختلف بیضی نیز داشتیم:

latitudes: $QDP' = \phi$ (geodetic) $QOP' = \theta$ (geocentric) $Q'OP' = \psi$ (parametric)

latitudes are related by: $\tan \theta = (1 - f)^2 \tan \phi$ and $\tan \psi = (1 - f) \tan \phi$

مطابق نگاره ۲ و توجه به رابطه $PH = QH + QP = \nu + h$ خواهیم داشت:

$$OP' = (\nu + h) \cos \phi$$

$$PP' = (\nu + h) \sin \phi - \nu e^2 \sin \phi = \{ \nu(1 - e^2) + h \} \sin \phi$$

$$OE = OP' \cos \lambda = (\nu + h) \cos \phi \cos \lambda$$

$$OF = OP' \sin \lambda = (\nu + h) \cos \phi \sin \lambda$$

طول های OE، OF و PP' به ترتیب مختصات های کارتیزین x، y و z نقطه P هستند (نگاره ۲).
برای مقاصد مختلف، اغلب نیاز به تبدیل از مختصات ژئودتیک (ϕ, λ, h) به مختصات کارتیزین (x, y, z) و بر عکس، و نیز تبدیل مختصات ژئودتیک (ϕ, λ, h) از یک بیضوی به بیضوی دیگر می باشد. این تبدیلات در بخش های بعدی مورد بررسی قرار می گیرند.

تبدیل مختصات ژئودتیک (φ, λ, h) به مختصات کارتزین (x, y, z)

با توجه به نگاره ۲ و معادلات و آنچه در بالا گفته شد، تبدیل مختصات ژئودتیک (φ, λ, h) به مختصات کارتزین (X, Y, Z) توسط روابط زیر انجام می پذیرد.

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{a}{W} + h \right) \cos \phi \cos \lambda = \left(\frac{c}{V} + h \right) \cos \phi \cos \lambda = (\nu + h) \cos \phi \cos \lambda \\ y &= \left(\frac{a}{W} + h \right) \cos \phi \sin \lambda = \left(\frac{c}{V} + h \right) \cos \phi \sin \lambda = (\nu + h) \cos \phi \sin \lambda \\ z &= \left(\frac{a(1-e^2)}{W} + h \right) \sin \phi = \left(\frac{b}{V} + h \right) \sin \phi = \{ \nu(1-e^2) + h \} \sin \phi \end{aligned} \quad (1)$$

فرم ماتریسی معادلات (۱) را می توان به صورت زیر نمایش داد.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} (\nu + h) \cos \phi \cos \lambda \\ (\nu + h) \cos \phi \sin \lambda \\ \left(\nu \frac{b^2}{a^2} + h \right) \sin \phi \end{bmatrix}_G$$

دامنه متغیرها در معادلات (۱) عبارتند از:

$$\nu \geq 0, \nu + h \geq 0, \nu(1-e^2) + h \geq 0 \text{ and } -\frac{1}{2}\pi \leq \phi \leq \frac{1}{2}\pi, \\ -\pi < \lambda \leq \pi$$

جهت یادآوری پارامترهای بکاررفته در روابط فوق، به صورت زیر می باشند.

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{a}{W} = \frac{c}{V} & \nu(1-e^2) &= \frac{b}{V} \\ V^2 &= 1 + e'^2 \cos^2 \phi & W^2 &= 1 - e^2 \sin^2 \phi \\ b &= a(1-f) & c &= \frac{a}{1-f} \\ e^2 &= f(2-f) & e'^2 &= \frac{f(2-f)}{(1-f)^2} \end{aligned}$$

تبدیل مختصات کارتیزین (x, y, z) به مختصات ژئودتیک (ϕ, λ, h) از معادلات (۱) می توان به روابط زیر را تنظیم نمود.

$$\begin{aligned} \frac{x}{\cos \lambda} &= \frac{y}{\sin \lambda} = p, \quad \text{provided } \lambda \neq 0, \pm \frac{1}{2} \pi, \pi \\ \frac{z}{\sin \phi} &= \frac{p}{\cos \phi} - \nu e^2, \quad \text{provided } \phi \neq 0, \pm \frac{1}{2} \pi \\ h &= \frac{p}{\cos \phi} - \nu, \quad \text{provided } \phi \neq \pm \frac{1}{2} \pi \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن p فاصله قائم از محور Z (محور دورانی) است و به صورت زیر تعیین می گردد.

$$p = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \quad (3)$$

از اولین معادله (۲) داریم:

$$\begin{aligned} \sin \lambda &= \frac{y}{p} \quad \text{and} \quad \cos \lambda = \frac{x}{p} \\ \tan \lambda &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

بنابراین می توان با انتخاب تابع سینوس از روابط فوق، مقدار λ (طول ژئودتیک) را از رابطه زیر تعیین نمود.

$$\lambda = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} 0, \text{ if } x > 0, y = 0 \\ \arcsin \frac{y}{p}, \text{ if } x > 0, y \neq 0 \end{array} \right\} \arcsin \frac{y}{p}, \text{ if } x > 0 \\ \left. \begin{array}{l} \pi - \arcsin \frac{y}{p}, \text{ if } x < 0, y > 0 \\ \pi, \text{ if } x < 0, y = 0 \end{array} \right\} \pi - \arcsin \frac{y}{p}, \text{ if } x < 0, y \geq 0 \\ -\pi - \arcsin \frac{y}{p}, \text{ if } x < 0, y < 0 \end{cases}$$

با ترکیب عبارات فوق به رابطه کوتاه تر زیر می رسیم.

$$\lambda = \frac{1}{2} \pi (1 - \operatorname{sgn}(x)) \operatorname{sgn}(y) + \operatorname{sgn}(x) \arcsin \frac{y}{p} \quad (4)$$

که در آن تابع علامت عبارت است از:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \geq 0 \\ -1, & \text{if } x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

به طور مشابه با استفاده از تابع کسینوس، به رابطه زیر برای تعیین مقدار λ (طول ژئودتیک) خواهیم رسید.

$$\lambda = \operatorname{sgn}(y) \arccos \frac{x}{p} \quad (6)$$

از دومین معادله (۲) می توان روابط زیر را تنظیم نمود.

$$p \tan \phi = z + \nu e^2 \sin \phi \quad (7)$$

$$z \cos \phi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi} + a e^2 \sin \phi \cos \phi = p \sin \phi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi} \quad (8)$$

که در آن

$$\nu = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}$$

حال تحت شرایط زیر می توان مسئله حل ϕ (عرض ژئودتیک) بررسی نمود.

اگر $z=0$ ، معادله (۷) به $\sin \phi (p - \nu e^2 \cos \phi) = 0$ تبدیل می شود و بنابراین تنها جواب امکان پذیر آن

$(p > \nu e^2 \cos \phi)$ برابر است با $\phi=0$ ، زیرا $-\frac{1}{2} \pi \leq \phi \leq \frac{1}{2} \pi$. چنانچه تحت شرط $p > \nu e^2 \cos \phi$

، $\phi \neq 0$ ، آنگاه به ناچار $z \neq 0$. اگر $x=y=0$ و $z > 0$ ، آنگاه $p=0$ و معادله (۸) تبدیل به

می شود که تنها جواب امکان پذیر برای آن تحت شرط $z > -ve^2 \sin \phi$ $\cos \phi (z + ve^2 \sin \phi) = 0$ ، $\phi = \pi/2$ است و در صورتیکه $z < 0$ ، تنها جواب امکان پذیر $\phi = -\pi/2$ است. بنابراین تحت شرط $|z| > |ve^2 \sin \phi|$ ، اگر $\phi = \pm\pi/2$ باشد، آنگاه به ناچار داریم: $x \neq y \neq 0$.

از شرایط فوق می توان نتیجه گرفت که جواب های ϕ در داخل منطقه کروی با شعاع ve^2 به مرکز بیضوی (O) یکتا نخواهند بود. بنابراین می توان با اضافه نمودن یک کران پایین برای ارتفاع h به صورت $h \geq -5000 m$ از ابهامات احتمالی در جواب های ϕ اجتناب نمود. با استفاده از معادلات (۴)، (۶)، (۷) و آخرین معادله (۲)، تبدیل مختصات کارتیزین (X, Y, Z) به مختصات ژئودتیک (ϕ, λ, h) توسط روابط زیر انجام پذیر خواهد بود.

$$\lambda = \begin{cases} \frac{1}{2} \pi (1 - \operatorname{sgn}(x)) \operatorname{sgn}(y) + \operatorname{sgn}(x) \arcsin \frac{y}{p} \\ \operatorname{sgn}(y) \arccos \frac{x}{p} \end{cases} \quad (۹)$$

$$p \tan \phi = z + ve^2 \sin \phi$$

$$h = \frac{p}{\cos \phi} - v$$

مشاهده می شود در حالیکه λ به سادگی از روابط بالا محاسبه می شود، اما روابط آسانی برای تبدیل X, Y, Z به ϕ وجود ندارد و به دنبال آن برای h هم موضوع ساده نیست. در واقع در هر دو طرف معادله ϕ وجود دارد و کار تبدیل را کمی با مشکل مواجه کرده است. روش های مختلفی برای محاسبه ϕ ارائه شده است که به دو دسته کلی جواب های مستقیم و جواب های تکراری تقسیم می شوند. برای حل مستقیم ϕ نیاز به تشکیل معادلات درجه ۴ می باشد که قابل تبدیل به معادلات درجه ۲ با یک ریشه حقیقی تنها می باشند.

بر خلاف جواب های مستقیم، جواب های تکراری عموماً ساده تر هستند و در صورتی که نقاط مورد نظر به اندازه کافی به بیضوی نزدیک باشند ($-5000 m \leq h \leq 10000 m$) به ندرت از دو تکرار تجاوز

می کنند. روش های تکراری به دو گروه تبدیل می شوند: (۱) روش های مثلثاتی که با روابط مثلثاتی درگیر می شوند و (۲) روش های برداری که با روابط برداری سروکار دارند.

روش های تکراری نسبت به روش های مستقیم معمولاً به برنامه نویسی ساده تری نیاز دارند و بنابراین به عملیات کمتری برای مقدار دهی به عبارات جذری، نمایی و مثلثاتی نیاز دارند. در واقع مقدار دهی ها زمان محاسبات را در رایانه ها بالا می برد و باعث کند شدن محاسبات و تبدیل موقعیت ها می شود. بنابراین روش های تکراری برای حل Φ اغلب سریعتر از روش های مستقیم هستند.

در این بخش به ارائه چهار روش مختلف برای تبدیل (x, y, z) به (φ, λ, h) می پردازیم:

- روش جایگذاری دنباله ای

- روش تکرار Newton-Raphson

- روش Bowring

- روش Lin and Wang

روش جایگذاری دنباله ای

برای برنامه نویسی، این روش بسیار ساده بوده و به همین خاطر هم مشهور است. اساس این روش معادله دوم از (۹) می باشد.

$$p \tan \phi = z + \nu e^2 \sin \phi \quad (10)$$

با قرار دادن یک مقدار تقریبی φ_0 در سمت راست معادله (۱۰) به یک مقدار جدیدتر برای φ در سمت چپ می رسیم (φ_1). مقدار جدید φ_1 را مجدداً در سمت راست معادله قرار داده و سپس به مقدار جدیدتر φ_2 دست می یابیم. این روند تا زمانی که اختلاف بین مقادیر دنباله ای φ_n و φ_{n+1} در سمت چپ معادله به یک حد قابل قبول برسد، تکرار می شود. این روش تحت شرایطی به یک جواب واحد برای φ همگرا خواهد شد.

برای شروع تکرار، مقدار تقریبی φ_0 را می توان از رابطه بین عرض ژئودتیک و عرض ژئوستریک به دست آورد.

$$(1 - f)^2 \tan \phi_0 = \tan \theta \simeq \frac{z}{p}$$

$$\tan \phi_0 = \frac{z}{p(1 - f)^2} \quad (11)$$

روش تکرار Newton-Raphson

سرعت همگرایی برای φ در روش جایگذاری دنباله ای را می توان با استفاده از روش تکرار Newton-Raphson برای حل ریشه های حقیقی معادله $f(\varphi) = 0$ در قالب یک معادله تکراری بهبود داد.

$$\phi_{n+1} = \phi_n - \frac{f(\phi_n)}{f'(\phi_n)} \quad (12)$$

که در آن n بیانگر تکرار n ام و $f(\varphi)$ با توجه به معادله (۹) عبارت است از:

$$f(\phi) = z + ve^2 \sin \phi - p \tan \phi \quad (13)$$

مشتق $f'(\varphi) = \frac{d}{d\varphi} \{f(\varphi)\}$ نیز با رابطه زیر معرفی می شود.

$$f'(\phi) = ve^2 \cos \phi + e^2 \sin \phi \frac{dv}{d\phi} - \frac{p}{\cos^2 \phi} \quad (14)$$

با توجه به $v = \frac{c}{V}$ و یادآوری $\frac{dV}{d\phi} = -\frac{e'^2}{V} \cos\phi \sin\phi$ and $V^2 = 1 + e'^2 \cos^2\phi$ خواهیم داشت:

$$\frac{dv}{d\phi} = -\frac{c}{V^2} \frac{dV}{d\phi} = \frac{c}{V^3} e'^2 \cos\phi \sin\phi \quad (15)$$

با جایگذاری (15) در (14) به رابطه زیر می رسیم.

$$\begin{aligned} f'(\phi) &= e^2 \cos\phi \left\{ \frac{c}{V} + \frac{ce'^2 \sin^2\phi}{V^3} \right\} - \frac{p}{\cos^2\phi} \\ &= \frac{c}{V^3} e^2 \cos\phi (V^2 + e'^2 - e'^2 \cos^2\phi) - \frac{p}{\cos^2\phi} \\ &= \frac{c}{V^3} e^2 \cos\phi (V^2 + e'^2 + 1 - V^2) - \frac{p}{\cos^2\phi} \\ &= \frac{c}{V^3} e^2 \cos\phi (1 + e'^2) - \frac{p}{\cos^2\phi} \end{aligned} \quad (16)$$

با توجه به $1 + e'^2 = \frac{e'^2}{e^2}$ می توان معادله (16) را به صورت زیر نوشت.

$$f'(\phi) = \frac{c}{V^3} e'^2 \cos\phi - \frac{p}{\cos^2\phi} \quad (17)$$

همچنین با توجه به $1 + e'^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{a^2}$ ، معادله (16) به صورت زیر نوشته می شود.

$$f'(\phi) = \frac{c^3}{a^2 V^3} e^2 \cos\phi - \frac{p}{\cos^2\phi} \quad (18)$$

با استفاده از معادله (۱۱) می توان یک مقدار تقریبی φ_0 تعیین نمود و تا رسیدن به یک مقدار کوچک قابل قبول برای عامل تصحیح زیر در معادله (۱۲)، تکرار را ادامه داد.

روش Bowring

این روش نیز یکی از روش های تکراری به حساب می آید، اما معمولا به شرط اینکه ارتفاع نقاط محدود به $-5000 m \leq h \leq 10000 m$ باشد، تکرار دوم و سوم مورد نیاز نمی باشد. رابطه مورد استفاده در این روش عبارت است از:

$$\tan \phi = \frac{z + be'^2 \sin^3 \psi}{p - ae^2 \cos^3 \psi} \quad (19)$$

با در نظر داشتن رابطه $\tan \psi = (1 - f) \tan \phi$ و تلاقی آن با معادله (۱۹) می توان به طور همزمان ψ و ϕ را به صورت تکراری به دست آورد. با جایگذاری دنباله ای می توان یک مقدار اولیه ψ_0 از رابطه بین عرض ژئوسنتریک و عرض پارامتریک به صورت زیر تعیین نمود.

$$(1 - f) \tan \psi_0 = \tan \theta \simeq \frac{z}{p} \quad (20)$$

$$\tan \psi_0 = \frac{z}{p(1 - f)}$$

Bowring نشان داده است که برای نقاط محدود به سطح زمین $(-5000 m \leq h \leq 10000 m)$ ، حداکثر خطا در ϕ تنها ناشی از یک بار تکرار حدود "0.00000003 است. برای نقاط واقع در فضا که $h > 10000 m$ ، شاید نیاز به تکرارهای دوم و سوم نیز باشد. این تکرارها با استفاده از

جایگذاری دنباله ای، یعنی محاسبه یک مقدار جدید برای عرض پارامتریک ψ از $\tan \psi - (1 - f) \tan \phi$ و بکارگیری آن در سمت راست معادله (۱۹) برای رسیدن به یک مقدار بهبود یافته از ϕ انجام می شود. این فرآیند تا زمانی که اختلاف بین مقادیر دنباله ای ϕ_n و ϕ_{n+1} در سمت چپ معادله به حد قابل قبول برسد، ادامه می یابد.

روش Lin and Wang

این روش تکراری زیبا از تکرار Newton-Raphson برای ضریب اسکالر q مربوط به بردار قائم بر بیضوی استفاده می کند. به محض اینکه q به دست می آید، از روابط ساده بین مختصات کارتیزین P ، و تصویر قائم آن Q بر روی بیضوی، برای تعیین مختصات کارتیزین Q استفاده می شود. بنابراین با توجه به $\tan \theta \simeq \frac{z_Q}{p_Q} = \frac{z_Q}{\sqrt{x_Q^2 + y_Q^2}}$ و به کمک رابطه زیر می توان به مقدار عرض ژئودتیک ϕ رسید.

$$\frac{z_Q}{\sqrt{x_Q^2 + y_Q^2}} = (1 - f)^2 \tan \phi$$

تبدیل مختصات ژئودتیک (ϕ, λ, h) بین دو بیضوی

گاهی اوقات ما نیاز داریم از یک سطح مبنای ژئودتیک $G1$ به یک سطح مبنای ژئودتیک دیگر مانند $G2$ جابجا شویم. از آنجا که پارامترهای دو بیضوی متفاوت هستند، لذا مختصات هر نقطه دلخواه نیز در این دو بیضوی متفاوت خواهند بود و ما باید بتوانیم تبدیل بین این دو را انجام دهیم. برای این موضوع دو روش زیر معرفی می شوند تا با بهره گیری از آنها بتوانیم این تبدیل را انجام دهیم.

روش تکرار

فرض می کنیم مختصات ژئودتیک یک نقطه در دو بیضوی به صورت $(\phi_1, \lambda_1, h_1)_{G1}$ و $(\phi_2, \lambda_2, h_2)_{G2}$ داده شده باشند. با داشتن پارامترهای دو بیضوی به ترتیب به صورت

$(a_2, f_2, x_{02}, y_{02}, z_{02})$ و $(a_1, f_1, x_{01}, y_{01}, z_{01})$ به ترتیب زیر می توان از مختصات $(\varphi_1, \lambda_1, h_1)$ به $(\varphi_2, \lambda_2, h_2)$ یا بر عکس رسید.

۱- تبدیل مختصات ژئودتیک $(\varphi_1, \lambda_1, h_1)_{G1}$ به مختصات کارترین $(x_1, y_1, z_1)_{G1}$

۲- تبدیل مختصات کارترین $(x_1, y_1, z_1)_{G1}$ از دستگاه ژئودتیک اول به مختصات کارترین

$(x, y, z)_{CT}$ در دستگاه زمینی قراردادی (CT)

۳- تبدیل مختصات کارترین $(x, y, z)_{CT}$ از دستگاه زمینی قراردادی (CT) به مختصات کارترین

$(x_2, y_2, z_2)_{G2}$ در دستگاه ژئودتیک دوم

۴- تبدیل مختصات کارترین $(x_2, y_2, z_2)_{G2}$ به مختصات ژئودتیک $(\varphi_2, \lambda_2, h_2)_{G2}$ (تکرار)

روش دیفرانسیلی

پایه این روش بر کم بودن اختلاف مختصات یک نقطه در دو بیضوی مختلف است. در واقع اختلاف

مختصات $(d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1, d\lambda = \lambda_2 - \lambda_1, dh = h_2 - h_1)$ دیفرانسیلی فرض می شود.

از رابطه تبدیل مختصات ژئودتیک به زمینی قراردادی (CT) به صورت زیر استفاده می کنیم.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{CT} = \begin{bmatrix} (v+h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (v+h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(v \frac{b^2}{a^2} + h \right) \sin \varphi \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_{CT}$$

چنانچه از رابطه فوق نسبت به ۸ پارامتر $(d\varphi, d\lambda, dh, da, df, dx_0, dy_0, dz_0)$ دیفرانسیل گیری

شود به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial h} & \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial f} & \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} & \frac{\partial h}{\partial h} & \frac{\partial a}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial f} & \frac{\partial x_0}{\partial x_0} & \frac{\partial y_0}{\partial y_0} & \frac{\partial z_0}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} & \frac{\partial h}{\partial h} & \frac{\partial a}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial f} & \frac{\partial x_0}{\partial x_0} & \frac{\partial y_0}{\partial y_0} & \frac{\partial z_0}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \lambda}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial a}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial x_0}{\partial z} & \frac{\partial y_0}{\partial z} & \frac{\partial z_0}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} & \frac{\partial h}{\partial h} & \frac{\partial a}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial f} & \frac{\partial x_0}{\partial x_0} & \frac{\partial y_0}{\partial y_0} & \frac{\partial z_0}{\partial z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \\ da \\ df \\ dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در رابطه فوق مجهولات ما $d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ، $d\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ و $dh = h_2 - h_1$ و سایر عناصر معلوم هستند. رابطه فوق را می توان به صورت ساده تر زیر نمایش داد.

$$\underline{J} \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{bmatrix} + \underline{K} \begin{bmatrix} da \\ df \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجهولات دیفرانسیلی را می توان از رابطه زیر به دست آورد.

$$\begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \left[-\underline{K} \begin{bmatrix} da \\ df \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{bmatrix} \right]$$

عناصر مشتقات جزئی در کتاب های مرجع موجود است و مقادیر عددی آنها را می توان با در نظر گرفتن

پارامترهای بیضوی اول به دست آورد. به عنوان مثال بر اساس کتاب Geodesy the Concepts

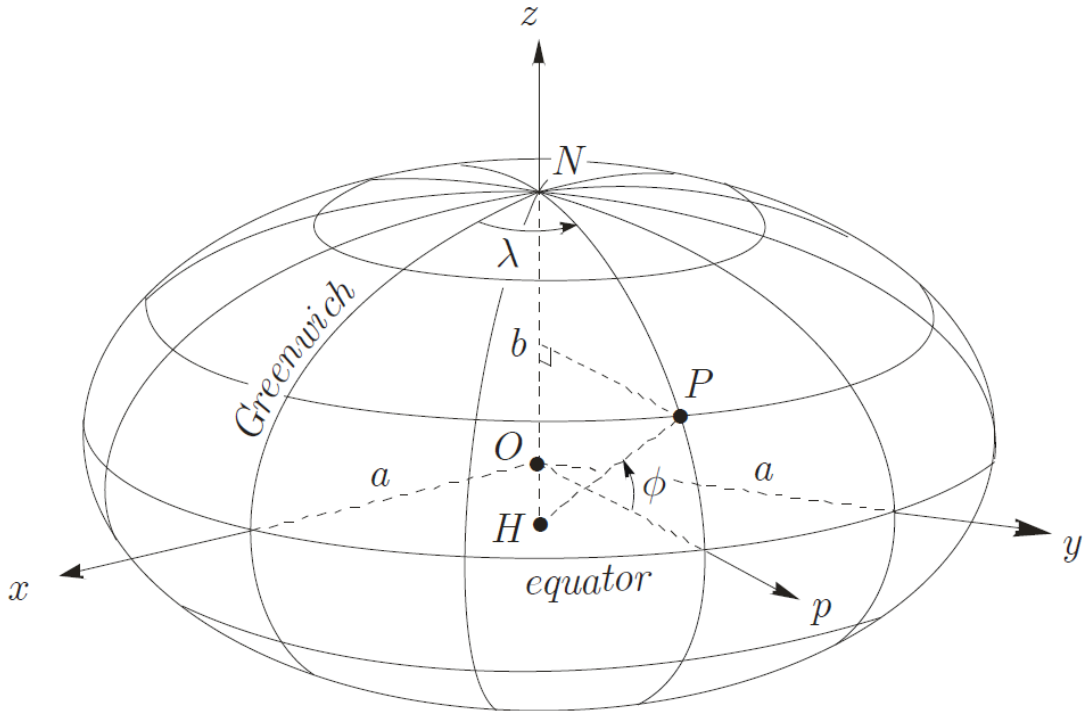
عناصر ماتریس های \underline{J} و \underline{K} عبارتند از:

$$\underline{J} \doteq \begin{bmatrix} -a \sin \varphi \cos \lambda & -a \cos \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ -a \sin \varphi \sin \lambda & a \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ a \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$\underline{K} \doteq \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda & a \sin^2 \varphi \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda & a \sin^2 \varphi \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi & a(\sin^2 \varphi - 2) \sin \varphi \end{bmatrix}$$

فصل ۵

بیضوی مرجع زمین



نگاره ۱- بیضوی مرجع

در ژئودزی، بیضوی یک سطح دورانی ناشی از چرخش یک بیضی (که نیم قطر های بزرگ و کوچک آن به ترتیب a و b به شرط $a > b$ هستند) حول محور کوچکش می باشد. دستگاه مختصات منحنی الخط λ و ϕ متشکل از یک مجموعه منحنی های پارامتریک متعامد روی سطح است که موازی با مدارات با عرض های جغرافیایی ϕ و نصف النهارات λ نسبت به صفحه های مرجع استوا و نصف النهار گرینویچ هستند. نصف النهارات از 0° تا $\pm 180^\circ$ نسبت به نصف النهار گرینویچ اندازه گیری می شوند (شرق مثبت و غرب منفی)، و عرض های جغرافیایی از 0° تا $\pm 90^\circ$ نسبت به استوا اندازه گیری می شوند (شمال مثبت و جنوب منفی). مبدا دستگاه مختصات کارترین x, y, z در O (مرکز بیضوی) و محور z آن منطبق بر محور کوچک بیضوی یا محور دورانی است. صفحه xOz همان صفحه نصف النهار گرینویچ (مبدا نصف النهارات) و صفحه xOy همان صفحه استوا است. محور مثبت x از تقاطع نصف النهار گرینویچ و استوا، محور مثبت y در زاویه 90°

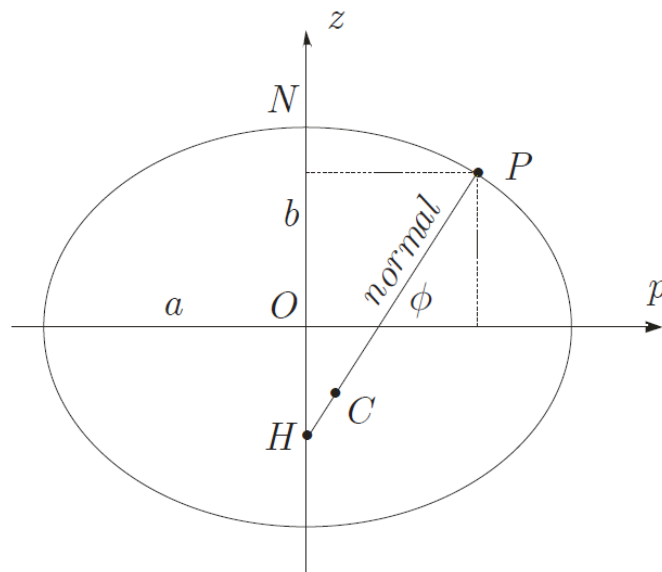
به سمت شرق در صفحه استوا و محور مثبت Z از قطب شمال بیضوی می گذرد. بنابراین معادله کارترین بیضوی را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad 1$$

که در آن a و b به ترتیب نیم قطر های بزرگ و کوچک و $a > b$. تمام نصف النهارات روی بیضوی، بیضی با نیم قطر های a و b به شرط $a > b$ هستند. زیرا تمام صفحات نصف النهاری، یعنی صفحه نصف النهار گرینویچ xOz و صفحه نصف النهاری pOz (شامل P)، در برگیرنده محور z بیضوی هستند و منحنی های تقاطع شان بیضی هستند (صفحه های قطع کننده بیضوی منحنی های تقاطع را بر روی آن ایجاد می کنند). اگر در نظر بگیریم که $p^2 = x^2 + y^2$ ، آنگاه معادله بیضی نصف النهار به صورت زیر در می آید.

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (a > b) \quad 2$$

در نگاره ۲، ϕ عرض ژئودتیک نقطه P است (زاویه بین استوا و قائم بر بیضی)، C مرکز انحنا و PC شعاع انحنا بیضی نصف النهاری در نقطه P است. H محل تقاطع قائم در نقطه P و محور z (محور دورانی) است.



نگاره ۲- بیضی نصف النهار

تمام عرض های جغرافیایی روی یک بیضوی مرجع، دایره هایی هستند که از تقاطع بیضوی با صفحه های موازی با صفحه استوایی xOy ایجاد شده اند. با قرار دادن یک ثابت مانند C به جای z در معادله (۱)، یک معادله جدید برای دایره های مداری به صورت زیر به دست می آید.

$$x^2 + y^2 = a^2 \left(1 - \frac{C^2}{b^2} \right) = p^2 \quad \left(0 \leq C \leq b; a > b \right) \quad ۳$$

تمام منحنی های دیگر روی سطح بیضوی که از تقاطع بیضوی با یک صفحه ایجاد می شوند، همگی بیضی هستند. این موضوع می تواند با استفاده از یک مجموعه دیگر از مختصات X', Y', Z' که بوسیله دوران مختصات های X, Y, Z به دست می آیند، نشان داده شود.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{where} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه ماتریس دوران \mathbf{R} متعامد است، بنابراین $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ و می توان روابط زیر را نوشت.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

با بسط رابطه فوق می توان روابط زیر را به دست آورد.

$$\begin{aligned} x^2 &= r_{11}^2 x'^2 + r_{21}^2 y'^2 + r_{31}^2 z'^2 + 2r_{11}r_{21}x'y' + 2r_{11}r_{31}x'z' + 2r_{21}r_{31}y'z' \\ y^2 &= r_{12}^2 x'^2 + r_{22}^2 y'^2 + r_{32}^2 z'^2 + 2r_{12}r_{22}x'y' + 2r_{12}r_{32}x'z' + 2r_{22}r_{32}y'z' \\ z^2 &= r_{13}^2 x'^2 + r_{23}^2 y'^2 + r_{33}^2 z'^2 + 2r_{13}r_{23}x'y' + 2r_{13}r_{33}x'z' + 2r_{23}r_{33}y'z' \\ x^2 + y^2 &= (r_{11}^2 + r_{12}^2) x'^2 + (r_{21}^2 + r_{22}^2) y'^2 + (r_{31}^2 + r_{32}^2) z'^2 + 2(r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22}) x'y' \\ &\quad + 2(r_{11}r_{31} + r_{12}r_{32}) x'z' + 2(r_{21}r_{31} + r_{22}r_{32}) y'z' \end{aligned}$$

با جایگذاری روابط فوق در معادله (۱)، معادله بیضوی بر حسب مختصات های X' ، Y' ، Z' به صورت زیر به دست خواهد آمد.

$$\frac{1}{a^2} \left\{ (r_{11}^2 + r_{12}^2) x'^2 + (r_{21}^2 + r_{22}^2) y'^2 + (r_{31}^2 + r_{32}^2) z'^2 + 2(r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22}) x'y' \right. \\ \left. + 2(r_{11}r_{31} + r_{12}r_{32}) x'z' + 2(r_{21}r_{31} + r_{22}r_{32}) y'z' \right\} \quad ۴ \\ + \frac{1}{b^2} \{ r_{13}^2 x'^2 + r_{23}^2 y'^2 + r_{33}^2 z'^2 + 2r_{13}r_{23} x'y' + 2r_{13}r_{33} x'z' + 2r_{23}r_{33} y'z' \} = 1$$

چنانچه در معادله (۴)، با در نظر گرفتن یک ثابت C_1 و $Z' = C_1$ ، آنگاه معادله منحنی ایجاد شده بوسیله تقاطع یک صفحه متمایل با بیضوی به صورت زیر است.

$$\left\{ \frac{r_{11}^2 + r_{12}^2}{a^2} + \frac{r_{13}^2}{b^2} \right\} x'^2 + 2 \left\{ \frac{r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22}}{a^2} + \frac{r_{13}r_{23}}{b^2} \right\} x'y' + \left\{ \frac{r_{21}^2 + r_{22}^2}{a^2} + \frac{r_{23}^2}{b^2} \right\} y'^2 \quad ۵ \\ + \{ 2C_1 (r_{11}r_{31} + r_{12}r_{32} + r_{13}r_{33}) \} x' + \{ 2C_1 (r_{21}r_{31} + r_{22}r_{32} + r_{23}r_{33}) \} y' \\ = 1 - C_1^2 \{ r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 \}$$

معادله فوق را می توان به صورت زیر نمایش داد.

$$Ax'^2 + 2Hx'y' + By'^2 + Dx' + Ey' + F = 1 \quad ۶$$

که در آن می توان نشان داد $AB - H^2 > 0$. بنابراین رابطه فوق بیانگر معادله کارتیزین عمومی یک بیضی است که مرکز آن دارای یک اختلاف با مبدا مختصات و یک دوران نسبت به محورهای مختصات می باشد. با در نظر گرفتن ثابت های C_2 و C_3 و $x' = C_2$ و $y' = C_3$ ، معادلات مشابهی به دست می آیند که در حالت کلی می توانیم بگوییم صفحه های مایل قطع کننده بیضوی، منحنی هایی بر روی بیضوی ایجاد می کنند که همگی بیضی هستند. از آنجا که بیضوی یک سطح ناشی از دوران یک بیضی حول محور کوچک آن است، بنابراین یک بیضوی می تواند به طور کامل با معرفی یک زوج از پارامترهای تولید کننده بیضی تعریف شوند:

- (a, b) نیم قطر های بزرگ و کوچک، یا
- (a, e^2) نیم قطر بزرگ و مربع خروج از مرکزی اول، یا

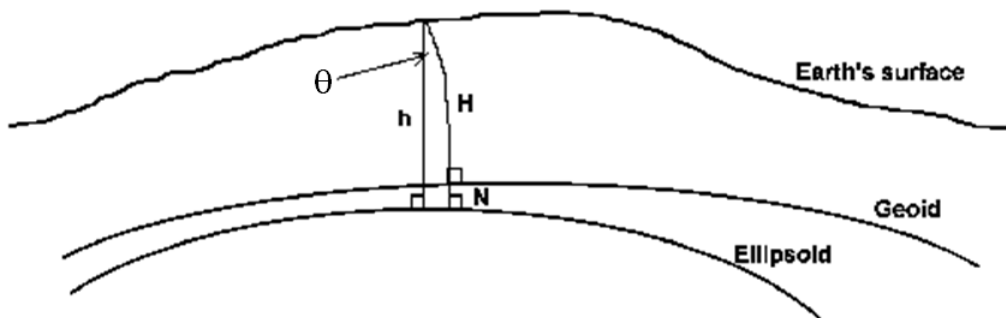
• (a, f) نیم قطر بزرگ و فشردهگی.

a و b و e^2 پارامترها یا ثابت های بیضوی هستند که چیزی جز پارامترها یا ثابت های بیضی که قبلا تعریف شده بودند، نیستند. البته پارامترهای دیگری مانند c ، e'^2 و n نیز برای تشریح و توسعه بیشتر مفید هستند. همچنین عرض های مختلف φ ، ψ و θ مربوط به نقطه P روی یک بیضی دقیقا برای P روی یک بیضوی یکسان هستند.

بیضوی به عنوان یک سطح مبنا

همانطور که قبلا گفته شد، ژئوئید یک سطح نسبتا بی هنجار است و بنابراین نمی تواند به عنوان یک سطح مبنای مسطحاتی مفید برای انجام محاسبات تعیین موقعیت در نظر گرفته شود. به همین دلیل در ژئودزی از بیضوی های مبنا که یک سطح دورانی ناشی از چرخش یک بیضی حول محور کوچکش است، استفاده می-شود. بیضوی های مختلف با ویژگی های هندسی خاص به روش های معینی تعیین می شوند که ممکن است ژئوئید جهانی یا ژئوئید محلی را تقریب نمایند. در صورتیکه بیضوی ها ژئوئید جهانی را تقریب کنند به آنها بیضوی های جهانی (مطلق) یا زمین مرکز گویند و در صورتیکه ژئوئید محلی را تقریب کنند به آنها بیضوی های محلی (نسبی) گویند. اندازه و شکل بیضوی ها به سادگی از نظر ریاضی مشخص می شوند و برای محاسبات تعیین موقعیت سطوح ساده ای هستند.

به کمک اندازه گیری ها مختلف کلاسیک مانند طول ها، زوایا، اختلاف ارتفاعات و مشاهدات ماهواره ای مانند GPS که بر روی نقاط کنترل انجام می شوند، امکان تعیین مشخصات هندسی بیضوی های مبنا بوجود می آید. اساس تعیین بیضوی های مختلف نزدیکی (جهانی یا محلی) آنها به ژئوئید است. اختلاف بین ژئوئید و بیضوی با دو پارامتر ارتفاع ژئوئید (N) به عنوان جدایی بین ژئوئید و بیضوی در هر نقطه و زاویه انحراف قائم (θ) به عنوان شیب بین ژئوئید و بیضوی در هر نقطه (نگاره ۳) بیان می شود. همواره تلاش می شود این دو پارامتر به ترتیب کمتر از ۱۰۰ متر و ۵ ثانیه در تمام نقاط واقع در سطح زمین باشند.



نگاره ۳- ارتفاع ژئوئید و زاویه انحراف قائم

پارامترهای مشخص کننده یک بیضوی

در یک فضای سه بعدی هر جسم مانند بیضوی نسبت به جسم دیگری مانند زمین دارای ۶ درجه آزادی است. در واقع برای تثبیت موقعیت بیضوی نسبت به زمین باید ۶ پارامتر را تعیین نمود. از طرف دیگر بیضوی زمین یک فرم هندسی دو پارامتری است و شکل و ابعاد آن با دو پارامتر مشخص می شود. بنابراین در مجموع ۸ پارامتر برای تعیین یک بیضوی مرجع زمین مورد نیاز می باشد.

در عمل دو دسته پارامترهای مشخص کننده برای بیضوی مرجع وجود دارد. دسته اول، پارامترهای متناسب به مرکز بیضوی هستند که شامل ۳ پارامتر انتقال، ۳ پارامتر دوران و ۲ پارامتر شکل و اندازه بیضوی هستند. این پارامترها اصطلاحاً زمین مرکز اطلاق می شوند. با در نظر گرفتن دو دستگاه سه بعدی زمینی و ژئودتیک و تبدیل بین آنها، می توان به کمک این دسته پارامترها موقعیت و وضعیت یک بیضوی را نسبت به زمین مشخص نمود. دسته دوم، پارامترهای متناسب به نقطه ای در سطح زمین موسوم به نقطه اولیه بیضوی هستند که شامل ۲ پارامتر موقعیت، ارتفاع ژئوئید، دو مولفه انحراف قائم و اختلاف آزیموت نجومی و ژئودتیک برای نقطه اولیه بر روی بیضوی و ۲ پارامتر شکل و اندازه بیضوی هستند. این پارامترها اصطلاحاً توپوستریک اطلاق می شوند.

جدول ۱- تعدادی از بیضوی های مرجع با پارامترهای هندسی

Ellipse	Semi-Major Axis (meters)	1/Flattening
Airy 1830	6377563.396	299.3249646
Bessel 1841	6377397.155	299.1528128
Clarke 1866	6378206.4	294.9786982
Clarke 1880	6378249.145	293.465
Everest 1830	6377276.345	300.8017
Fischer 1960 (Mercury)	6378166.0	298.3
Fischer 1968	6378150.0	298.3
G R S 1967	6378160.0	298.247167427
G R S 1975	6378140.0	298.257
G R S 1980	6378137.0	298.257222101
Hough 1956	6378270.0	297.0
International	6378388.0	297.0
Krassovsky 1940	6378245.0	298.3
South American 1969	6378160.0	298.25
WGS 60	6378165.0	298.3
WGS 66	6378145.0	298.25
WGS 72	6378135.0	298.26
WGS 84	6378137.0	298.257223563

ایجاد یک بیضوی

بر پایه پارامترهای مشخص کننده بیضوی، می توان دو روش برای ایجاد یک بیضوی در نظر گرفت. در جدول ۱ تعدادی از بیضوی مرجع با پارامترهای هندسی ذیربط معرفی شده اند.

• ایجاد یک بیضوی با پارامترهای ژئوسنتریک

با انتخاب دستگاه مختصات زمینی CT به عنوان یک دستگاه زمین چسب و دستگاه مختصات ژئودتیک G و با فرض وجود شبکه ای از نقاط کنترل در سرتاسر زمین، می توان به کمک روش کمترین مربعات به یک بیضوی مرجع رسید که تامین کننده شروط زیر به عنوان بهترین و نزدیکترین بیضوی به ژئوئید باشد.

$$\min_f \iint_S (\xi^2 + \eta^2) ds$$

$$\min_{a,f} \iint_S (N^2) ds$$

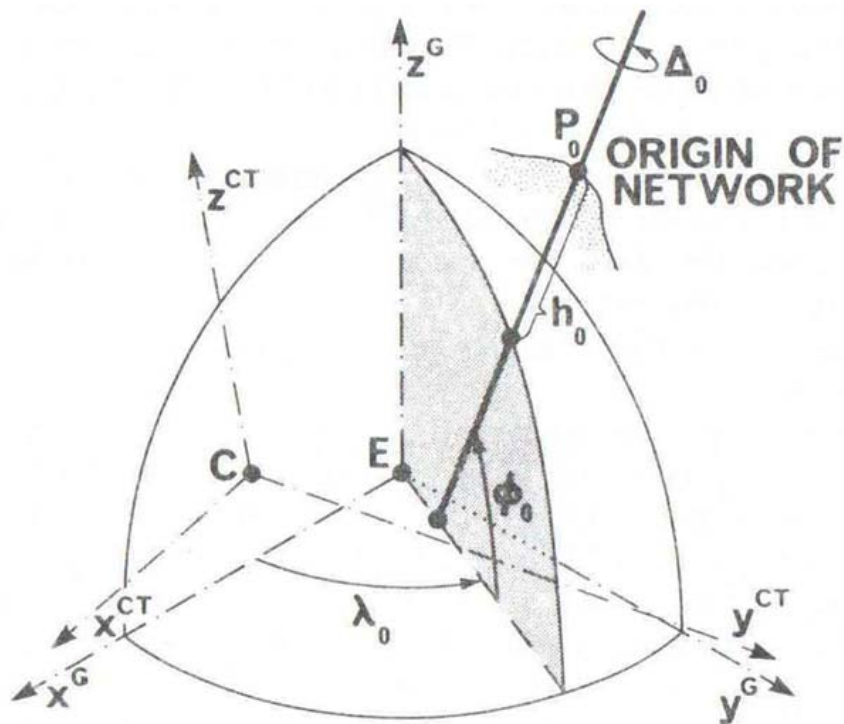
۸ پارامتر مورد استفاده در این روش عبارتند از $(a, f, x_0, y_0, z_0, \omega_x, \omega_y, \omega_z)$. البته تلاش بر این است تا حد امکان محورهای مختصات هر دو دستگاه بر هم منطبق یا حداقل موازی باشند.

• ایجاد یک بیضوی با پارامترهای توپوسنتریک

در این روش از دستگاههای مختصات نجومی محلی و ژئودتیک محلی در نقطه اولیه استفاده می شود (نگاره ۴). هشت پارامتر مورد استفاده در این روش عبارتند از $(a, f, \varphi_0, \lambda_0, N_0, \xi_0, \eta_0, \delta\alpha_0)$. پارامترهای مذکور باید به گونه ای تعیین شوند که مانند روش قبلی، به یک بیضوی مرجع رسید که تامین کننده شروط زیر باشد.

$$\min_f \iint_S (\xi^2 + \eta^2) ds$$

$$\min_{a,f} \iint_S (N^2) ds$$

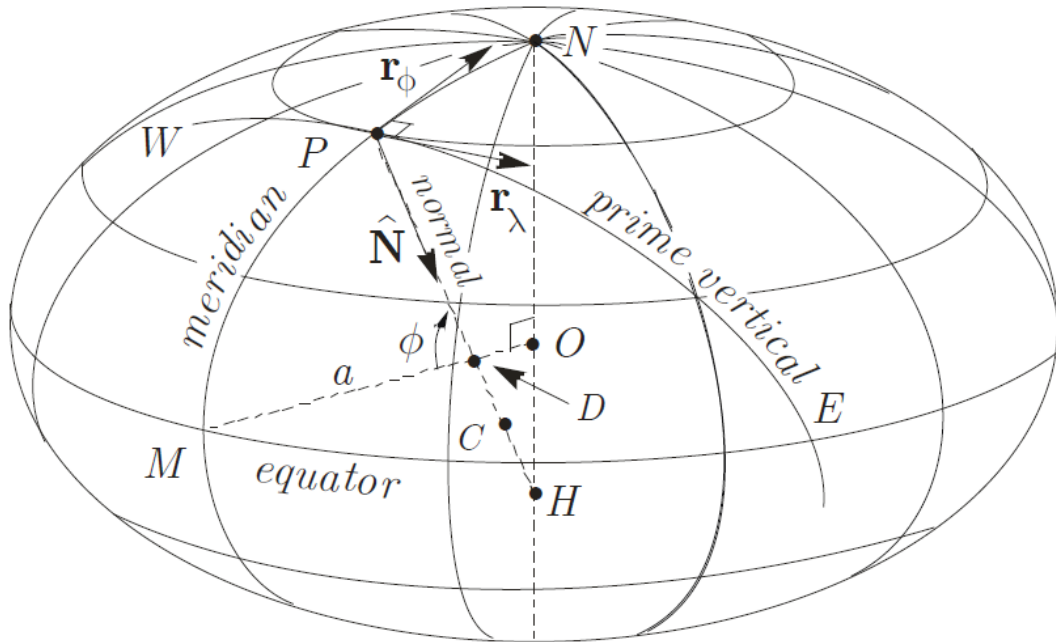


نگاره ۴- نقطه اولیه برای تعریف یک بیضوی

بدیهی است با توجه به اینکه برای ایجاد یک بیضوی جدید به اطلاعات قبلی در مورد اختلافات بین ژئوئید و بیضوی نیاز می باشد، لذا می توان ایجاد یک بیضوی را فرایندی ترمیمی در نظر گرفت که تنها با در اختیار داشتن یک بیضوی قبلی امکان پذیر است.

مقاطع قائم و شعاع های انحنای بیضوی

مطابق نگاره ۵ یک نقطه اختیاری مانند P بر روی یک بیضوی در نظر می گیریم. از قائم بر بیضوی در این نقطه (\hat{N}) بی نهایت صفحه می گذرد که به آنها صفحه های قائم می گوئیم. منحنی های حاصل از برخورد این صفحه ها با رویه بیضوی را مقاطع قائم می نامند. از بین این بی نهایت صفحه و مقطع قائم، دو صفحه و مقطع عمود بر هم وجود دارند که شعاع انحنای آنها در نقطه مذکور حداکثر و حداقل هستند. این دو صفحه و مقطع موسوم به مقاطع قائم اصلی هستند که یکی صفحه و مقطع قائم نصف النهاری (MPNO) با حداقل شعاع انحنای (ρ) و دیگری صفحه و مقطع قائم اولیه (WPEH) با شعاع انحنای حداکثر (ν) می باشد.



نگاره ۵- صفحه ها و مقطع های قائم اولیه و نصف النهاری

• شعاع انحنای نصف النهاری

قبلا در فصل ۳ شعاع انحنای نصف النهاری به صورت رابطه زیر به دست آمده است. به تغییرات این شعاع انحنای نسبت به عرض ژئودتیک توجه شود.

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{c}{V^3} \quad \gamma$$

• شعاع انحنای قائم اولیه

شعاع انحنای قائم اولیه نیز قبلا تحت عنوان طول قائم تا محور کوچک بیضی به صورت زیر به دست آمده است. به تغییرات این شعاع انحنای نسبت به عرض ژئودتیک و شرایط تساوی آن با شعاع انحنای نصف النهاری توجه شود.

$$\nu = \frac{x}{\cos \phi} = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} = \frac{a}{W} = \frac{c}{V} \quad \lambda$$

• شعاع انحنای در یک آزمایش اختیاری (شعاع انحنای اولر)

شعاع انحنای برای یک مقطع با آزمایش α بر روی بیضوی از رابطه زیر به دست می‌آید. اثبات این رابطه به عنوان تمرین به عهده دانشجو است.

$$\rho_\alpha = \frac{\rho\nu}{\rho \sin^2 \alpha + \nu \cos^2 \alpha} \quad 9$$

• شعاع انحنای متوسط گوس

یکی از شعاع‌های انحنای که در بسیاری از محاسبات ژئودزی کاربرد دارد، شعاع انحنای متوسط گوس است که دارای دقت کافی می‌باشد.

$$R = \sqrt{\rho\nu} \quad 10$$

برای اثبات رابطه فوق از شعاع انحنای اولر و مفهوم میانگین یک تابع () $f_{mean} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ به ترتیب زیر استفاده می‌شود.

$$\rho_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho_\alpha d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho\nu}{\rho \sin^2 \alpha + \nu \cos^2 \alpha} d\alpha \quad \text{since } 2\pi = 4 \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\rho_m = \frac{2\sqrt{\rho\nu}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \alpha \sqrt{\frac{\rho}{\nu}}}{1 + \frac{\rho}{\nu} \tan^2 \alpha} d\alpha$$

$$u = \tan \alpha \sqrt{\frac{\rho}{\nu}} \quad \text{then } du = \sec^2 \alpha \sqrt{\frac{\rho}{\nu}} d\alpha \quad \text{and } u^2 = \frac{\rho}{\nu} \tan^2 \alpha$$

$$\rho_m = \frac{2\sqrt{\rho\nu}}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1+u^2} du \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\rho_m = \frac{2\sqrt{\rho\nu}}{\pi} [\arctan u]_0^\infty = \frac{2\sqrt{\rho\nu}}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

$$\rho_m = \sqrt{\rho\nu}$$

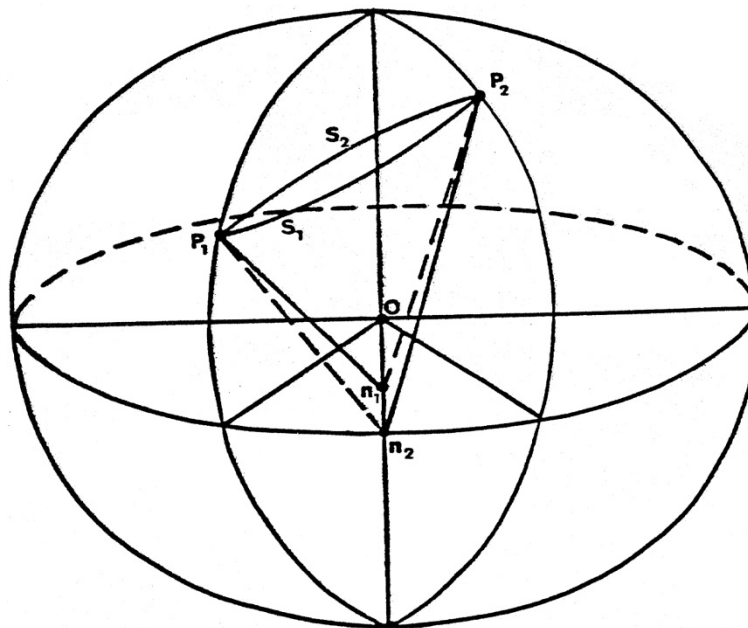
• شعاع انحنای مداری

هر مدار از استوا تا قطب های زمین با توجه به عرض ژئودتیک مربوط یک دایره است که شعاع آن موسوم به شعاع مداری از رابطه زیر به دست می آید.

$$R_{\varphi} = v \cos \varphi \quad ۱۱$$

مقاطع قائم مستقیم و معکوس

مطابق نگاره ۶، مقطع حاصل از برخورد صفحه قائم گذرنده از نقطه P1 (شامل قائم بر بیضوی در این نقطه) و نقطه P2 با رویه بیضوی مقطع قائم مستقیم و به طور مشابه مقطع حاصل از برخورد صفحه قائم گذرنده از نقطه P2 (شامل قائم بر بیضوی در این نقطه) و نقطه P1 با رویه بیضوی مقطع قائم معکوس نامیده می-شود. چنانچه دو نقطه P1 و P2 در عرض و طول ژئودتیک مختلف قرار بگیرند، مقاطع مستقیم و معکوس منطبق بر هم نیستند و این نکته باید در محاسبات و تصحیحات مربوط در نظر گرفته شود.



نگاره ۶- مقاطع قائم مستقیم و معکوس

زاویه بین مقاطع قائم مستقیم و معکوس از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$\Delta'' = \rho \left(\frac{1}{4} e^2 \sigma^2 \cos^2 \varphi_m \sin 2\alpha_{12} \right) \quad ۱۲$$

که در آن

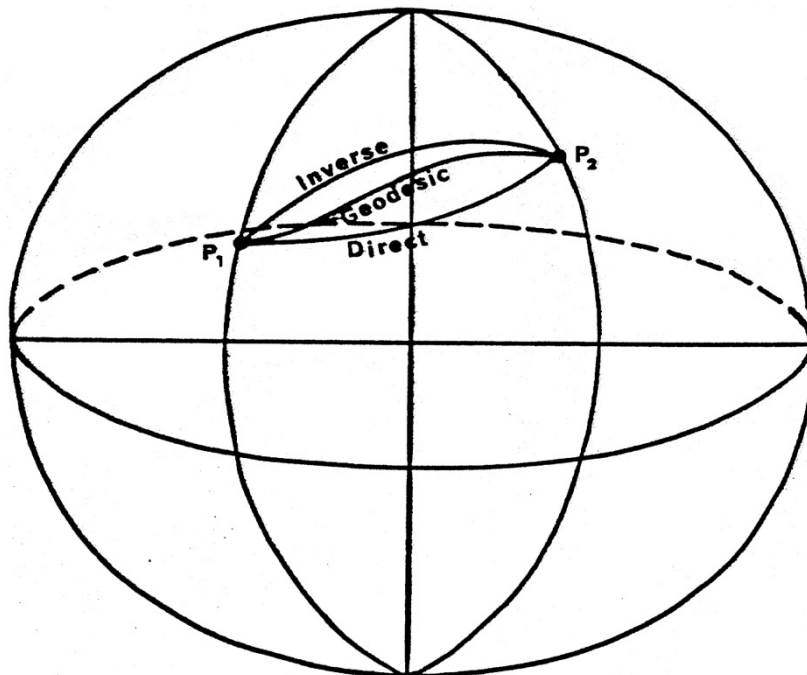
$$\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

$$\sigma \cong \frac{s}{u_m}$$

$$u_m = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

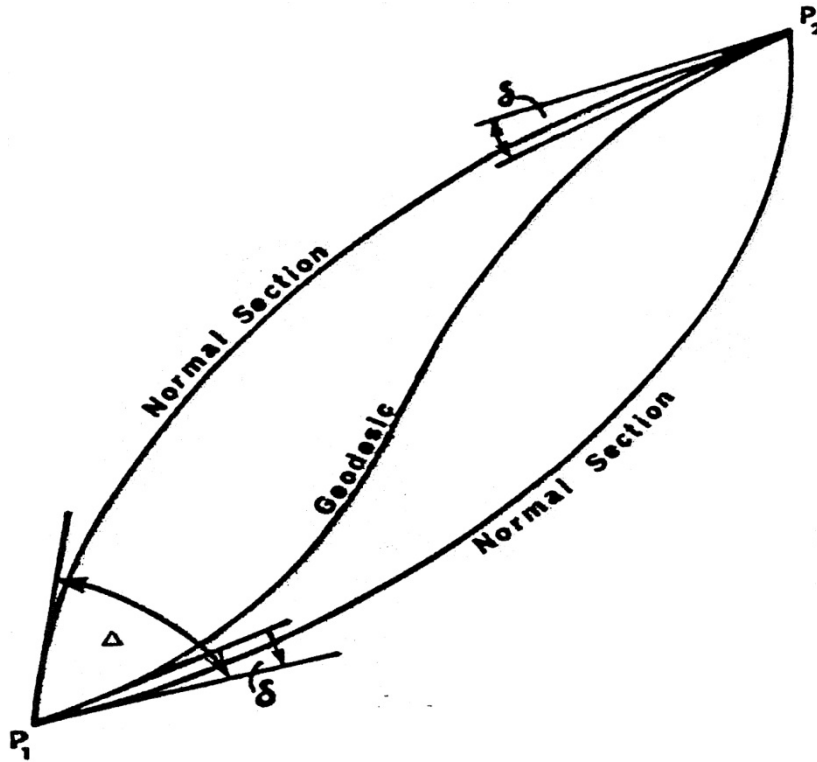
خم ژئودزیک

خم ژئودزیک در سطح بیضوی به یک منحنی واحد و یکه ای گفته می شود که دارای کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه دلخواه مانند P_1 و P_2 باشد و در هر نقطه آن بردار شعاع انحنای اصلی منحنی منطبق بر امتداد قائم بر بیضوی باشد (نگاره ۷).



نگاره ۷- خم ژئودزیک

اختلاف بین مقاطع قائم مستقیم و معکوس با خم ژئودزیک از دو منظر قابل بررسی است. یکی اختلاف زاویه و دیگری اختلاف طول است. مطابق نگاره ۸ و روابط زیر این اختلافات قابل بیان هستند.



نگاره ۸- اختلاف خم ژئودزیک با مقاطع قائم

$$\delta = \frac{\Delta}{3} \quad 13$$

$$\Delta s = \frac{ae^4}{360} \sin^2 2\alpha_{12} \cos^4 \varphi_m \sigma^5 \quad 14$$

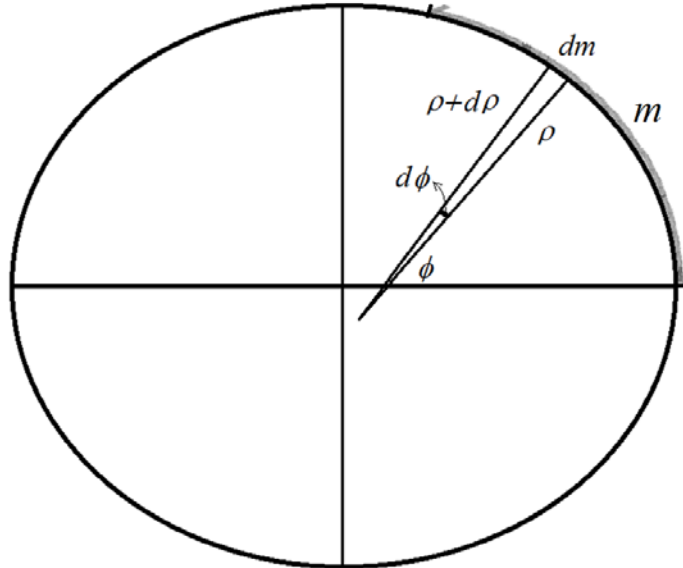
محاسبه طول نصف النهاری

طول کمان نصف النهاری یکی از کمیت‌های مهم و پر استفاده در محاسبات ژئودزی بویژه در تبدیل مختصات ژئودتیک به مختصات سیستم تصویر و بر عکس به حساب می آید و از این رو در این بخش مورد بحث قرار می گیرد. چنانچه m را به عنوان طول کمان نصف النهاری از استوا تا یک نقطه دلخواه در عرض ژئودتیک φ در نظر بگیریم، در این صورت طول کمان دیفرانسیلی آن (نگاره ۹) برابر خواهد بود با:

$$dm = \rho d\phi \quad 15$$

که در آن ρ شعاع انحنای نصف النهاری است و از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a(1-e^2)}{W^3}$$



نگاره ۹- طول کمان دیفرانسیلی نصف النهاری

طول نصف النهاری به عنوان سری از توان های e^2

با استفاده از معادله ۱۵ و رابطه شعاع انحنای نصف النهاری، می توان طول نصف النهاری را از انتگرال زیر به دست آورد.

$$m = \int_0^{\phi} \frac{a(1-e^2)}{W^3} d\phi = a(1-e^2) \int_0^{\phi} \frac{1}{W^3} d\phi = a(1-e^2) \int_0^{\phi} (1-e^2 \sin^2)^{-\frac{3}{2}} d\phi \quad ۱۶$$

انتگرال فوق به طور مستقیم نمی تواند انتگرال گیری شود، عبارت $\frac{1}{W^3} = (1-e^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{3}{2}}$ به صورت

یک سری بسط داده می شود و سپس به صورت جمله به جمله محاسبه می شود.

عبارت انتگرالی $\frac{1}{W^3} = (1-e^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{3}{2}}$ را می توان با استفاده از سری دو جمله ای زیر به یک سری

نامحدود بسط داد. این سری به نیوتن در سال ۱۶۷۶ نسبت داده می شود.

$$(1+x)^{\delta} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{\delta} x^n \quad ۱۷$$

که در آن n یک عدد صحیح مثبت، β عدد حقیقی و ضرایب دو جمله ای B_n^β به صورت زیر تعیین می شوند.

$$B_n^\beta = \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)\cdots(\beta-n+1)}{n!}$$

اگر شرط $-1 < x < 1$ برقرار باشد، سری دو جمله ای ۱۷ نیز همگرا خواهد بود. در صورتیکه $\beta = \frac{-3}{2}$ باشد، سری دو جمله ای ۱۷ به صورت زیر نوشته می شود.

$$(1+x)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{-\frac{3}{2}} x^n = B_0^{-\frac{3}{2}} x^0 + B_1^{-\frac{3}{2}} x^1 + B_2^{-\frac{3}{2}} x^2 + B_3^{-\frac{3}{2}} x^3 + \dots \quad 18$$

که ضرایب دو جمله ای $B_n^{-3/2}$ در آن به صورت زیر تعیین می شوند.

$$n = 0 \quad B_0^{-\frac{3}{2}} = 1$$

$$n = 1 \quad B_1^{-\frac{3}{2}} = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)}{1!} = -\frac{3}{2}$$

$$n = 2 \quad B_2^{-\frac{3}{2}} = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{2!} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}$$

$$n = 3 \quad B_3^{-\frac{3}{2}} = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)}{3!} = -\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

با توجه به نتایج فوق، می توان ضرایب دو جمله ای $B_n^{-3/2}$ را به صورت دنباله زیر نوشت.

$$1, -\frac{3}{2}, \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}, -\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}, -\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}, \dots$$

با استفاده از ضرایب فوق به رابطه زیر می رسیم.

$$\frac{1}{W^3} = (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \phi + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} e^4 \sin^4 \phi + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \sin^6 \phi + \dots$$

$$+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} e^8 \sin^8 \phi + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} e^{10} \sin^{10} \phi + \dots$$

حال برای ساده سازی بسط فوق از رابطه زیر برای $\sin^{2n} \phi$ استفاده می کنیم.

$$\sin^{2n} \phi = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \left\{ \binom{2n}{1} \cos 2n\phi - \binom{2n}{2} \cos(2n-2)\phi + \binom{2n}{3} \cos(2n-4)\phi - \binom{2n}{4} \cos(2n-6)\phi + \dots + (-1)^n \binom{2n}{n-1} \cos 2\phi \right\}$$

حال با توجه به ضرایب دو جمله ای $B_n^{2n} = \binom{2n}{n}$ می توان روابط زیر را برای $\sin^{2n} \phi$ تنظیم نمود.

$$\sin^2 \phi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\phi$$

$$\sin^4 \phi = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cos 4\phi - \frac{1}{2} \cos 2\phi$$

$$\sin^6 \phi = \frac{5}{16} - \frac{1}{32} \cos 6\phi + \frac{3}{16} \cos 4\phi - \frac{15}{32} \cos 2\phi$$

$$\sin^8 \phi = \frac{35}{128} + \frac{1}{128} \cos 8\phi - \frac{1}{16} \cos 6\phi + \frac{7}{32} \cos 4\phi - \frac{7}{16} \cos 2\phi$$

$$\sin^{10} \phi = \frac{63}{256} - \frac{1}{512} \cos 10\phi + \frac{5}{256} \cos 8\phi - \frac{45}{512} \cos 6\phi + \frac{15}{64} \cos 4\phi - \frac{105}{256} \cos 2\phi$$

با جایگذاری ۲۰ در معادله ۱۹ و مرتب سازی آن نسبت به $\cos 2\phi, \cos 4\phi, \dots$ به رابطه زیر می رسیم.

$$\frac{1}{W^3} = (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{3}{2}} = A - B \cos 2\phi + C \cos 4\phi - D \cos 6\phi + E \cos 8\phi - F \cos 10\phi + \dots$$

که در آن ضرایب A, B, C, \dots عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 A &= 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} + \dots \\
 B &= \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \frac{72765}{65536}e^{10} + \dots \\
 C &= \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \frac{10395}{16384}e^{10} + \dots \\
 D &= \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \frac{31185}{131072}e^{10} + \dots \\
 E &= \frac{315}{16384}e^8 + \frac{3465}{65536}e^{10} + \dots \\
 F &= \frac{693}{131072}e^{10} + \dots
 \end{aligned}$$

با جایگذاری معادله ۲۱ در معادله ۱۶، طول نصف النهاری به صورت زیر به دست می آید.

$$m = a(1 - e^2) \int_0^{\phi} \{A - B \cos 2\phi + C \cos 4\phi - D \cos 6\phi + E \cos 8\phi - F \cos 10\phi + \dots\} d\phi \quad 22$$

با انتگرال گیری جمله به جمله رابطه فوق و توجه به $\int_0^x \cos ax \, dx = \frac{\sin ax}{a}$ ، مقدار m را به عنوان طول کمان نصف النهاری از استوا تا یک نقطه دلخواه در عرض ژئودتیک ϕ به صورت زیر تعیین می شود.

$$m = a(1 - e^2) \left\{ A\phi - \frac{B}{2} \sin 2\phi + \frac{C}{4} \sin 4\phi - \frac{D}{6} \sin 6\phi + \frac{E}{8} \sin 8\phi - \frac{F}{10} \sin 10\phi + \dots \right\} \quad 23$$

که در آن عرض ژئودتیک ϕ بر حسب رادیان است و ضرایب A, B, C, \dots قبلا داده شده است. از رابطه ۲۳ می توان طول ربع کمان نصف النهاری (Q) یعنی از استوا تا قطب را به صورت زیر نمایش داد.

$$Q = a(1 - e^2) A \left(\frac{1}{2} \pi\right) \quad 24$$

معادله ۲۳ را می توان با ضرب ضرایب A, B, C, \dots در $(1 - e^2)$ به صورت زیر نیز نمایش داد.

$$m = a \{A_0\phi - A_2 \sin 2\phi + A_4 \sin 4\phi - A_6 \sin 6\phi + A_8 \sin 8\phi - A_{10} \sin 10\phi + \dots\} \quad 25$$

where $A_0 = (1 - e^2)A$, $A_2 = (1 - e^2)\frac{B}{2}$, $A_4 = (1 - e^2)\frac{C}{4}$, etc., and

$$A_0 = 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \frac{175}{16384}e^8 - \frac{441}{65536}e^{10} + \dots$$

$$A_2 = \frac{3}{8}\left(e^2 + \frac{1}{4}e^4 + \frac{15}{128}e^6 + \frac{35}{512}e^8 + \frac{735}{16384}e^{10} + \dots\right)$$

$$A_4 = \frac{15}{256}\left(e^4 + \frac{3}{4}e^6 + \frac{35}{64}e^8 + \frac{105}{256}e^{10} + \dots\right)$$

$$A_6 = \frac{35}{3072}\left(e^6 + \frac{5}{4}e^8 + \frac{315}{256}e^{10} + \dots\right)$$

$$A_8 = \frac{315}{131072}\left(e^8 + \frac{7}{4}e^{10} + \dots\right)$$

$$A_{10} = \frac{693}{131072}(e^{10} + \dots)$$

چنانچه از عبارت e^6 به بعد در معادله ۲۵ صرف نظر کنیم به رابطه ساده تر زیر می رسیم.

$$m = a \{B_0\phi - B_2 \sin 2\phi + B_4 \sin 4\phi - B_6 \sin 6\phi\} \quad ۲۶$$

که در آن

$$B_0 = 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6$$

$$B_2 = \frac{3}{8}\left(e^2 + \frac{1}{4}e^4 + \frac{15}{128}e^6\right)$$

$$B_4 = \frac{15}{256}\left(e^4 + \frac{3}{4}e^6\right)$$

$$B_6 = \frac{35}{3072}e^6$$

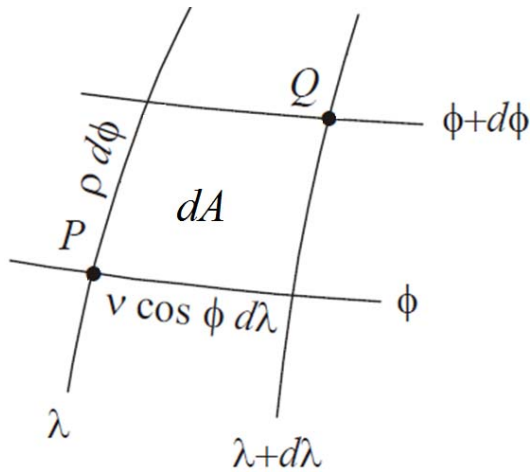
به عنوان توضیح تکمیلی باید اضافه نمود که برای محاسبه هر قطعه کمان دلخواه در امتداد نصف النهار از عرض ژئودتیک ϕ_1 تا ϕ_2 ، مطابق روابط داده شده در بالا، طول کمان از استوا تا ϕ_2 و تا ϕ_1 محاسبه و سپس با اختلاف گیری آنها به طول قطعه کمان دلخواه می رسیم.

مساحت بیضوی

یکی از مواردی نیز که گاهی اوقات در محاسبات ژئودزی مورد نیاز می باشد، محاسبه مساحت یک قطعه دلخواه بر روی بیضوی می باشد. مساحت یک چهارضلعی دیفرانسیلی بر روی بیضوی از رابطه زیر تعیین می شود (نگاره ۱۰).

a

۲۷



نگاره ۱۰- مساحت یک چهارضلعی دیفرانسیلی بر روی بیضوی

حال با استفاده از انتگرال زیر می توان مساحت یک چهارضلعی محدود به نصف النهارات λ_1 و λ_2 و مدارات ϕ_1 و ϕ_2 را به دست آورد.

$$A = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho \nu \cos \phi \, d\phi \, d\lambda \quad 28$$

برای محاسبه تعیین مساحت یک منطقه واقع بین دو مدار ϕ_1 و ϕ_2 انتگرال ۲۸ به صورت زیر نوشته می شود.

۲۹

$$A = \int_0^{2\pi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho \nu \cos \phi \, d\phi \, d\lambda$$

$$= 2\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho \nu \cos \phi \, d\phi$$

$$A = 2\pi a^2 (1 - e^2) \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\cos \phi}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^2} \, d\phi$$

با استفاده از برخی روابط ریاضی و ساده سازی ها می توان به رابطه نهایی زیر برای تعیین مساحت یک منطقه واقع بین دو مدار ϕ_1 و ϕ_2 رسید.

$$A = 2\pi a^2 (1 - e^2) \left\{ C_1 \sin \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right) \cos \phi_m + C_3 \sin 3 \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right) \cos 3\phi_m \right. \quad 30$$

$$\left. + C_5 \sin 5 \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right) \cos 5\phi_m + C_7 \sin 7 \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right) \cos 7\phi_m + \dots \right\}$$

که در آن

$$C_1 = 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \dots$$

$$C_3 = \frac{1}{6}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \frac{3}{16}e^6 + \dots$$

$$C_5 = \frac{3}{80}e^4 + \frac{1}{16}e^6 + \dots$$

$$C_7 = \frac{1}{112}e^6 + \dots$$

$$\phi_m = \frac{\phi_2 + \phi_1}{2} \quad \text{and} \quad \Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

بر همین اساس مطابق رابطه ۲۹ می توان با در نظر گرفتن دو عرض استوا ($\phi_1 = 0$) و قطب شمال ($\phi_2 = \frac{\pi}{2}$)، دو برابر مساحت واقع بین آنها یعنی مساحت کل سطح بیضوی را محاسبه نمود.

$$A = 4\pi a^2 (1 - e^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \phi}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^2} d\phi \quad ۳۱$$

با استفاده از برخی روابط ریاضی و بعد از کمی مرتب سازی، سرانجام به رابطه مساحت سطح کل بیضوی به صورت زیر می رسیم.

$$A = 2\pi a^2 \left\{ 1 + \frac{1 - e^2}{2e} \ln \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right) \right\} \quad ۳۲$$

فصل ۶

تصحیح و تبدیل مشاهدات بر روی بیضوی

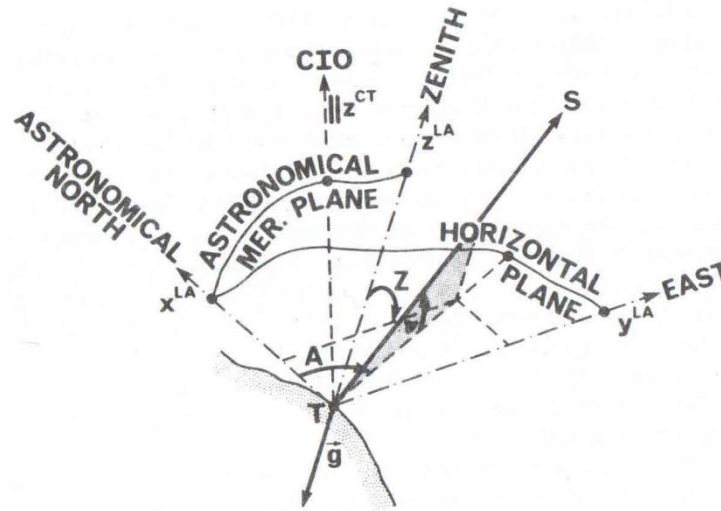
تمام اندازه گیری ها و مشاهدات ژئودزی در یک فضای فیزیکی بر روی سطح زمین انجام می شوند. این در حالی است که محاسبات مربوط به تعیین موقعیت و مختصات ژئودتیک نقاط در یک فضای هندسی بر روی سطح بیضوی انجام می شوند. بنابراین تبدیل اندازه گیری ها و انتقال آنها از سطح زمین به سطح بیضوی امری ضروری است. در تبدیل اندازه گیری ها از سطح زمین به سطح بیضوی باید دقت نمود که آنها تحت تاثیر دو نوع عوامل فیزیکی و هندسی می باشند و لازم است به هر دو نوع اثرات مذکور توجه شود. اثرات فیزیکی به اثر میدان ثقل زمین که باعث جدایی و اختلاف ژئوئید و بیضوی است، و اثر شرایط جوی مانند دما، فشار و رطوبت تقسیم می شوند. از آنجا که در این درس اثر شرایط جوی ارتباطی به بیضوی مرجع زمین ندارد، از آن صرف نظر کرده و فقط به اثر میدان ثقل زمین پرداخته می شود. همچنین اثرات هندسی نیز ناشی از هندسه بیضوی دو محوره دورانی زمین است که به دلیل تنافر قائم های بر بیضوی و عدم تطابق مقاطع قائم مستقیم و معکوس بر روی بیضوی می باشند.

تبدیل آزیموت ها، امتدادها و زوایای افقی

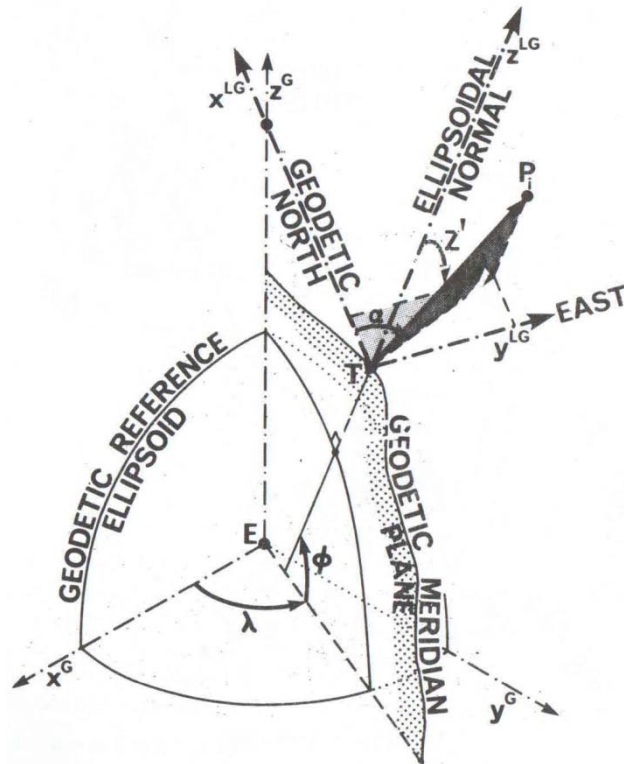
• تصحیح انحراف قائم

وقتی که یک دستگاه زاویه یاب را بر روی نقطه ای واقع بر روی سطح زمین مستقر می کنیم، در عمل محور قائم زاویه یاب را منطبق بر راستای بردار ثقل ایستگاه مشاهداتی می کنیم و آزیموت ها، امتدادها و زوایای افقی را در صفحه تراز محلی اندازه گیری می کنیم (نگاره ۱). از طرف دیگر می دانیم که برای انجام

محاسبات تعیین موقعیت بر روی بیضوی باید محور قائم زاویه یاب منطبق بر راستای قائم بر بیضوی در نقطه اندازه گیری باشد (نگاره ۲).

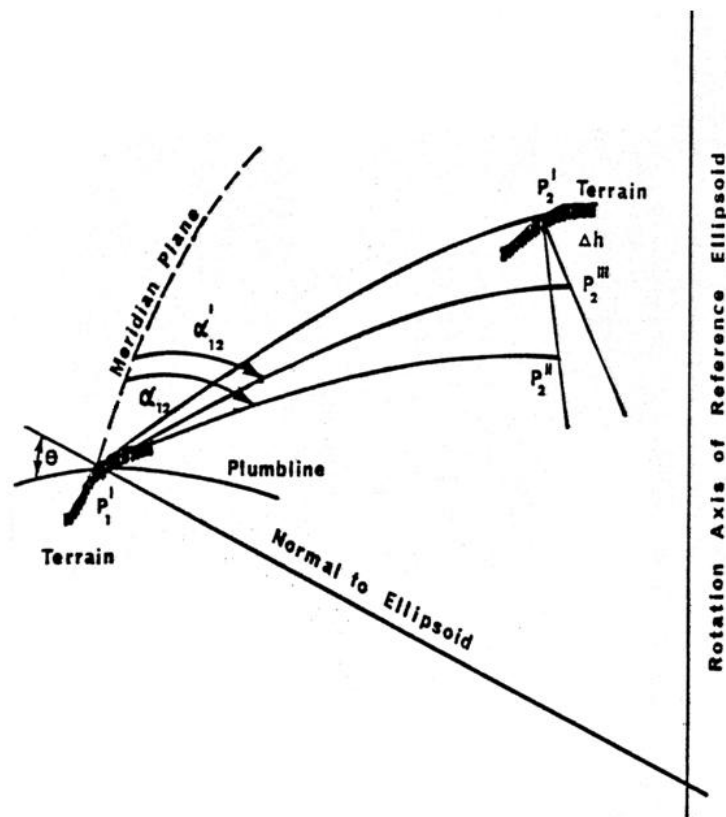


نگاره ۱- اندازه گیری آزیموت در دستگاه مختصات نجومی محلی



نگاره ۲- اندازه گیری آزیموت در دستگاه مختصات ژئودتیک محلی

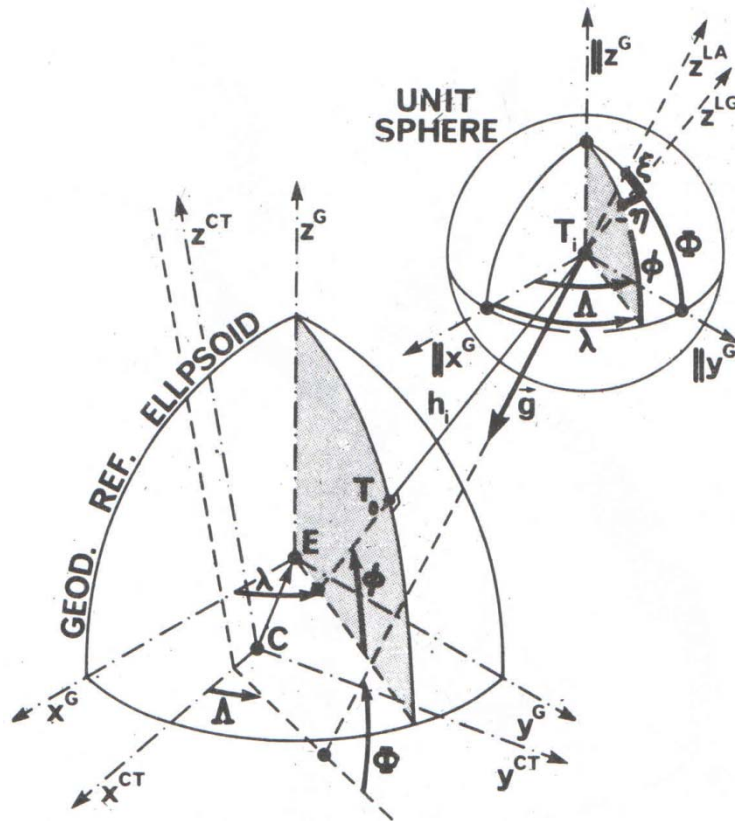
اختلاف بین این دو راستا که به زاویه انحراف قائم معروف است ناشی از میدان ثقل زمین به عنوان یک تصحیح فیزیکی باید در نظر گرفته شود. بنابراین تصحیح انحراف قائم باید به کلیه مشاهدات آزیموتی، امتدادی و زوایه‌ای افقی که در سطح هم پتانسیل ایستگاه مشاهداتی انجام می شوند، اعمال گردد تا قائم بر سطح هم پتانسیل در ایستگاه مشاهداتی به قائم بر بیضوی در آن نقطه تبدیل شود. مطابق نگاره ۳، چنانچه بر روی نقطه دلخواه P_1' مستقر شده و بخواهیم آزیموت P_1' به P_2' را اندازه گیری نماییم، باید اثر زاویه انحراف قائم را در ایستگاه مذکور به عنوان تصحیح انحراف قائم روی آن اعمال نماییم. همانطور که در نگاره ۳ دیده می شود، اثر این تصحیح همان اختلاف بین α_{12} و α'_{12} است و بیانگر زاویه $P_2''\hat{P}_1'P_2'''$ می باشد. اختلاف ارتفاع ایستگاه های استقرار و نشانه روی نسبت به بیضوی Δh است. صفحه نشانه روی شامل ایستگاه P_1' ، امتداد قائم بر ژئوئید و نقطه نشانه روی P_2' است که تصویر P_2' بر روی افق فیزیکی ایستگاه P_1' ، P_2'' است. بعد از انجام تصحیح انحراف قائم صفحه نشانه روی شامل ایستگاه P_1' ، امتداد قائم بر بیضوی و نقطه نشانه روی P_2' است که تصویر P_2' بر روی افق هندسی ایستگاه P_1' ، P_2''' است.



نگاره ۳- تصحیح انحراف قائم برای یک مشاهده آزیموتی بین دو نقطه 1 و 2

اگر نقطه استقرار را با \vec{a} ، نقطه نشانه روی را با \vec{j} ، آزیموت نجومی را با A_{ij} ، آزیموت ژئودتیک را با α_{ij} ، و مولفه های نصف النهاری و قائم اولیه زاویه انحراف قائم θ_i را به ترتیب با ξ_i و η_i (نگاره ۴) و زاویه زینتی بین این دو نقطه را با Z_{ij} نمایش دهیم، تصحیح انحراف قائم $\Delta\alpha_{ij}$ را می توان با رابطه زیر که تصحیح لاپلاس نیز نامیده می شود، بیان نمود.

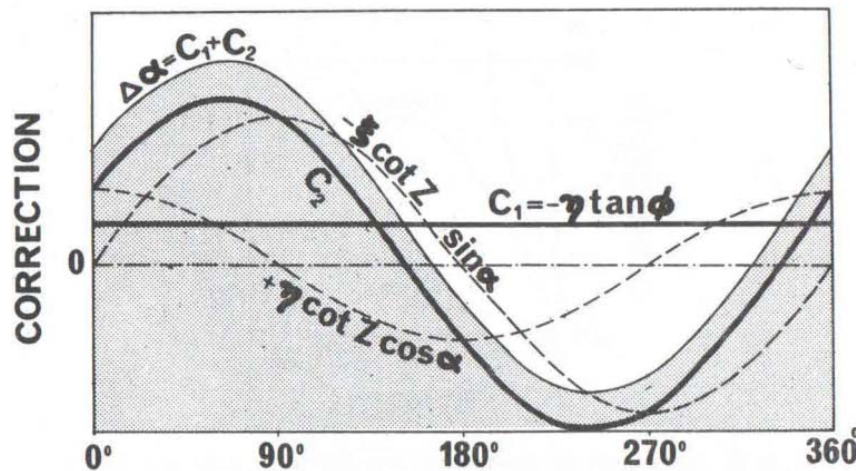
$$\Delta\alpha_{ij}^0 = \alpha_{ij} - A_{ij} = -\eta_i \tan \varphi_i - (\xi_i \sin \alpha_{ij} - \eta_i \cos \alpha_{ij}) \cot Z_{ij} = +C_1 + C_2 \quad ۱$$



نگاره ۴- مولفه های نصف النهاری و قائم اولیه زاویه انحراف قائم

مطابق رابطه فوق، چنانچه زاویه انحراف قائم θ_i صفر یا زاویه زینتی Z_{ij} برابر با $\frac{\pi}{2}$ باشد، در آن صورت مقدار تصحیح فوق صفر خواهد شد. از آنجا که معمولاً زاویه انحراف قائم θ_i صفر نیست، شبکه های ژئودزی را به گونه ای طراحی می کردند که زاویه زینتی Z_{ij} نزدیک به $\frac{\pi}{2}$ باشد، یعنی اختلاف ارتفاعات نقاط تا حد امکان

کوچک و فواصل بین آنها زیاد باشد و بتوان عملاً از تصحیح مذکور اغماض نمود. چنانچه زاویه انحراف قائم در صفحه عمود بر صفحه نشانه روی قرار گیرد، بیشترین تصحیح ناشی از آن را خواهیم داشت، و چنانچه زاویه انحراف قائم در صفحه نشانه روی قرار گیرد، هیچ تصحیحی ناشی از آن برای آزیموت نخواهیم داشت. در نگاره ۵ با فرضیات $\xi_i > 0$ ، $\eta_i < 0$ و $Z_{ij} > \frac{\pi}{2}$ و $\varphi_i > 0$ یک مثال از تغییرات تصحیح انحراف قائم نسبت به آزیموت نشان داده شده است.

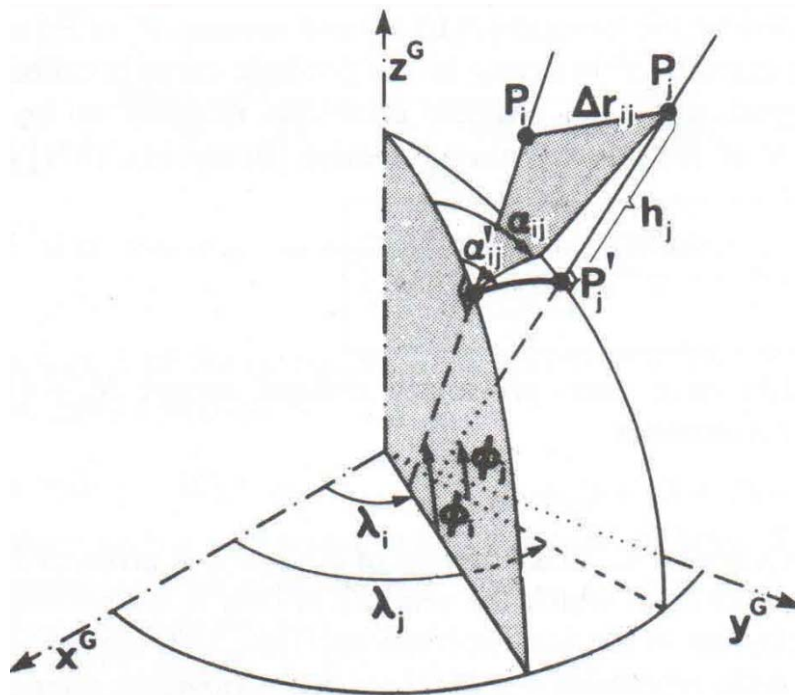


نگاره ۵- تغییرات تصحیح انحراف قائم نسبت به آزیموت

اکنون که مقدار تصحیح انحراف قائم برای آزیموت به دست آمد، با توجه به ارتباط آن با مشاهدات امتدادی و زاویه ای، می توان به روابط تصحیح انحراف قائم برای مشاهدات امتدادی و زاویه ای نیز رسید.

• تصحیح تنافر قائم ها

این تصحیح که به تصحیح ارتفاع نقطه نشانه روی نیز معروف است ناشی از هندسه بیضوی است و در صورت وجود ارتفاع صفر برای نقطه نشانه روی، مقدار آن صفر خواهد شد. مطابق نگاره ۶، حتی با فرض اعمال تصحیح ناشی از زاویه انحراف قائم به آزیموت نجومی A_{ij} و رسیدن به آزیموت ژئودتیکی α_{ij} ، چنانچه نقطه مورد نشانه روی دارای ارتفاع h_j نسبت به بیضوی باشد، در آن صورت تصویر آن در صفحه نشانه روی بر روی بیضوی متفاوت از زمانی است که فاقد ارتفاع باشد و موجب یک اختلاف آزیموت می شود.



نگاره ۶- اثر ارتفاع نقطه نشانه روی بر روی آزیموت

مطابق نگاره ۶، این اختلاف بین آزیموت های α_{ij} و α'_{ij} نشان داده شده است. تصحیح هندسی مربوط به پیچش امتداد قائم های بر بیضوی برای نقطه نشانه روی که تصحیح پیچش قائم نیز نامیده می شود از رابطه زیر تعیین می شود.

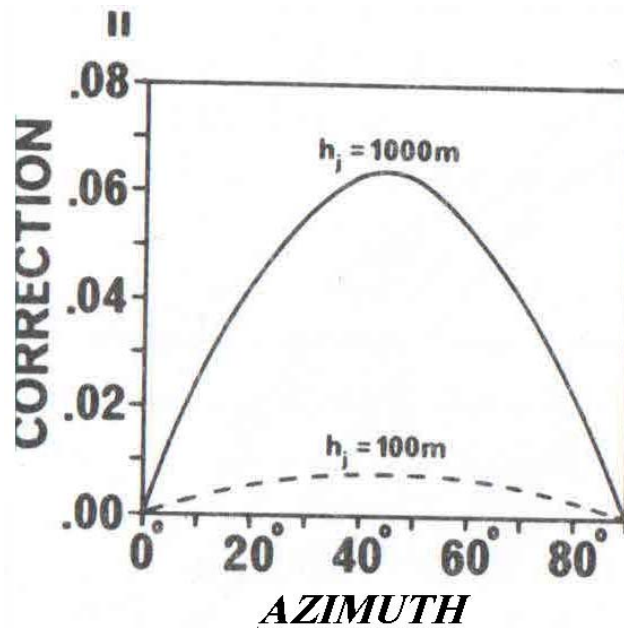
$$\alpha'_{ij} - \alpha_{ij} = \frac{h_j}{2\rho_m} e^2 \sin 2\alpha_{ij} \cos^2 \varphi_m = +C_3 \quad ۲$$

که در آن e خروج از مرکزی اول بیضوی، ρ_m متوسط شعاع نصف النهاری و φ_m عرض متوسط ژئودتیک نقاط استقرار و نشانه روی می باشند.

$$\rho_m = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j)$$

$$\varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_i + \varphi_j)$$

برای مثال تصحیح مذکور برای $\varphi_i = 40^\circ$ و $\varphi_j = 41^\circ$ به ازای آزیموت 0° تا 90° درجه و دو ارتفاع 100 متر و 1000 متر برای نقطه نشانه روی مطابق نگاره ۷ خواهد بود.



نگاره ۷ - تصحیح تنافر قائم ها برای $\varphi_i = 40^\circ$ و $\varphi_j = 41^\circ$

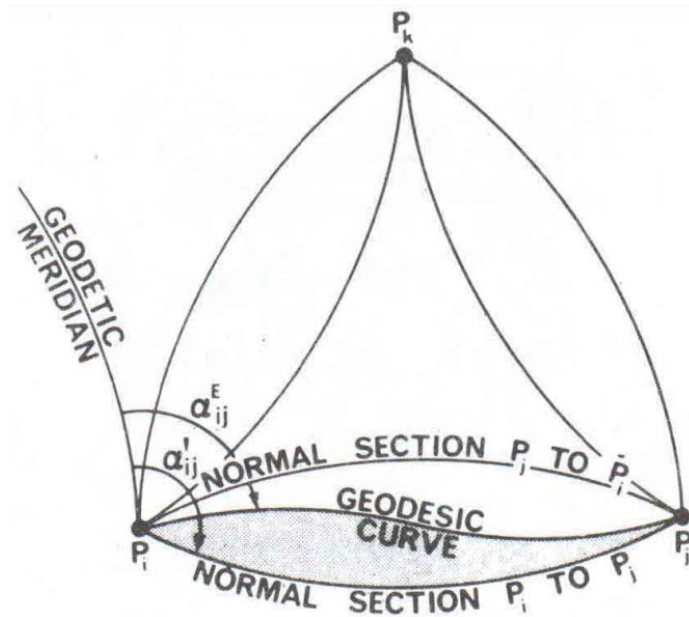
با احتساب تصحیحات قبلی (C_1 و C_2)، می توان مجموع تصحیح های مورد نیاز برای آزیموت نجومی A_{ij} را تا این بخش به صورت زیر نوشت و آنها را یکجا اعمال نمود.

$$\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} + C_3 = A_{ij} + C_1 + C_2 + C_3 \quad ۳$$

باز هم تاکید می شود با داشتن تصحیح مربوط به آزیموت به راحتی می توان تصحیح های متناظر با مشاهدات امتدادی و زاویه ای را محاسبه نمود.

• تصحیح خم ژئودزیک

اکنون پس از اعمال تصحیحات قبلی به آزیموت نجومی A_{ij} ، در واقع به آزیموت ژئودتیکی α'_{ij} می‌رسیم که منتسب به مقطع قائم مستقیم می‌باشد. بنابراین، لازم است تصحیح مربوط به مقطع خم ژئودزیک نیز به آن اعمال شود تا به آزیموت ژئودتیکی α^E_{ij} که منتسب به خم ژئودزیک است، برسیم (نگاره ۸).

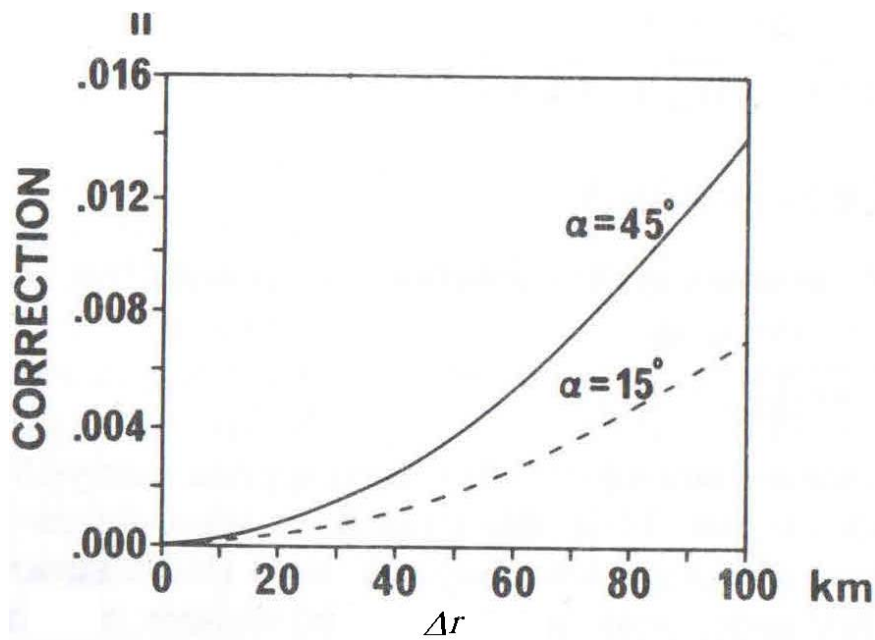


نگاره ۸- تصحیح مربوط به مقطع خم ژئودزیک

این تصحیح هندسی که موسوم به تصحیح ژئودزیک است از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\alpha^E_{ij} - \alpha'_{ij} = \frac{e^2 \Delta r_{ij}^2 \cos^2 \varphi_m \sin 2\alpha_{ij}}{12v_m^2} = +C_4 \quad ۴$$

که در آن e خروج از مرکزی اول بیضوی، Δr_{ij} طول فضایی، v_m متوسط شعاع قائم اولیه و φ_m عرض متوسط ژئودتیک نقاط استقرار (i) و نشانه روی (j) هستند. برای مثال، مقدار این نوع تصحیح برای دو آزیموت ۱۵ و ۴۵ درجه به ازای طول فضایی صفر تا ۱۰۰ کیلومتر در نگاره ۹ نمایش داده شده است.



نگاره ۹- تغییرات تصحیح خم ژئودزیک برای دو آزیموت ۱۵ و ۴۵ درجه

به این ترتیب مجموع تصحیحات فیزیکی و هندسی برای آزیموت نجومی A_{ij} را می توان با رابطه زیر نمایش داد.

$$\alpha_{ij}^E - A_{ij} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \quad ۵$$

بنابر آنچه گفته شد، مجموع تصحیحات فوق برای اینکه یک زاویه دلخواه ω که در سطح زمین اندازه گیری شده است به سطح بیضوی منتقل شود به صورت زیر خواهد بود.

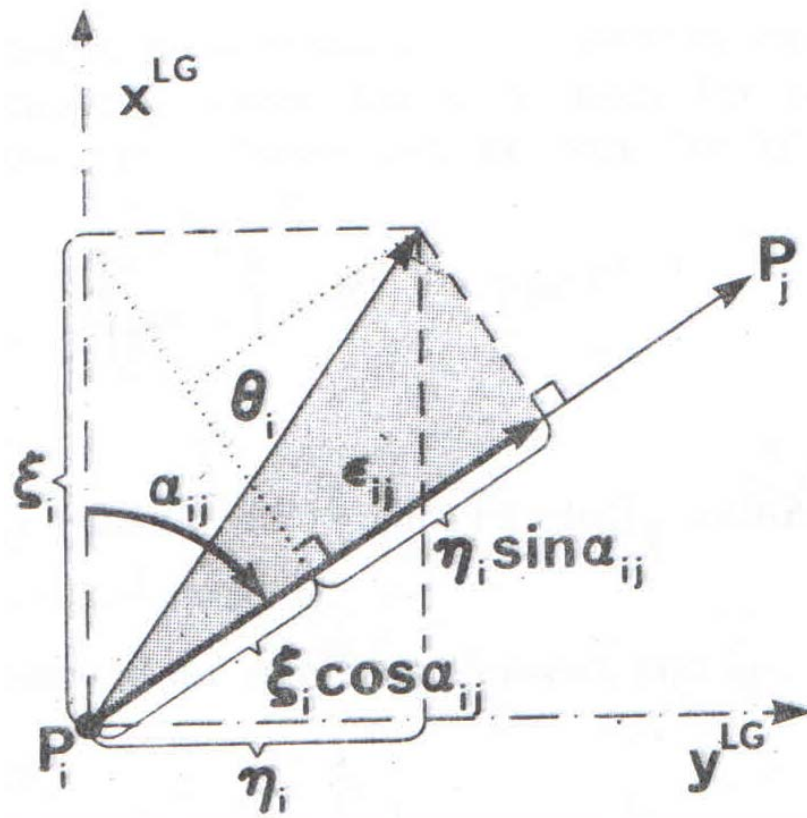
$$\omega^E - \omega = \Delta C_2 + \Delta C_3 + \Delta C_4 \quad ۶$$

در واقع رابطه فوق حاصل تفاضل مجموع تصحیحات فیزیکی و هندسی برای آزیموت های دو امتداد مربوط به زاویه ω می باشد.

تبدیل امتدادها و زوایای قائم

چنانچه برای سادگی یک زاویه زینتی مانند Z_{ij} را بین دو نقطه استقرار i و نقطه نشانه روی j در نظر بگیریم، تصویر زاویه انحراف قائم در صفحه نشانه روی (نگاره ۱۰) همان تصحیح انحراف قائم به عنوان یک تصحیح فیزیکی برای زاویه زینتی Z_{ij} است که با رابطه زیر معرفی می شود.

$$\Delta Z_{ij}^0 = z_{ij} - Z_{ij} = (\xi_i \cos \alpha_{ij} + \eta_i \sin \alpha_{ij}) \quad \gamma$$

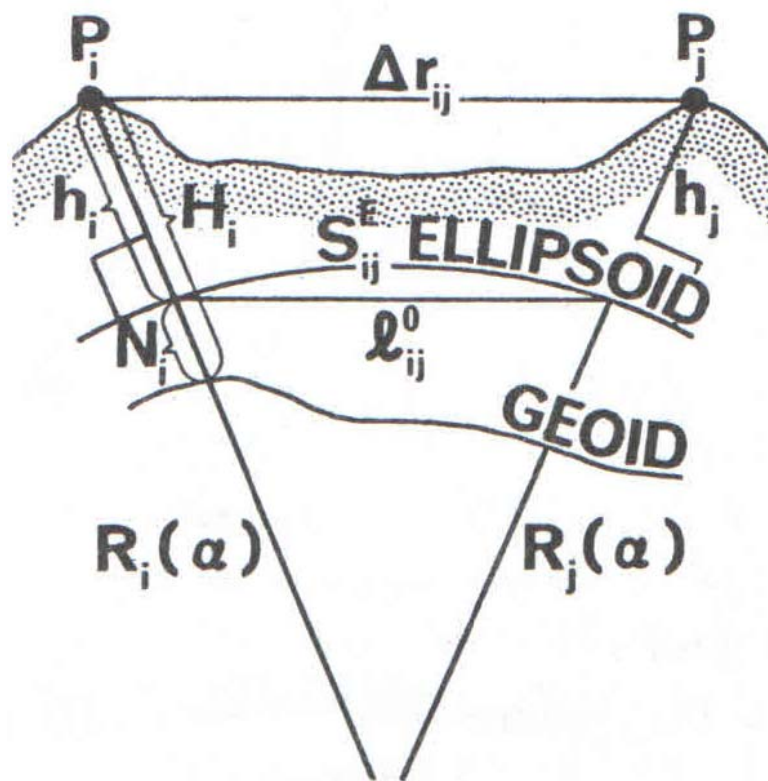


نگاره ۱۰- تصویر زاویه انحراف قائم در صفحه نشانه روی

همانطور که پیداست، چنانچه انحراف قائم در صفحه نشانه روی قرار داشته باشد (بیشترین مقدار تصحیح برابر با زاویه انحراف قائم) و در صورت قرار گیری در صفحه عمود بر صفحه نشانه روی، تصحیح مذکور صفر خواهد بود.

تبدیل طول فضایی به طول ژئودتیک

در عمل آنچه به عنوان طول بر روی سطح زمین اندازه گیری می شود، طول فضایی Δr_{ij} بین دو نقطه استقرار i و نقطه نشانه روی j است (نگاره ۱۰). این در حالی است که در محاسبات تعیین موقعیت بر روی بیضوی به طول ژئودتیک متناسب به خم ژئودزیک S_{ij}^E نیاز داریم (نگاره ۱۰).



نگاره ۱۰- طول فضایی Δr_{ij} در مقابل طول ژئودتیک S_{ij}^E

به منظور تبدیل طول فضایی به طول ژئودتیک از رابطه زیر استفاده می شود.

$$S_{ij}^E = 2R_m \sin^{-1} \left(\frac{l_{ij}^0}{2R_m} \right)$$

۸

عناصر و پارامترهای بکار رفته در رابطه فوق به صورت زیر تعیین و یادآوری می شوند.

$$l_{ij}^0 = \sqrt{\frac{\Delta r_{ij}^2 - (h_j - h_i)^2}{(1 + h_i/R_m)(1 + h_j/R_m)}}$$

$$R_m = \frac{1}{2}(R_i(\alpha) + R_j(\alpha))$$

$$R_i(\alpha) = \frac{\rho_i v_i}{\rho_i \sin^2 \alpha + v_i \cos^2 \alpha}$$

در روابط فوق

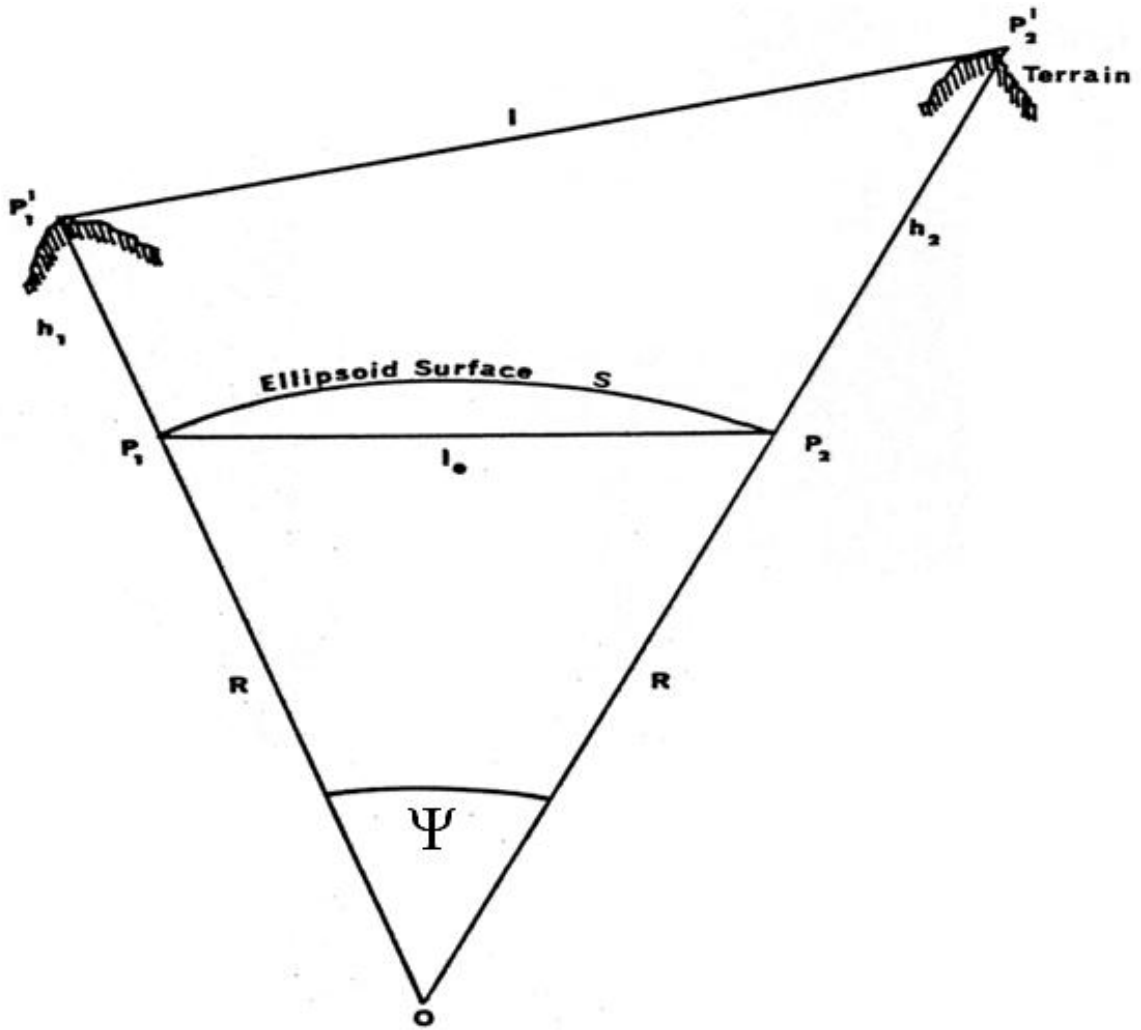
- l_{ij}^0 : طول وتر بین دو نقطه بر روی بیضوی،
- h_i : ارتفاع ژئودتیک نقطه استقرار،
- h_j : ارتفاع ژئودتیک نقطه نشانه روی،
- R_m : شعاع انحنای متوسط اولر برای نقاط استقرار و نشانه روی،
- $R_i(\alpha)$: شعاع انحنای اولر برای نقطه استقرار،
- $R_j(\alpha)$: شعاع انحنای اولر برای نقطه نشانه روی،
- ρ_i : شعاع انحنای نصف النهاری برای نقطه استقرار،
- v_i : شعاع انحنای قائم اولیه برای نقطه استقرار می باشند.

برای اثبات رابطه تبدیل ۸، می توان از نگاره ۱۱ کمک گرفت و با استفاده از قانون کسینوس ها در مثلث

OP_1P_2' ، در نظر گرفتن زاویه ψ و رابطه $\cos \psi = 1 - 2\sin^2 \frac{\psi}{2}$ ، در نظر داشتن مثلث OP_1P_2 و

رابطه $l_0 = 2R \sin \frac{\psi}{2}$ ، رابطه $S = R\psi = 2R \sin^{-1} \left(\frac{l_0}{2R} \right)$ و برخی ساده سازی ها و مرتب

سازی ها به رابطه مذکور رسید.



نگاره ۱۱- تبدیل طول فضایی l به طول ژئودتیک S

فصل ۷

تعیین موقعیت بر روی بیضوی

یکی از مهمترین موضوعات مورد بحث در ژئودزی هندسی، محاسبات تعیین موقعیت بر روی بیضوی می-باشد. در محاسبات ژئودزی نیز مانند محاسبات نقشه‌برداری با دو صورت مختلف از تعیین موقعیت روبرو هستیم. در حالت اول، موقعیت یک نقطه به عنوان نقطه معلوم و اندازه گیری های طول و آزیموت بین آن و یک نقطه مجهول بر روی بیضوی داده شده است و بدست آوردن موقعیت نقطه مجهول و آزیموت معکوس (از نقطه مجهول به نقطه معلوم) مورد نظر است. در این صورت مسئله مورد بحث، اصطلاحاً مسئله مستقیم اطلاق می شود. در حالت دوم، اطلاعات داده شده مختصات دو نقطه بر روی بیضوی می باشد و هدف به دست آوردن طول بین دو نقطه و آزیموت های مستقیم و معکوس می باشد. در این صورت اصطلاحاً با مسئله معکوس مواجه هستیم. در این فصل تلاش می شود حل دو نوع مسئله یاد شده با روش های مختلف مورد بررسی قرار گیرند و علاوه بر آن موضوع ارتفاع یابی مثلثاتی و سرشکنی بر روی بیضوی نیز مورد بررسی قرار گیرد.

مسئله مستقیم

فرض می کنیم مختصات یک نقطه دلخواه مانند P_1 به صورت (φ_1, λ_1) ، آزیموت ژئودتیکی α_{1j}^E و طول ژئودتیکی S_{1j}^E بر روی بیضوی داده شده‌اند و می‌خواهیم مختصات ژئودتیکی نقطه P_j را به صورت (φ_j, λ_j) و آزیموت معکوس α_{ji}^E را به دست آوریم. روش های مختلفی برای این منظور وجود دارد که می توان آنها را بر اساس منحنی واصل بین دو نقطه به سه گروه طبقه بندی نمود.

- گروه اول: بر پایه خم ژئودزیک،
- گروه دوم: بر پایه مقطع قائم، و
- گروه سوم: بر پایه مقطع قائم یک کره که بیضوی را به صورت محلی تقریب می کند، استوار است.

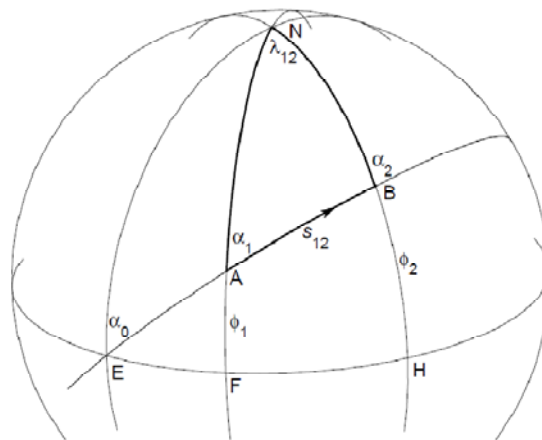
دقیق ترین جواب ها مربوط به فرمول های گروه اول می باشد که به فرمول های خطوط بلند معروف هستند. به عنوان مثال فرمول های $Bessel$ ، $Rainsford$ و $Sodano$ از این دسته هستند. دقت های حاصل از هر یک از این سه روش تنها محدود به تعداد عبارات در سری های مورد استفاده است. تنها اختلاف بین

روش Bessel و Rainsford در این است که Bessel از e^2 (خروج از مرکزی اول) و Rainsford از f (فشردگی) استفاده می کند که در سرعت همگرایی جواب ها موثرند. مزیت اصلی روش Sodano نسبت به دو روش دیگر در این است که حل مسئله مستقیم یا معکوس توسط آن نیازمند فرآیند تکرار نیست و در واقع دارای یک فرمول بسته است.

دو دسته دیگر شامل فرمول های تقریبی هستند و بنابراین نمی توان آنها را برای طول های بلند یا برای هر مکانی در سطح زمین بکار برد. یکی از فرمول های مربوط به مقطع قائم Rabbins می باشد که برای طول های متوسط مناسب است. فرمول هایی که از تقریب کروی محلی استفاده می کنند نیز معروف به فرمول های خطوط کوتاه هستند که نمونه آن فرمول Puissant می باشد که دارای دقت 1ppm برای یک طول ۱۰۰ کیلومتری و 40ppm برای یک طول ۲۵۰ کیلومتری برای نقاط با عرض جغرافیایی بزرگتر از ۶۰ درجه می باشد.

• فرمول های خطوط کوتاه

اساس این روش مبتنی بر تقریبات کروی است. بنابراین تعدادی از روابط مثلثات کروی با توجه به نگاره (۱) به صورت زیر یادآوری می شوند.



نگاره ۱- مثلث کروی

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cos \widehat{AB} + \cos \varphi_1 \sin \widehat{AB} \cos \alpha_{12} \quad (۱)$$

$$\frac{\sin \lambda_{12}}{\sin \frac{s_{12}}{v_2}} = \frac{\sin \alpha_{ij}}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2 \right)} \quad (۲)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{d\alpha}{2}\right) = \cot \frac{\lambda_{12}}{2} \frac{\cos \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) \right]}{\cos \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) \right]} \quad (3)$$

فرمول پواسون

از آنجا که فرمول پواسون مبتنی بر تقریبات کروی است، اعتبار آن با حفظ دقت 10^{-6} برای طول های تا ۱۰۰ کیلومتر می باشد و برای طول های بزرگ تر از آن پیشنهاد نمی شود.

با توجه به رابطه مثلثات کروی (۱)، بسط توابع سینوس و کسینوس، برخی روابط هندسی دیگر و مرتب سازی آنها، فرمول پواسون برای تعیین عرض ژئودتیک نقطه دوم به صورت اختلاف عرض ژئودتیک معرفی می شود.

$$\Delta\varphi_{k+1} \doteq \left(\frac{S_{ij} \cos \alpha_{ij}}{\rho_i} - \frac{S_{ij}^2 \tan \varphi_i \sin^2 \alpha_{ij}}{2\rho_i v_i} - \frac{S_{ij}^3 \cos \alpha_{ij} \sin^2 \alpha_{ij} (1 + 3 \tan^2 \varphi_i)}{6\rho_i v_i^2} \right) \left(1 - \frac{3e^2 \sin 2\varphi_i}{4(1 - e^2 \sin^2 \varphi_i)} \Delta\varphi_k \right) \quad (4)$$

مطابق رابطه تکراری فوق، تا زمانیکه قدر مطلق اختلاف بین دو تکرار آخر $(|\Delta\varphi_{k+1} - \Delta\varphi_k|)$ کمتر از یک مقدار مشخص مانند 10^{-9} رادیان (معادل ۶ میلی متر موقعیت مسطحاتی) نشود، باید رابطه فوق اجرا شود. پس از دستیابی به مقدار حدی مذکور، با جمع نتیجه آخرین تکرار و عرض ژئودتیک نقطه اول (φ_i) به عرض ژئودتیک نقطه مورد نظر (φ_j) خواهیم رسید.

پس از تعیین عرض ژئودتیک نقطه دوم (φ_j) ، از رابطه مثلثات کروی (۲)، استفاده از بسط تابع سینوس، برخی روابط هندسی و ساده سازی آنها به رابطه زیر برای محاسبه اختلاف طول ژئودتیک می رسیم.

$$\Delta\lambda \doteq \frac{S_{ij} \sin \alpha_{ij}}{v_j \cos \varphi_j} \left[1 - \frac{S_{ij}^2}{6v_j^2} \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha_{ij}}{\cos^2 \varphi_j} \right) \right] \quad (5)$$

اکنون با داشتن مختصات عرض و طول ژئودتیک دو نقطه و نیز آزیموت مستقیم α_{ij} ، می توان به کمک رابطه زیر اختلاف بین آزیموت مستقیم و معکوس را تعیین و سپس با اعمال آن به آزیموت مستقیم به آزیموت معکوس رسید.

$$\Delta\alpha = \alpha_{ji}^E - \alpha_{ij}^E - \pi \doteq \Delta\lambda \frac{\sin \varphi_m}{\cos \frac{\Delta\varphi}{2}} + \frac{\Delta\lambda^3}{12} \left[\frac{\sin \varphi_m}{\cos \frac{\Delta\varphi}{2}} - \frac{\sin^3 \varphi_m}{\cos^3 \frac{\Delta\varphi}{2}} \right] \quad (6)$$

فرمول گوس

فرمول گوس نیز بر مبنای تقریبات کروی است که به دلیل ساده سازی زیاد در آن، برای طول های کمتر از ۴۰ کیلومتر و عرض های کمتر از ۸۰ درجه پیشنهاد شده است. فرمول های مسئله مستقیم آن به ترتیب زیر می باشد.

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &\doteq d\lambda_{ij} \sin \varphi_{ij} \\ \Delta\varphi_{ij} &\doteq \frac{S_{ij} \cos \alpha_m}{\rho_m} \\ \Delta\lambda_{ij} &\doteq \frac{S_{ij} \sin \alpha_m}{v_m \cos \varphi_m} \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن $\alpha_m = \alpha_{ij} + \Delta\alpha/2$ ، ρ_m و φ_m به ترتیب شعاع انحنای نصف النهاری متوسط و عرض ژئودتیک متوسط هستند که به صورت تکراری به دست می آیند.

مسئله معکوس

در مسئله معکوس، فرض می کنیم مختصات دو نقطه دلخواه مانند P_i و P_j به صورت (φ_i, λ_i) و (φ_j, λ_j) بر روی بیضوی داده شده اند و می خواهیم طول ژئودتیکی S_{ij}^E ، آزیموت ژئودتیکی مستقیم α_{ij}^E و معکوس α_{ji}^E را بر روی بیضوی به دست آوریم. در این حالت نیز مانند مسئله مستقیم با توجه به دقت های مورد نیاز از فرمول های مختلفی استفاده می شود.

فرمول پواسون

برای حل مسئله معکوس نیز از رابطه مثلثات کروی (۳) و بسط تابع تانژانت و برخی مرتب سازی ها استفاده می شود. با فرض وجود مختصات عرض و طول ژئودتیک دو نقطه P_i و P_j به ترتیب زیر با استفاده از روابط تقریبی پواسون، می توان به آزیموت و طول ژئودتیک بین دو نقطه در سطح بیضوی (منتسب به خم ژئودزیک) دست یافت.

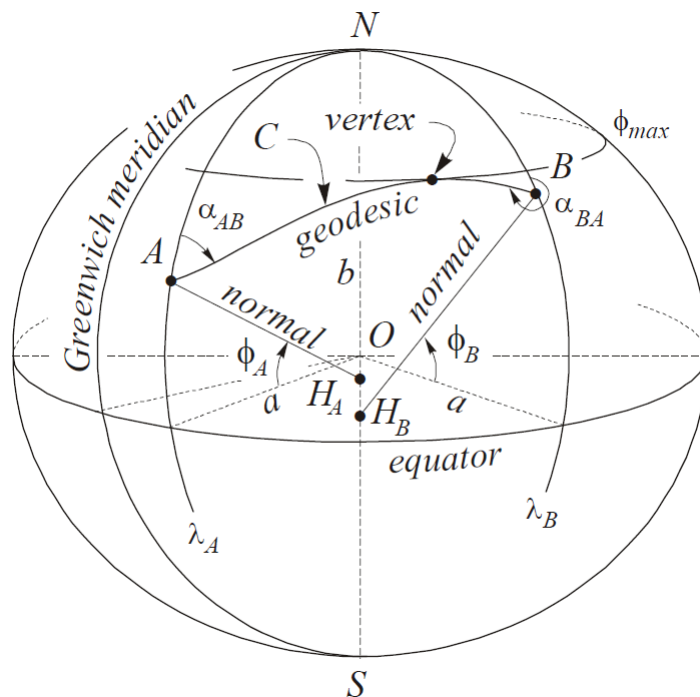
$$\alpha_{ij}^E \doteq \tan^{-1} \left[\frac{v_j \Delta \lambda_{ij}}{\rho_i \Delta \varphi_{ij}} \cos \varphi_j \left(1 - \frac{3e^2 \sin 2\varphi_i}{4(1 - e^2 \sin^2 \varphi_i)} \right) \right] \quad (8)$$

$$S_{ij}^E \doteq \frac{\Delta \varphi_{ij}}{\cos \alpha_{ij}} \frac{\rho_i}{1 - \frac{3e^2 \sin 2\varphi_i \Delta \varphi_{ij}}{4(1 - e^2 \sin^2 \varphi_i)}} \quad (9)$$

روش جامع *Pittman* برای تمام حالات

در این روش جواب های مستقیم و معکوس با دقتی بهتر از میلی متر برای هر اندازه طول در هر جا از بیضوی به دست می آیند. روابط این روش به صورت تکراری می باشند که برای نخستین بار توسط *Pittman* در سال ۱۹۸۶ معرفی شده اند. به رغم جدید بودن این روش، مطالب زیادی از آن منتشر نشده است و به همین دلیل در این بخش به آن پرداخته می شود تا بیشتر مورد توجه قرار گیرد و در صورت لزوم برای مسائل ژئودزی مورد استفاده قرار گیرد.

برای یادآوری در نگاره (۲) موقعیت دو نقطه A و B با طول و عرض ژئودتیک آنها، خم ژئودزیک، آزیموت مستقیم و معکوس، و قائم های بر بیضوی در نقاط مذکور مشخص شده اند.



نگاره ۲- خم ژئودزیک و برخی پارامترهای دیگر بر روی بیضوی مرجع زمین

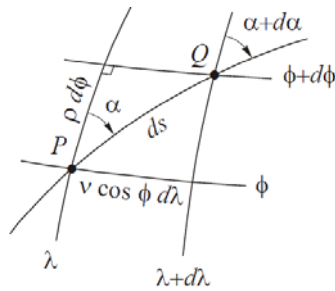
همچنین برخی روابط مورد نیاز در این بخش به صورت زیر آورده می شوند.

$$f = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}; \quad b = a(1-f); \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = f(2-f) \quad (10)$$

$$(e')^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{e^2}{1-e^2} = \frac{f(2-f)}{(1-f)^2} \quad (11)$$

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{and} \quad \nu = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} \quad (12)$$

همچنین مطابق نگاره (۳) در یک چهارضلعی ديفرانسیلی، مختصات نقطه Q بر اساس مختصات نقطه P و اختلاف مختصات ديفرانسیلی بین آنها به صورت $\varphi_Q = \varphi_P + \Delta\varphi$ و $\lambda_Q = \lambda_P + \Delta\lambda$ قابل محاسبه است.



نگاره ۳- چهارضلعی ديفرانسیلی بر روی بیضوی

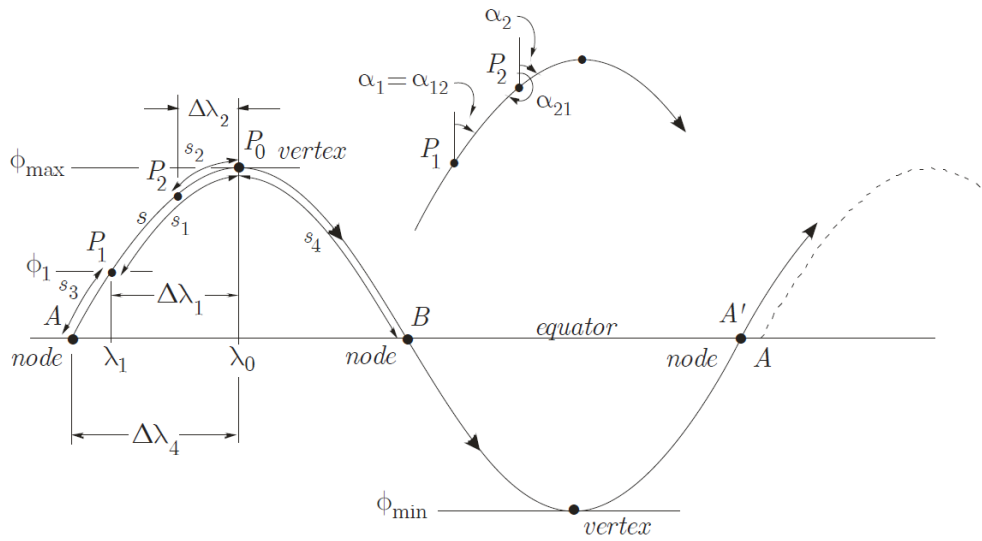
همچنین با توجه به هندسه چهارضلعی ديفرانسیلی، طول ديفرانسیلی ds و آزیموت P به Q (α)، می توان روابط زیر را تنظیم نمود.

$$ds \sin \alpha = \nu \cos \phi d\lambda \quad \text{and} \quad ds \cos \alpha = \rho d\phi \quad (13)$$

معادله مشخصه ژئودزیک

تعریف ریاضی خم ژئودزیک کمک شایانی در محاسبه طول آن و مسئله تعیین موقعیت (مستقیم و معکوس) بر روی بیضوی می کند. بر همین پایه، معادله زیر به عنوان معادله مشخصه ژئودزیک معرفی می شود.

$$\nu \cos \phi \sin \alpha = \text{constant} \quad (14)$$



نگاره ۴- نمایش کامل خم ژئودزیک گذرنده از دو نقطه A و B بر روی یک بیضوی

رابطه فوق نشاندهنده حاصل ضرب شعاع مداری در سینوس آزیموت هر نقطه دلخواه روی خم ژئودزیک است که کمیتی ثابت می باشد. ثابت بودن کمیت مذکور بیانگر این نکته است که حداکثر عرض ژئودتیک روی خم ژئودزیک، موسوم به راس خم (P_0)، کوچکترین شعاع مداری را فراهم می سازد که با توجه به معادله مشخصه ژئودزیک، باید $\sin \alpha$ به بزرگترین مقدار خود در روی خم ژئودزیک برسد. از آنجا که در نیمکره شمالی آزیموت در نقطه راس خم به 90° درجه می رسد، $\sin \alpha$ برابر یک شده و مقدار ثابت معادله مشخصه ژئودزیک در آن نقطه برابر با شعاع مداری می شود (نگاره ۴).

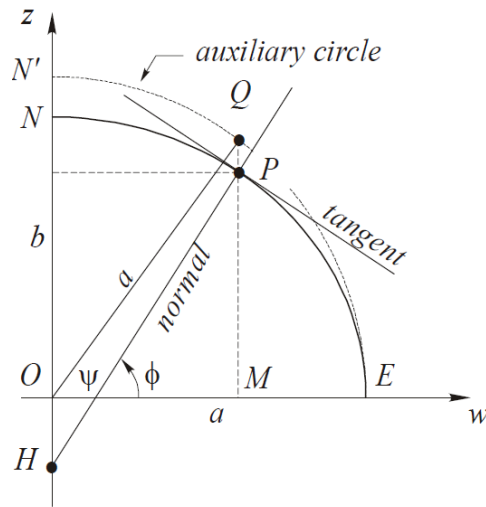
$$v_0 \cos \phi_0 = \text{constant} = v \cos \phi \sin \alpha \quad (15)$$

اکنون با فرض داشتن مختصات یک نقطه دلخواه مانند P_i به صورت (ϕ_i, λ_i) ، آزیموت ژئودتیک α_{ij}^E و طول ژئودتیک S_{ij}^E بر روی بیضوی، به ترتیب زیر عمل نموده و مختصات ژئودتیک نقطه P_j را به صورت (ϕ_j, λ_j) به دست می آوریم.

۱- تعیین عرض تبدیل یافته و عرض ژئودتیک P_i و راس خم ژئودزیک

مطابق نگاره (۵) با در نظر گرفتن رابطه عرض ژئودتیک (ϕ) و عرض تبدیل یافته (ψ)، معادله (۱۵) به صورت زیر بازنویسی می شود.

$$a \cos \psi_0 = a \cos \psi \sin \alpha \quad (16)$$



نگاره ۵- مقطع نصف النهاری یک بیضوی مرجع

بنابراین $\cos \psi_0$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\cos \psi_0 = \cos \psi \sin \alpha \quad (17)$$

با استفاده از قانون $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ می توان به رابطه زیر برای محاسبه آزیموت α رسید.

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{\cos^2 \psi - \cos^2 \psi_0}}{\cos \psi} \quad (18)$$

همچنین با استفاده از روابط زیر می توان عرض ژئودتیک راس خم را نیز به دست آورد.

$$\tan \psi = \frac{b}{a} \tan \phi = (1 - f) \tan \phi \quad (19)$$

$$\sin \phi = \frac{\sin \psi}{(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{1/2}} \quad (20)$$

۲- محاسبه فاصله و اختلاف طول ژئودتیک بین نقطه P_0 و P_i ($\Delta\lambda_1, S_1$)

بر اساس رابطه انتگرالی زیر می توان طول بین نقطه دلخواه P_i (نقطه با مختصات معلوم) و نقطه راس خم ژئودتیک P_0 را به دست آورد.

$$s_i = b \int_{p=u}^{p=u_0} \frac{(1 + \varepsilon p^2)^{1/2}}{(u_0^2 - p^2)^{1/2}} dp \quad (21)$$

که در آن $u = \sin \psi$ ، $u_0 = \sin \psi_0$ و $\varepsilon = (e')^2$ و $\sin \psi \leq p \leq \sin \psi_0$.

با اعمال بسط سری دو جمله ای و برخی مرتب سازی ها، نهایتاً به رابطه زیر برای محاسبه طول S_1 می رسیم.

$$\begin{aligned} s_i &= b \left\{ I_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \varepsilon^n u_0^{2n} B_n^{\frac{1}{2}} J_n \right\} \\ &= b I_0 + \frac{b}{2} \varepsilon u_0^2 B_1^{\frac{1}{2}} J_1 + \frac{b}{4} \varepsilon^2 u_0^4 B_2^{\frac{1}{2}} J_2 + \frac{b}{6} \varepsilon^3 u_0^6 B_3^{\frac{1}{2}} J_3 + \dots \\ &= D_0 + D_1 + D_2 + D_3 + \dots \end{aligned} \quad (22)$$

که در آن

$$I_0 = \int_{\theta = \arccos\left(\frac{u}{u_0}\right)}^0 (-1) d\theta = \arccos\left(\frac{u}{u_0}\right) = \arccos U$$

$$U = \frac{u}{u_0}$$

$$J_n = U^{2n-1} \sqrt{1-U^2} + \frac{2n-1}{2(n-1)} J_{n-1} \quad \text{for } n = 2, 3, \dots$$

$$J_1 = \frac{2I_1}{u_0^2} = U\sqrt{1-U^2} + I_0$$

$$B_n^{\frac{1}{2}} = \frac{3-2n}{2n} B_{n-1}^{\frac{1}{2}}, \quad n \geq 1 \text{ and } B_0^{\frac{1}{2}} = 1$$

بر اساس رابطه زیر می توان اختلاف طول ژئودتیک بین نقطه دلخواه P_i (نقطه با مختصات معلوم) و نقطه راس خم ژئودزیک P_0 را به دست آورد که با افزودن آن به طول ژئودتیک نقطه P_i (λ_i) به طول ژئودتیک نقطه P_0 (λ_0) می رسیم.

$$\Delta\lambda_i = \cos\psi_0 \{M_0 + M_1 + M_2 + M_3 + \dots\} \quad (23)$$

که در آن

$$M_n = \begin{cases} L_0 & \text{for } n = 0 \\ \left(\sqrt{1-e^2} - 1\right) I_0 & \text{for } n = 1 \\ \frac{1}{2} B_n^{\frac{1}{2}} (-1)^n e^{2n} K_n & \text{for } n \geq 2 \end{cases}$$

$$L_0 = \sec\psi_0 \int_{\frac{\tan\psi}{\tan\psi_0}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sec\psi_0 \arccos\left(\frac{\tan\psi}{\tan\psi_0}\right)$$

$$K_n = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^m}{m} u_0^{2m} B_m^{n-1} J_m \quad \text{for } n = 2, 3, 4, \dots$$

۳- محاسبه طول نقطه گرهی تا راس خم (S_4) و اختلاف طول ژئودتیک بین آنها
($\Delta\lambda_4$)

از آنجا که مطابق نگاره (۴) نقطه گرهی (A یا B) روی استوا قرار می گیرد، لذا $u = \sin \psi = 0$ و با استفاده از روابط و الگوریتم معرفی شده در بخش قبلی می توان به طول نقطه گرهی تا راس خم (S_4) و اختلاف طول ژئودتیک بین آنها ($\Delta\lambda_4$) دست یافت.

۴- محاسبه طول نقطه دوم P_j (مختصات مجهول) تا راس خم ژئودزیک (S_2)

با توجه به طول مفروض بین P_i و P_j بر روی بیضوی (S_{ij}^E) و طول محاسباتی بین P_i و راس خم (P_0)، طول بین P_j و راس خم (P_0) نیز از رابطه ساده زیر به دست می آید.

$$S_2 = \begin{cases} S_{ij}^E - S_1 & \text{با در نظر گرفتن نزدیکترین راس خم به نقطه } P_i \\ S_{ij}^E + S_1 & \text{با در نظر گرفتن دورترین راس خم به نقطه } P_i \end{cases}$$

اگر $S_2 > 0$ آنگاه نقطه P_j بعد از P_0 قرار دارد و اگر $S_2 < 0$ آنگاه P_j قبل از P_0 قرار دارد. توجه شود که در نگاره (۴)، $S_2 < 0$ زیرا P_j قبل از P_0 قرار دارد.

۵- محاسبه عرض تبدیل یافته ψ_j به صورت تکراری

در این بخش با یک مقدار تقریبی اولیه مانند ψ'_j که از رابطه زیر تعیین می شود محاسبات تکراری خود را آغاز می کنیم.

$$\sin \psi'_j = \sin \psi_0 \cos \left(\frac{S_2}{b} \right) \quad (24)$$

پس از تعیین مقدار تقریبی مذکور، با استفاده از رابطه تکراری زیر مقدار ψ_j را به دست می آوریم.

$$du = \frac{ds}{b} \sqrt{\frac{u_0^2 - u^2}{1 + \epsilon u^2}} \quad (25)$$

که در آن $u = \sin \psi'_j$ ، $ds = S'_2 - S_2$ و S'_2 نیز از مقدار تقریبی ψ'_j به دست می آید. پایه جواب تکراری فوق du و ds است که با دستیابی به یک مقدار حدی کوچک برای du می توان فرآیند تکرار را متوقف نمود. پس از تعیین ψ_j می توان مقدار φ_j را به کمک آن به دست آورد.

۶- محاسبه طول ژئودتیک نقطه مجهول (λ_j)

پس از تعیین عرض تبدیل یافته ψ_j ، به کمک رابطه (۲۳) می توان به اختلاف طول ژئودتیک نقطه مجهول تا نقطه راس خم ($\Delta\lambda_j$) و سپس به طول ژئودتیک نقطه مورد نظر رسید.

۷- تعیین آزیموت معکوس α_{ji}^E

آزیموت α_j در نقطه دوم (P_j) از رابطه (۱۵) قابل محاسبه می باشد. با اعمال تصحیح π به آن، آزیموت معکوس α_{ji}^E به دست می آید.

مسئله معکوس

در اینجا مختصات ژئودتیک دو نقطه P_i و P_j بر روی بیضوی داده شده اند و می خواهیم طول ژئودتیکی S_{ij}^E آزیموت ژئودتیکی مستقیم α_{ij}^E و معکوس α_{ji}^E را بر روی بیضوی به دست آوریم. برای این منظور از دستورالعمل زیر استفاده می کنیم.

۱- تبدیل طول ژئودتیک نقاط P_i و P_j

طول ژئودتیک نقاط P_i و P_j را به طول های شرقی تبدیل نموده به گونه ای که $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 2\pi$ و اختلاف آنها ($\Delta\lambda$) در محدوده $-\pi \leq \Delta\lambda \leq \pi$ محاسبه می شود. علامت $\Delta\lambda$ بستگی به جهت شرقی/غربی خم ژئودزیک از نقطه P_i دارد.

۲- محاسبه عرض تبدیل یافته ψ_i و ψ_j و محاسبه طول و آزیموت تقریبی

عرض های ژئودتیک φ_i و φ_j را با استفاده از رابطه (۱۹) به عرض های ψ_i و ψ_j تبدیل نموده و سپس با داشتن آنها و اختلاف طول ژئودتیک در مرحله قبل بر روی یک کره، می توان طول کروی σ و زوایای کروی β_1 و β_2 را به دست آورد. از این کمیت ها می توان برای محاسبه طول تقریبی S و آزیموت مستقیم تقریبی α_{ij} استفاده نمود.

۳- محاسبه عرض تبدیل یافته راس خم (ψ_0)

با استفاده از رابطه (۲۳) و صرفنظر از ترم های بالای آن، مقادیر تقریبی $\Delta\lambda'_1$ و $\Delta\lambda'_2$ به دست آمده و سپس مقدار ψ_0 به روش تکراری زیر تعیین می گردد.

$$\begin{aligned}\Delta\lambda'_1 &= \cos^{-1}\left(\frac{\tan\psi_1}{\tan\psi_0}\right) \\ \Delta\lambda'_2 &= \cos^{-1}\left(\frac{\tan\psi_2}{\tan\psi_0}\right) \\ f(\psi_0) &= \Delta\lambda' - \Delta\lambda \\ &= \left\{ \pm \cos^{-1}\left(\frac{\tan\psi_1}{\tan\psi_0}\right) \pm \cos^{-1}\left(\frac{\tan\psi_2}{\tan\psi_0}\right) \pm \Delta\lambda'_4 \right\} - \Delta\lambda\end{aligned}\quad (26)$$

علامت های فوق متناسب با جهت شرقی/غربی خم ژئودزیک تعیین می شوند. حال با استفاده از روش تکراری نیوتن رافسون می توان به مقدار ψ_0 رسید. مقدار اولیه ψ_0 را می توان از رابطه (۱۷) به دست آورد.

$$(\psi_0)_{n+1} = (\psi_0)_n - \frac{f(\psi_0)}{f'(\psi_0)} \quad (27)$$

۴- محاسبه طول و آزیموت مستقیم و معکوس

پس از معلوم شدن ψ_0 می توان مقادیر $S_1, \Delta\lambda_1, S_2, \Delta\lambda_2, S_4, \Delta\lambda_4$ و نهایتاً طول S بین دو نقطه را تعیین نمود. آزیموت مستقیم و معکوس نیز از رابطه معادله مشخصه خم ژئودزیک به دست می آید.

در پایان برای مثال پارامترهای عددی این روش برای عرض ژئودتیک $\varphi = 9^\circ 35' 24''$ و آزیموت $\alpha = 43^\circ 12' 36''$ روی بیضوی $GRS80$ در جدول (۱) آمده اند. همچنین ضرایب مختلف موجود در روابط گذشته نیز برای بیضوی مذکور در جدول های (۲)، (۳) و (۴) آمده اند.

جدول ۱- پارامترهای عددی خم ژئودزیک بر روی بیضوی GRS80

$$\begin{aligned}
 b &= a(1-f) = 6356752.314140356 \text{ metres} \\
 \psi &= \arctan[(1-f)\tan\phi] = 0.166826262923 \text{ radians} \\
 \psi_0 &= \arccos[\cos\psi \sin\alpha] = 0.829602797993 \text{ radians} \\
 u &= \sin\psi = 0.166053515348; \quad u_0 = \sin\psi_0 = 0.737663250899 \\
 U &= \frac{u}{u_0} = \frac{\sin\psi}{\sin\psi_0} = 0.225107479796; \quad I_0 = \arccos U = 1.343742980976 \text{ radians} \\
 V &= \frac{\tan\psi}{\tan\psi_0} = 0.154125311675; \quad L_0 = \sec\psi_0 \arccos V = 2.097333540996 \text{ radians}
 \end{aligned}$$

جدول ۲- ضرایب و ثابت های خم ژئودزیک بر روی بیضوی GRS80 در معادله های (۲۲) و (۲۳)

n	e^{2n}	ε^n	u_0^{2n}	$B_n^{\frac{1}{2}}$
1	6.694380022901e-003	6.739496775479e-003	0.544147071727	0.500000000000
2	4.481472389101e-005	4.542081678669e-005	0.296096035669	-0.125000000000
3	3.000067923478e-007	3.061134482735e-007	0.161119790759	0.062500000000
4	2.008359477428e-009	2.063050597570e-009	0.087672862339	-0.039062500000
5	1.344472156450e-011	1.390392284997e-011	0.047706931312	0.027343750000
6	9.000407545482e-014	9.370544321391e-014	0.025959586974	-0.020507812500
7	6.025214847044e-016	6.315275323850e-016	0.014125833235	0.016113281250
8	4.033507790574e-018	4.256177768135e-018	0.007686530791	-0.013092041016

جدول ۳- مقادیر بازگشتی در معادله (۲۲)

n	J_n	D_n	
1	1.563072838216	8.541841303930e+006	8541841.303930 m
2	2.355723441968	9.109578467516e+003	9109.5784675
3	2.945217495733	-6.293571169346e+000	-6.2935712
4	3.436115617261	9.618619108010e-003	0.0096186
5	3.865631515581	-1.929070816523e-005	-0.0000193
6	4.252194740421	4.456897529564e-008	0.0000000
7	4.606544305836	-1.123696751599e-010	-0.0000000
8	4.935583185013	3.006580650377e-013	0.0000000
	sum	8.550944598425e+006	s = 8550944.598425 m

جدول ۴- مقادیر بازگشتی در معادله (۲۳)

n	J_n	M_n	
0		2.097333540996e+000	
1	1.563072838216	-4.505315819380e-003	
2	2.355723441968	2.382298926901e-006	
3	2.945217495733	1.267831357153e-008	
4	3.436115617261	6.525291638252e-011	
5	3.865631515581	3.431821056093e-013	
6	4.252194740421	1.852429353592e-015	$\Delta\lambda = \cos \psi_0 (sum) \cong 1.413013969112 \text{ radians}$ $= 80.959736823113 \text{ degrees}$ $= 80^\circ 57' 35.052563''$
7	4.606544305836	1.023576994037e-017	
8	4.935583185013	5.769507252421e-020	
	<i>sum</i>	2.092830620219e+000	

همچنین برای حل مستقیم بر اساس روابط مثلثات کروی (۱) و (۲)، می توان φ_j و $\Delta\lambda_{ij}$ را بدون پیچیدگی های روابط قبلی تعیین نمود.

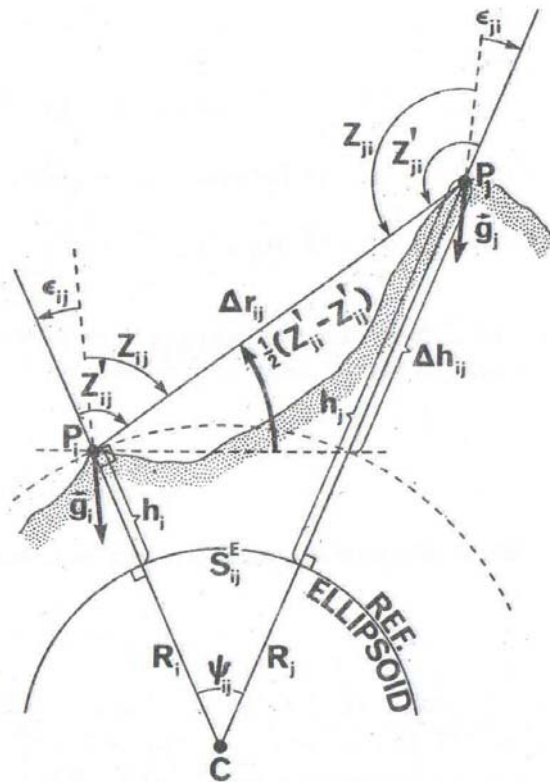
$$\varphi_j = \sin^{-1}(\sin \varphi_i \cos \widehat{P_i P_j} + \cos \varphi_i \sin \widehat{AB} \cos \alpha_{ij}) \quad (28)$$

$$\widehat{P_i P_j} = \frac{S_{ij}^E}{R_\alpha} \text{ که در آن}$$

$$\Delta\lambda_{ij} = \sin^{-1} \left(\frac{\sin \widehat{P_i P_j} \sin \alpha_{ij}}{\cos \varphi_j} \right) \quad (29)$$

تعیین موقعیت ارتفاعی نسبی

مطابق نگاره (۶) مشاهدات مورد نیاز در تراز یابی مثلثاتی عبارتند از: زاویه قائم بر روی نقطه $P_i (Z_{ij})$ ، زاویه قائم بر روی نقطه $P_j (Z_{ji})$ ، و طول فضایی Δr_{ij} . از آنجا که محاسبات تعیین موقعیت بر روی بیضوی انجام می گیرد، لذا بر پایه روابط مورد بحث در فصل ششم، هر سه مشاهده مذکور به مشاهدات ژئودتیک تبدیل می شوند و به جای Z_{ij} ، Z_{ji} و Δr_{ij} به ترتیب Z'_{ij} ، Z'_{ji} و S_{ij}^E را خواهیم داشت. همچنین به مقادیر تقریبی ارتفاعات ژئودتیک نقاط P_i و P_j (h_i و h_j) نیز نیاز می باشد.



نگاره ۶- ارتفاع یابی مثلثاتی

بر اساس فرمول تانژانت ها در مثلث CP_iP_j خواهیم داشت:

$$\frac{(R_m + h_j - R_m - h_i)}{(R_m + h_j + R_m + h_i)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\pi - Z'_{ij} - \pi + Z'_{ji})}{\tan \frac{1}{2}(\pi - Z'_{ij} + \pi - Z'_{ji})} \quad (30)$$

که در آن $R_m = \frac{R_{\alpha_{ij}} + R_{\alpha_{ji}}}{2}$

با اندکی مرتب سازی به رابطه زیر می رسیم.

$$\Delta h_{ij} = h_j - h_i = \frac{(2R_m + 2h_m) \tan \frac{1}{2}(Z'_{ji} - Z'_{ij})}{\tan \frac{1}{2}(\pi - (Z'_{ji} + Z'_{ij} - \pi))} \quad (31)$$

$$h_m = \frac{1}{2}(h_i + h_j) \text{ که در آن}$$

از طرفی با تقریب کروی رابطه زیر را داریم.

$$\psi_{ij} = (Z'_{ij} + Z'_{ji}) - \pi = S_{ij}^E / R_m \quad (32)$$

با در نظر گرفتن رابطه (32)، می توان (31) را به صورت زیر بازنویسی نمود.

$$\Delta h_{ij} = h_j - h_i = \frac{(2R_m + 2h_m) \tan \frac{1}{2}(Z'_{ji} - Z'_{ij})}{\cot(S_{ij}^E / 2R_m)} \quad (33)$$

$$\Delta h_{ij} = \tan(S_{ij}^E / 2R_m) (2R_m + 2h_m) \tan \frac{1}{2}(Z'_{ji} - Z'_{ij})$$

حال با بسط سری تیلور برای تابع تانژانت ($\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$) و اکتفا به دو جمله اول آن به رابطه زیر می رسیم.

$$\Delta h_{ij} \doteq \left(\frac{S_{ij}^E}{R_m} + \frac{(S_{ij}^E)^3}{12R_m^3} \right) (R_m + h_m) \tan \frac{1}{2}(Z'_{ji} - Z'_{ij}) \quad (34)$$

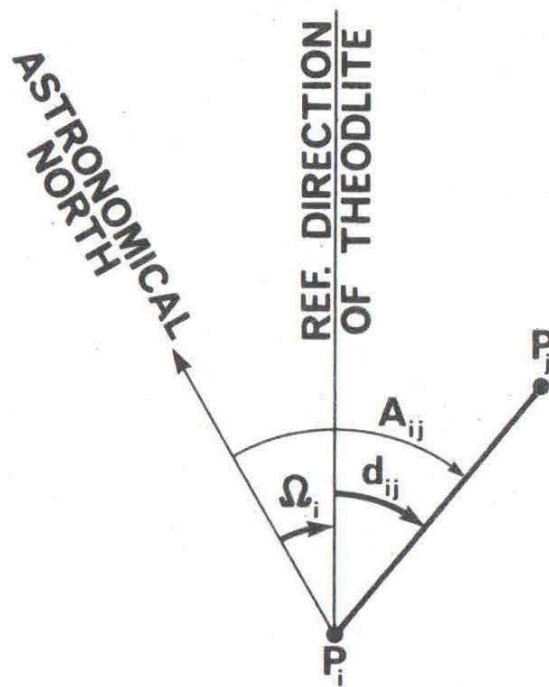
اکنون با ساده سازی و مرتب سازی رابطه (34) به رابطه نهایی زیر برای اختلاف ارتفاع ژئودتیک بین دو نقطه P_i و P_j می رسیم.

$$\Delta h_{ij} \doteq S_{ij}^E \left(1 + \frac{h_m}{R_m} + \frac{S_{ij}^{E2}}{12R_m^2} \right) \tan \left(\frac{Z'_{ji} - Z'_{ij}}{2} \right) \quad (35)$$

مدل ریاضی و سرشکنی در شبکه های دو بعدی

همانطور که قبلا می دانیم، به دلیل وجود مشاهدات اضافی در شبکه های نقشه برداری می بایست سرشکنی انجام گیرد. بر خلاف شبکه های مسطحاتی که با معادلات مشاهدات و چگونگی سرشکنی مشاهدات در درس سرشکنی آشنا شده ایم، معادلات مشاهدات شبکه های ژئودزی متفاوت از آنها می باشند و در این بخش به آنها پرداخته می شود. در شبکه های ژئودزی دو بعدی، پس از تبدیل مشاهدات بر روی بیضوی باید معادلات مشاهدات هر یک نوشته و سپس فرم خطی آن را برای انجام سرشکنی به روش پارامتریک بنویسیم.

• معادله مشاهده آزیموت نجومی



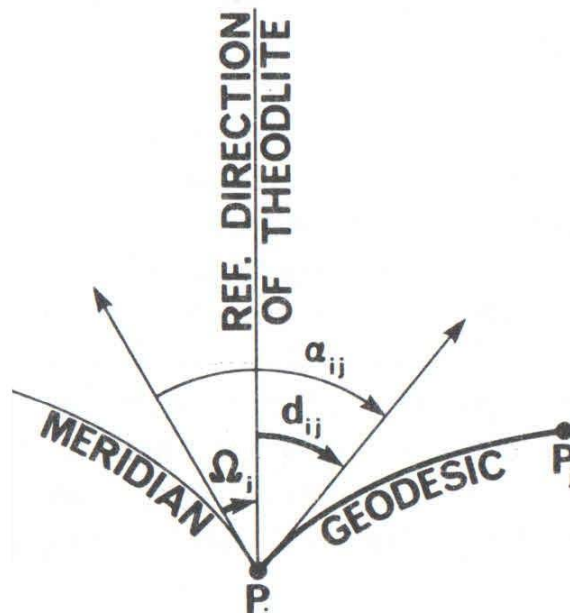
نگاره ۷- مشاهده آزیموت و امتداد نجومی

مطابق نگاره (۷) مشاهده آزیموت نجومی تابع مختصات ژئودتیک نقطه استقرار P_i و نقطه نشانه روی P_j است که معادله مشاهده خطی شده آن به صورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= A(\varphi_i, \lambda_i, \varphi_j, \lambda_j) \\
 r_{ij}^A &= \frac{\partial A}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial A}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i + \frac{\partial A}{\partial \varphi_j} \delta \varphi_j + \frac{\partial A}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j + A_{ij}^0 - A_{ij} \quad (36) \\
 r_{ij}^A &= a_1 \delta \varphi_i + a_2 \delta \lambda_i + a_4 \delta \varphi_j + a_5 \delta \lambda_j + A_{ij}^0 - A_{ij}
 \end{aligned}$$

در معادله فوق ضرایب a_i مشتقات جزئی معادله مشاهده آزیموت نسبت به مولفه های مختصات ژئودتیک نقاط P_i و P_j هستند که در جدول (۵) معرفی شده اند.

• معادله مشاهده آزیموت ژئودتیک



نگاره ۸- مشاهده آزیموت و امتداد ژئودتیک

مشاهده آزیموت ژئودتیک تابع مختصات ژئودتیک نقطه استقرار P_i و نقطه نشانه روی P_j است که معادله مشاهده خطی شده آن به صورت زیر می باشد.

$$\alpha_{ij} = \alpha(\varphi_i, \lambda_i, \varphi_j, \lambda_j)$$

$$r_{ij}^{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_j} \delta \varphi_j + \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j + \alpha_{ij}^0 - \alpha_{ij} \quad (37)$$

$$r_{ij}^{\alpha} = a'_1 \delta \varphi_i + a'_2 \delta \lambda_i + a'_4 \delta \varphi_j + a'_5 \delta \lambda_j + \alpha_{ij}^0 - \alpha_{ij}$$

در معادله فوق ضرایب a'_i مشتقات جزئی معادله مشاهده آزیموت ژئودتیک نسبت به مولفه های مختصات ژئودتیک نقاط P_i و P_j هستند که در جدول (۵) معرفی شده اند.

• معادله مشاهده امتداد

مطابق نگاره (۸) مشاهده امتداد نیز تابعی از مختصات ژئودتیک نقطه استقرار P_i و نقطه نشانه روی P_j و صفر لمب افقی است که معادله مشاهده خطی شده آن به صورت زیر می باشد.

$$d_{ij} = d(\varphi_i, \lambda_i, \varphi_j, \lambda_j, \Omega_i)$$

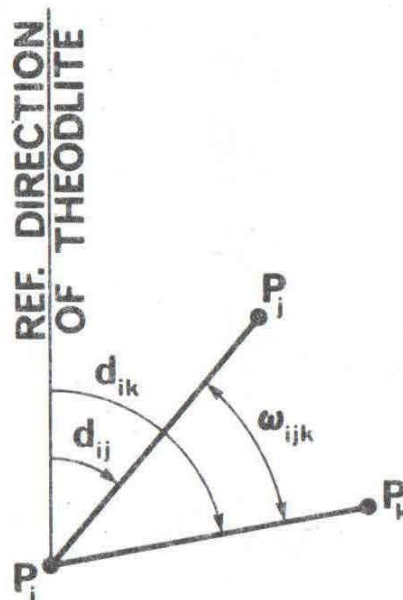
$$r_{ij}^d = \frac{\partial d}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial d}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i + \frac{\partial d}{\partial \varphi_j} \delta \varphi_j + \frac{\partial d}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j - \delta \Omega_i + \alpha_{ij}^0 - d_{ij} \quad (38)$$

$$- \Omega_i^0$$

$$r_{ij}^d = a'_1 \delta \varphi_i + a'_2 \delta \lambda_i + a'_4 \delta \varphi_j + a'_5 \delta \lambda_j - \delta \Omega_i + \alpha_{ij}^0 - d_{ij} - \Omega_i^0$$

در معادله فوق ضرایب a'_i مشتقات جزئی معادله مشاهده آزیموت ژئودتیک نسبت به مولفه های مختصات ژئودتیک نقاط P_j و P_i هستند که در جدول (۵) معرفی شده اند.

• معادله مشاهده زاویه



نگاره ۹- مشاهده زاویه ژئودتیک به صورت اختلاف دو امتداد

مطابق نگاره (۹) مشاهده زاویه به صورت اختلاف دو امتداد می تواند در نظر گرفته شود که بنابراین تابعی از مختصات ژئودتیک نقطه استقرار P_i و نقطه های نشانه روی P_j و P_k است که معادله مشاهده خطی شده آن به صورت زیر می باشد.

$$\omega_{ijk} = \omega(\varphi_i, \lambda_i, \varphi_j, \lambda_j, \varphi_k, \lambda_k)$$

$$r_{ij}^\omega = \frac{\partial \omega}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi_j} \delta \varphi_j + \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi_k} \delta \varphi_k + \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_k} \delta \lambda_k \quad (39)$$

$$+ \omega_{ijk}^0 - \omega_{ijk}$$

$$r_{ij}^\omega = (a'_1(k) - a'_1(j)) \delta \varphi_i + (a'_2(k) - a'_2(j)) \delta \lambda_i - a'_4(j) \delta \varphi_j$$

$$- a'_5(j) \delta \lambda_j + a'_4(k) \delta \varphi_k + a'_5(k) \delta \lambda_k + \alpha_{ij}^0 - \alpha_{ij}$$

در معادله فوق ضرایب a'_i مشتقات جزئی معادله مشاهده زاویه نسبت به مولفه های مختصات ژئودتیک نقاط P_i , P_j و P_k هستند که در جدول (۵) معرفی شده اند.

• معادله مشاهده طول فضایی

مشاهده طول فضایی نیز تابعی از مختصات ژئودتیک نقطه استقرار P_i و نقطه نشانه روی P_j است که معادله مشاهده خطی شده آن به صورت زیر می باشد.

$$\Delta r_{ij} = \Delta r(\varphi_i, \lambda_i, \varphi_j, \lambda_j)$$

$$r_{ij}^{\Delta r} = \frac{\partial \Delta r}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial \Delta r}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i + \frac{\partial \Delta r}{\partial \varphi_j} \delta \varphi_j + \frac{\partial \Delta r}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j + \Delta r_{ij}^0 - \Delta r_{ij} \quad (40)$$

$$r_{ij}^{\Delta r} = c_1 \delta \varphi_i + c_2 \delta \lambda_i + c_4 \delta \varphi_j + c_5 \delta \lambda_j + \Delta r_{ij}^0 - \Delta r_{ij}$$

در معادله فوق ضرایب C_i مشتقات جزئی مشاهده طول فضایی نسبت به مولفه های مختصات ژئودتیک نقاط P_i و P_j هستند که در جدول (۵) معرفی شده اند.

• معادله مشاهده طول ژئودتیک

مشاهده طول ژئودتیک نیز تابعی از مختصات ژئودتیک نقطه استقرار P_i و نقطه نشانه روی P_j است که معادله مشاهده خطی شده آن به صورت زیر می باشد.

$$S_{ij} = S(\varphi_i, \lambda_i, \varphi_j, \lambda_j)$$

$$r_{ij}^S = \frac{\partial S}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i + \frac{\partial S}{\partial \varphi_j} \delta \varphi_j + \frac{\partial S}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j + S_{ij}^0 - S_{ij} \quad (41)$$

$$r_{ij}^S = c'_1 \delta \varphi_i + c'_2 \delta \lambda_i + c'_4 \delta \varphi_j + c'_5 \delta \lambda_j + S_{ij}^0 - S_{ij}$$

در معادله فوق ضرایب C_i' مشتقات جزئی مشاهده طول ژئودتیک نسبت به مولفه های مختصات ژئودتیک نقاط P_i و P_j هستند که در جدول (۵) معرفی شده اند.

جدول ۵- مشتقات جزئی معادلات مشاهدات ژئودزی نسبت به مولفه های مختصات ژئودتیک

Unknown	Subscript	'Observed' α or d (or ω)	'Observed' S
		a'	c'
ϕ_i	1	$M \sin \alpha / S$	$- M \cos \alpha$
λ_i	2	$N' \cos \alpha' \cos \phi' / S$	$N' \sin \alpha' \cos \phi'$
ϕ_j	4	$M' \sin \alpha' / S$	$- M' \cos \alpha'$
λ_j	5	$- N' \cos \alpha' \cos \phi' / S$	$- N' \sin \alpha' \cos \phi'$

در جدول (۵) M شعاع انحنای نصف النهاری، N شعاع انحنای قائم اولیه، علامت ' بیانگر کمیت ها برای نقطه P_j یا آزیموت معکوس است. چنانچه مدل ریاضی غیر خطی کلی معادلات مشاهدات را به صورت زیر نمایش دهیم:

$$\underline{l} = \underline{f}(\underline{x}) \quad (42)$$

و بردار مختصات ژئودتیک تقریبی را با \underline{x}_0 بردار اختلاف مختصات را با $\Delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{x}_0$ بردار مشاهدات را با \underline{l} بردار مشاهدات تقریبی را با $\underline{l}_0 = \underline{f}(\underline{x}_0)$ بردار اختلاف مشاهدات را با $\Delta \underline{l} = \underline{l} - \underline{l}_0$ ماتریس وزن را با \underline{P} و ماتریس مشتقات جزئی را با $\underline{A} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}$ نمایش دهیم، در آن صورت برآورد سرشکنی کمترین مربعات اختلاف مختصات و ماتریس وریانس کوریانس آنها به صورت زیر خواهد بود.

$$\Delta \hat{\underline{x}} = (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{P} \Delta \underline{l} \quad (43)$$

$$\hat{\underline{x}} = \underline{x}_0 + \Delta \hat{\underline{x}}$$

$$\underline{C}_{\hat{\underline{x}}} = (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} \quad (44)$$

در پایان این بخش باید اضافه نماییم که امکان سرشکنی مشاهدات پس از انتقال از روی بیضوی بر روی صفحه نقشه نیز وجود دارد که در این صورت سرشکنی بر روی صفحه نقشه انجام می گیرد.

مدل ریاضی و سرشکنی در شبکه های سه بعدی

چنانچه هدف از انجام مشاهداتی مانند آزمون نجومی A_{ij} ، زاویه قائم v_{ij} (یا معادل آن زاویه زینتی Z_{ij})، طول فضایی Δr_{ij} ، عرض نجومی Φ_i ، و طول نجومی Λ_i دستیابی به مختصات سه بعدی کارترین نقطه های P_i و P_j باشد، در این صورت می توان معادلات مشاهدات آنها را بر قرار نمود و پس از تشکیل معادلات به سرشکنی آنها پرداخت.

مدل ریاضی عمومی مورد استفاده که ارتباط بین مختصات نقاط و مشاهدات را در یک دستگاه مختصات نجومی محلی (LA) بیان می کند، به صورت زیر معرفی می شود.

$$f_{ij} \left(\overbrace{x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j}^{\text{unknowns}}; \overbrace{A_{ij}, v_{ij}, \Delta r_{ij}, \Phi_i, \Lambda_i}^{\text{observables}} \right) = 0 \quad (45)$$

مشابه با مدل ریاضی و سرشکنی دو بعدی، معادلات مشاهدات خطی شده برای مدل ریاضی و سرشکنی سه بعدی نیز به ترتیب زیر برای مشاهدات مختلف معرفی می شوند.

• معادله مشاهده آزمون نجومی

معادله مشاهده خطی شده آزمون نجومی به عنوان تابعی از مختصات ژئودتیک سه بعدی نقطه استقرار P_i و نقطه نشانه روی P_j و مختصات نجومی P_i به صورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A(\varphi_i, \lambda_i, h_i, \varphi_j, \lambda_j, h_j, \Phi_i, \Lambda_i) \\ r_{ij}^A &= \frac{\partial A}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial A}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i + \frac{\partial A}{\partial h_i} \delta h_i + \frac{\partial A}{\partial \varphi_j} \delta \varphi_j + \frac{\partial A}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j + \frac{\partial A}{\partial h_j} \delta h_j \\ &\quad + \frac{\partial A}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i + \frac{\partial A}{\partial \Lambda_i} \delta \Lambda_i + A_{ij}^0 - A_{ij} \\ r_{ij}^A &= a_1 \delta \varphi_i + a_2 \delta \lambda_i + a_3 \delta h_i + a_4 \delta \varphi_j + a_5 \delta \lambda_j + a_6 \delta h_j + a_7 \delta \Phi_i \\ &\quad + a_8 \delta \Lambda_i + A_{ij}^0 - A_{ij} \end{aligned} \quad (46)$$

در معادله فوق ضرایب a_i مشتقات جزئی معادله مشاهده آزمون نسبت به مولفه های مختصات ژئودتیک و نجومی نقاط P_j و P_i هستند که در جدول (۶) معرفی شده اند.

• معادله مشاهده امتداد

معادله مشاهده خطی شده امتداد به عنوان تابعی از مختصات ژئودتیک سه بعدی نقطه استقرار P_i و نقطه نشانه روی P_j ، مختصات نجومی P_i و صفر لمب افقی به صورت زیر می باشد.

$$d_{ij} = d(\varphi_i, \lambda_i, h_i, \varphi_j, \lambda_j, h_j, \Phi_i, \Lambda_i, \Omega_i)$$

$$r_{ij}^d = \frac{\partial d}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial d}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i + \frac{\partial d}{\partial h_i} \delta h_i + \frac{\partial d}{\partial \varphi_j} \delta \varphi_j + \frac{\partial d}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j + \frac{\partial d}{\partial h_j} \delta h_j \quad (47)$$

$$+ \frac{\partial d}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i + \frac{\partial d}{\partial \Lambda_i} \delta \Lambda_i - \delta \Omega_i + A_{ij}^0 - d_{ij} - \Omega_i^0$$

$$r_{ij}^d = a_1 \delta \varphi_i + a_2 \delta \lambda_i + a_3 \delta h_i + a_4 \delta \varphi_j + a_5 \delta \lambda_j + a_6 \delta h_j + a_7 \delta \Phi_i$$

$$+ a_8 \delta \Lambda_i - \delta \Omega_i + A_{ij}^0 - d_{ij} - \Omega_i^0$$

در معادله فوق ضرایب a_i مشتقات جزئی معادله مشاهده امتداد نسبت به مولفه های مختصات ژئودتیک و نجومی نقاط P_i و P_j هستند که در جدول (۶) معرفی شده اند.

• معادله مشاهده زاویه افقی

معادله مشاهده خطی شده زاویه افقی به صورت اختلاف دو امتداد می تواند در نظر گرفته شود که بنابراین تابعی از مختصات ژئودتیک نقطه استقرار P_i و نقطه های نشانه روی P_j و P_k و مختصات نجومی P_i است که به صورت زیر می باشد.

$$\omega_{ijk} = \omega(\varphi_i, \lambda_i, h_i, \varphi_j, \lambda_j, h_j, \varphi_k, \lambda_k, h_k, \Phi_i, \Lambda_i)$$

$$r_{ij}^\omega = \frac{\partial \omega}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i + \frac{\partial \omega}{\partial h_i} \delta h_i + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi_j} \delta \varphi_j + \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j + \frac{\partial \omega}{\partial h_j} \delta h_j \quad (48)$$

$$+ \frac{\partial \omega}{\partial \varphi_k} \delta \varphi_k + \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_k} \delta \lambda_k + \frac{\partial \omega}{\partial h_j} \delta h_j + \frac{\partial \omega}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i + \frac{\partial \omega}{\partial \Lambda_i} \delta \Lambda_i$$

$$+ \omega_{ijk}^0 - \omega_{ijk}$$

$$r_{ij}^\omega = (a_1(k) - a_1(j)) \delta \varphi_i + (a_2(k) - a_2(j)) \delta \lambda_i$$

$$+ (a_3(k) - a_3(j)) \delta h_i + a_4(j) \delta \varphi_j + a_5(j) \delta \lambda_j$$

$$+ a_6(j) \delta h_j + a_4(k) \delta \varphi_k + a_5(k) \delta \lambda_k + a_6(k) \delta h_k$$

$$+ (a_7(k) - a_7(j)) \delta \Phi_i + (a_8(k) - a_8(j)) \delta \Lambda_i + \omega_{ijk}^0$$

$$- \omega_{ijk}$$

در معادله فوق ضرایب a_i مشتقات جزئی معادله مشاهده امتداد نسبت به مولفه های مختصات ژئودتیک و نجومی نقاط P_i ، P_j و P_k هستند که در جدول (۶) معرفی شده اند.

• معادله مشاهده زاویه قائم

معادله مشاهده خطی شده زاویه قائم به عنوان تابعی از مختصات ژئودتیک نقطه استقرار P_i و نقطه نشانه روی P_j و مختصات نجومی P_i به صورت زیر می باشد.

$$v_{ij} = v(\varphi_i, \lambda_i, h_i, \varphi_j, \lambda_j, h_j, \Phi_i, \Lambda_i)$$

$$r_{ij}^v = \frac{\partial v}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial v}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i + \frac{\partial v}{\partial h_i} \delta h_i + \frac{\partial v}{\partial \varphi_j} \delta \varphi_j + \frac{\partial v}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j + \frac{\partial v}{\partial h_j} \delta h_j \quad (49)$$

$$+ \frac{\partial v}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i + \frac{\partial v}{\partial \Lambda_i} \delta \Lambda_i + v_{ij}^0 - v_{ij}$$

$$r_{ij}^v = b_1 \delta \varphi_i + b_2 \delta \lambda_i + b_3 \delta h_i + b_4 \delta \varphi_j + b_5 \delta \lambda_j + b_6 \delta h_j + b_7 \delta \Phi_i$$

$$+ b_8 \delta \Lambda_i + v_{ij}^0 - v_{ij}$$

در معادله فوق ضرایب b_i مشتقات جزئی معادله مشاهده زاویه قائم نسبت به مولفه های مختصات ژئودتیک و نجومی نقاط P_i و P_j هستند که در جدول (۶) معرفی شده اند.

• معادله مشاهده طول فضایی

مشاهده طول فضایی به عنوان تابعی از مختصات ژئودتیک سه بعدی نقطه استقرار P_i و نقطه نشانه روی P_j است که معادله مشاهده خطی شده آن به صورت زیر می باشد.

$$\Delta r_{ij} = \Delta r(\varphi_i, \lambda_i, h_i, \varphi_j, \lambda_j, h_j)$$

$$r_{ij}^{\Delta r} = \frac{\partial \Delta r}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial \Delta r}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i + \frac{\partial \Delta r}{\partial h_i} \delta h_i + \frac{\partial \Delta r}{\partial \varphi_j} \delta \varphi_j + \frac{\partial \Delta r}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j \quad (50)$$

$$+ \frac{\partial \Delta r}{\partial h_j} \delta h_j + \Delta r_{ij}^0 - \Delta r_{ij}$$

$$r_{ij}^{\Delta r} = c_1 \delta \varphi_i + c_2 \delta \lambda_i + c_3 \delta h_i + c_4 \delta \varphi_j + c_5 \delta \lambda_j + c_6 \delta h_j + \Delta r_{ij}^0$$

$$- \Delta r_{ij}$$

در معادله فوق ضرایب c_i مشتقات جزئی مشاهده طول فضایی نسبت به مولفه های مختصات ژئودتیک نقاط P_i و P_j هستند که در جدول (۶) معرفی شده اند.

• معادله مشاهده عرض و طول نجومی

این نوع مشاهدات خطی هستند ولی چون در کنار سایر مشاهدات غیر خطی قرار می گیرند، فرمت خطی شده آنها به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} r_i^\Phi &= \delta\Phi_i + \Phi_i^0 - \Phi_i \\ r_i^\Lambda &= \delta\Lambda_i + \Lambda_i^0 - \Lambda_i \end{aligned} \quad (51)$$

چنانچه به جای مشاهده عرض و طول نجومی، مولفه های انحراف قائم داده شوند، در این صورت فرمت خطی شده آنها به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} r_i^\xi &= \delta\Phi_i - \delta\varphi_i \\ r_i^\eta &= \sec\varphi_i \delta\Lambda_i - \sec\varphi_i \delta\lambda_i \end{aligned} \quad (52)$$

• معادله مشاهده اختلاف ارتفاع ژئودتیک

این نوع مشاهده نیز خطی است ولی چون در کنار سایر مشاهدات غیر خطی قرار می گیرد، فرمت خطی شده آن به صورت زیر است.

$$r_{ij}^{\Delta h} = -\delta h_i + \delta h_j + \Delta h_{ij}^0 - \Delta h_{ij} \quad (53)$$

جدول ۶- مشتقات جزیی معادلات مشاهدات سه بعدی نسبت به مولفه های مختصات ژئودتیک و نجومی

Un-known	sub-script	Observed A or d (or ω)	Observed ν (or Z)	Observed Δr
		a	b	c
ϕ_i	1	$(M+h)\sin A/(\Delta r \cos \nu)$	$(M+h)\cos A \sin \nu/\Delta r$	$-(M+h)\cos A \cos \nu$
λ_i	2	$-(N+h)\cos \phi \cos A/(\Delta r \cos \nu)$	$(N+h)\cos \phi \sin A \sin \nu/\Delta r$	$-(N+h)\cos \phi \sin A \cos \nu$
h_i	3	0	$-\cos \nu/\Delta r$	$-\sin \nu$
ϕ_j	4	$-(M'+h')\sin \phi \sin \phi' \cos \Delta \lambda \sin A + \sin \phi' \cos A \sin \Delta \lambda + \cos \phi \cos \phi' \sin A)/(\Delta r \cos \nu) \doteq (M'+h')\sin A'/(\Delta r \cos \nu)$	$-(M'+h')(\cos \phi \sin \phi' \cos \Delta \lambda - \sin \phi \cos \phi' - \cos A' \times \sin \nu \cos \nu') \sec \nu/\Delta r \doteq -(M'+h')\cos A' \sin \nu'/\Delta r$	$-(M'+h')\cos A' \cos \nu'$
λ_j	5	$(N'+h')\cos \phi'(\cos \Delta \lambda \cos A - \sin \phi \sin \Delta \lambda \sin A)/(\Delta r \cos \nu) \doteq -(N'+h')\cos \phi' \cos A'/(\Delta r \cos \nu')$	$-(N'+h')\cos \phi'(\cos \phi \sin \Delta \lambda - \sin A' \sin \nu \cos \nu') \times \sec \nu/\Delta r \doteq -(N'+h')\cos \phi' \sin A' \sin \nu'/\Delta r$	$-(N'+h')\cos \phi' \sin A' \cos \nu'$
h_j	6	0 (for $ h_j - h_i < 1$ m)	$(\cos \phi \cos \phi' \cos \Delta \lambda + \sin \phi \sin \phi' + \sin \nu \sin \nu') \times \sec \nu/\Delta r \doteq \cos \nu'/\Delta r$	$-\sin \nu'$
Φ_i	7	$\sin A \tan \nu$	$\cos A$	0
Λ_j	8	$\sin \phi - \cos \phi \cos A \tan \nu$	$\cos \phi \sin A$	0

با در نظر گرفتن معادلات مشاهدات فوق و تشکیل بردار مختصات ژئودتیک تقریبی \underline{x}_0 ، بردار اختلاف مختصات $\Delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{x}_0$ ، بردار مشاهدات \underline{l} ، بردار مشاهدات تقریبی $\underline{l}_0 = f(\underline{x}_0)$ ، بردار اختلاف مشاهدات $\Delta \underline{l} = \underline{l} - \underline{l}_0$ ، ماتریس وزن \underline{P} و ماتریس مشتقات جزئی $\underline{A} = \frac{\partial f}{\partial \underline{x}}$ ، برآورد سرشکنی کمترین مربعات اختلاف مختصات و ماتریس وریانس کوریانس آنها از روابط (۴۳) و (۴۴) به دست خواهد آمد.

فصل ۸

سیستم های تصویر متشابه در ژئودزی
(با تاکید بر UTM)

در بسیاری از مواقع لازم است عوارض تصویر شده بر روی سطح بیضوی مرجع زمین از جمله موقعیت ایستگاه ها و طول ها و زوایا به یک صفحه مسطح نگاشت شوند. مدل ریاضی مورد استفاده در نگاشت از سطح منحنی بیضوی (سطح سه بعدی) را به سطح تخت (سطح دو بعدی) سیستم تصویر می گویند. از آنجا که یک سطح سه بعدی به یک سطح دو بعدی تبدیل می شود به ناچار اعوجاجاتی در آن به وجود می آید که اجتناب ناپذیرند. با توجه به تاثیر سیستم های تصویر مختلف در تولید انواع اعوجاجات و اهمیت آن برای کاربران مختلف، سیستم های تصویر را در سه دسته کلی با ویژگی های زیر طبقه بندی کرده اند.

- سیستم های تصویر هم زاویه (متشابه)
- سیستم های تصویر هم طول
- سیستم های تصویر هم مساحت

از بین سه دسته فوق، سیستم های تصویر متشابه در ژئودزی و نمایش عوارض زمینی دارای کاربرد بیشتری هستند. در این نوع سیستم های تصویر اندازه زوایای روی سطح بیضوی پس از تصویر به همان اندازه اصلی خود حفظ می شوند و در واقع اندازه زوایا قبل و بعد از تصویر با هم برابرند. این به معنی حفظ شکل هندسی در اینگونه سیستم های تصویر است. در این فصل تلاش می شود با بهره گیری از سیستم های تصویر متشابه روابط مربوط به تبدیل عرض و طول ژئودتیک هر نقطه دلخواه بر روی بیضوی مانند (φ_i, λ_i) به مختصات دو بعدی آن بر روی صفحه تصویر (X_i, Y_i) و بر عکس را ارائه نماییم.

مروری بر هندسه دیفرانسیل سطوح

معادلات پارامتریک یک سطح در یک دستگاه مختصات کارتزین عبارت است از:

$$\begin{aligned} x &= X(\varphi, \lambda) \\ y &= Y(\varphi, \lambda) \\ z &= Z(\varphi, \lambda) \end{aligned} \quad (1)$$

همانطور که قبلا می دانیم x ، y و z مختصات کارتزین و φ و λ مختصات منحنی الخط نامیده می شوند. برای مثال معادلات پارامتریک سطح بیضوی به صورت زیر می باشند.

$$\begin{aligned} x &= v \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= v \cos \varphi \sin \lambda \\ z &= v(1 - e^2) \sin \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

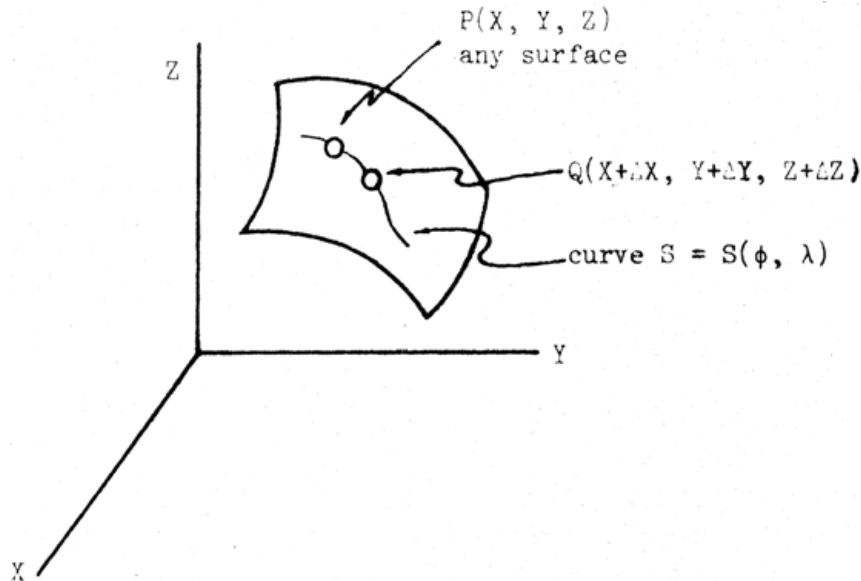
که در آن v شعاع انحنای قائم اصلی و e خروج از مرکزی اول بیضوی است.

کمیت های اصلی گوس

کمیت های اصلی گوس برای بیان خواص هندسی یک سطح استفاده می شوند. چنانچه مطابق نگاره (۱) بر روی یک خم اختیاری $S = S(\varphi, \lambda)$ واقع بر یک سطح، دو نقطه P و Q با فاصله بی نهایت کوچک به ترتیب با مختصات (x, y, z) و $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ در نظر گرفته شود و طول وتر PQ را با ΔL و طول کمان PQ را با ΔS نمایش دهیم، روابط زیر را خواهیم داشت.

$$\Delta L^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad (3)$$

$$\left(\frac{\Delta L}{\Delta S}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta S}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta S}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta S}\right)^2 \quad (4)$$



نگاره ۱- خم اختیاری واقع بر روی یک سطح

با فرض فاصله بی نهایت کوچک بین دو نقطه P و Q ، طول وتر ΔL و طول کمان ΔS بسیار به هم نزدیک شده و بنابراین عملاً می توان مقدار آنها را یکسان فرض کرد و در این صورت رابطه (۴) به صورت زیر قابل ارائه است.

$$\left(\frac{dx}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dS}\right)^2 = 1 \quad (5)$$

مقادیر $\frac{dx}{dS}$ ، $\frac{dy}{dS}$ و $\frac{dz}{dS}$ را می توان به کسینوس های هادی خطی روی سطح تعبیر نمود. رابطه (۵) را می توان به صورت زیر نیز بازنویسی نمود.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (6)$$

با توجه به معادلات پارامتریک (۱) می توان دیفرانسیل های رابطه (۶) را به صورت زیر تعیین نمود.

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial X}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial X}{\partial \lambda} d\lambda \\ dy &= \frac{\partial Y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} d\lambda \\ dz &= \frac{\partial Z}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial Z}{\partial \lambda} d\lambda \end{aligned} \quad (۷)$$

اکنون با جایگذاری معادلات (۷) در (۶) به رابطه زیر می رسیم.

$$ds^2 = E d\varphi^2 + 2F d\varphi d\lambda + G d\lambda^2 \quad (۸)$$

که در آن

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\right)^2 \\ F &= \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \\ G &= \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \lambda}\right)^2 \end{aligned} \quad (۹)$$

کمیت های E ، F و G معروف به کمیت های اصلی گوس برای سطح مورد نظر هستند. این کمیت ها کاربردهای مختلفی در ژئودزی و سیستم های تصویر دارند که با برخی از آنها آشنا خواهیم شد. این کمیت ها برای سطح بیضوی دو محوره دورانی (بیضوی مرجع زمین) به صورت زیر می باشند.

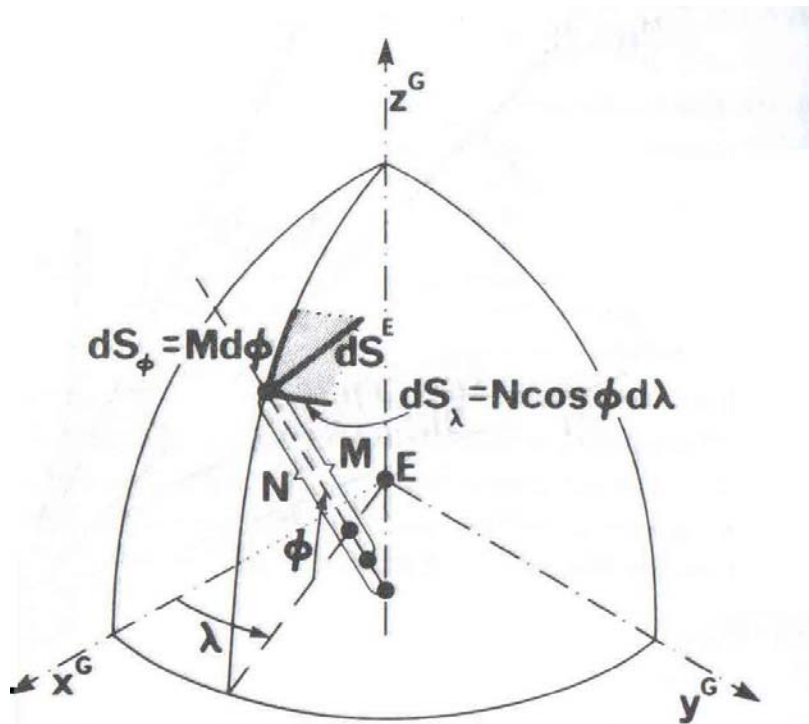
$$\begin{aligned} E &= \rho^2 \\ F &= 0 \\ G &= v^2 \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (۱۰)$$

با توجه به روابط (۱۰)، معادله (۸) برای بیضوی نیز به صورت های زیر در می آید.

$$ds^2 = (\rho d\varphi)^2 + (v \cos \varphi d\lambda)^2 \quad (11)$$

$$ds^2 = v^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{\rho^2}{v^2} \sec^2 \varphi d\varphi^2 + d\lambda^2 \right) \quad (12)$$

نگاره (۲) طول کمان dS را در راستاهای نصف النهاری و مداری نمایش می دهد.



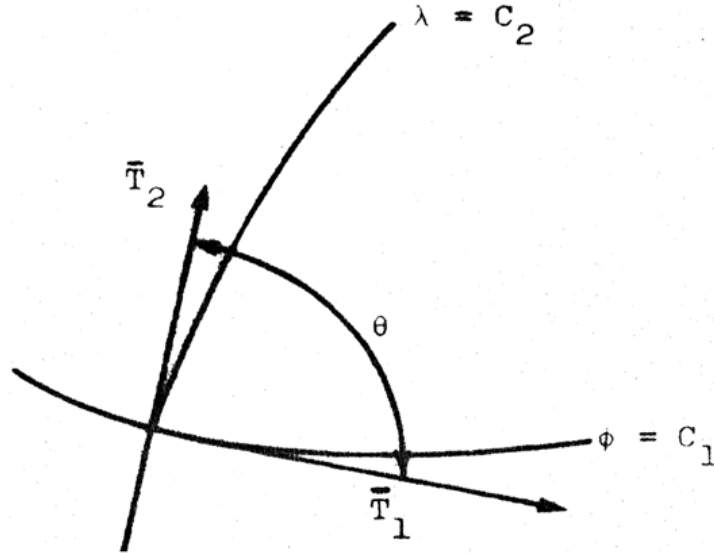
نگاره ۲- مولفه های طول دیفرانسیلی بر روی یک بیضوی مرجع

زاویه بین منحنی های پارامتریک

چنانچه مطابق نگاره (۳) زاویه بین دو خم $\varphi = C_1$ و $\lambda = C_2$ مورد نظر باشد، می توان با استفاده از کمیت های اصلی گوس آنها را تعیین نمود. جدول (۱) نشاندهنده مقادیر معادلات (۷) با در نظر گرفتن دو خم مذکور می باشد. همچنین برای این منظور باید دیفرانسیل کامل از طول کمان dS برای دو خم مذکور را داشته باشیم.

$$dS_\varphi = \sqrt{E}d\varphi \quad (13)$$

$$dS_\lambda = \sqrt{G}d\lambda \quad (14)$$



نگاره ۳- زاویه بین دو خم $\lambda = C_2$ و $\varphi = C_1$

جدول ۱- مقادیر معادلات (۷) با در نظر گرفتن دو خم $\lambda = C_2$ و $\varphi = C_1$

	$\varphi = C_1$	$\lambda = C_2$
dX	$\frac{\partial X}{\partial \lambda} d\lambda$	$\frac{\partial X}{\partial \varphi} d\varphi$
dY	$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} d\lambda$	$\frac{\partial Y}{\partial \varphi} d\varphi$
dZ	$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} d\lambda$	$\frac{\partial Z}{\partial \varphi} d\varphi$

اکنون زاویه بین دو خم $\varphi = C_1$ و $\lambda = C_2$ بر اساس کسینوس های هادی دو بردار مماس بر منحنی ها از رابطه زیر به دست می آوریم.

$$\cos \theta = J_1 J_2 + K_1 K_2 + L_1 L_2 \quad (15)$$

مقادیر J_i ها، K_i ها و L_i ها از روابط زیر به دست می آیند.

$$J_1 = \frac{dX}{dS_\lambda} = \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}}$$

$$K_1 = \frac{dY}{dS_\lambda} = \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \quad (16)$$

$$L_1 = \frac{dZ}{dS_\lambda} = \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}}$$

$$J_2 = \frac{dX}{dS_\phi} = \frac{\partial X}{\partial \phi} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}}$$

$$K_2 = \frac{dY}{dS_\phi} = \frac{\partial Y}{\partial \phi} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} \quad (17)$$

$$L_2 = \frac{dZ}{dS_\phi} = \frac{\partial Z}{\partial \phi} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}}$$

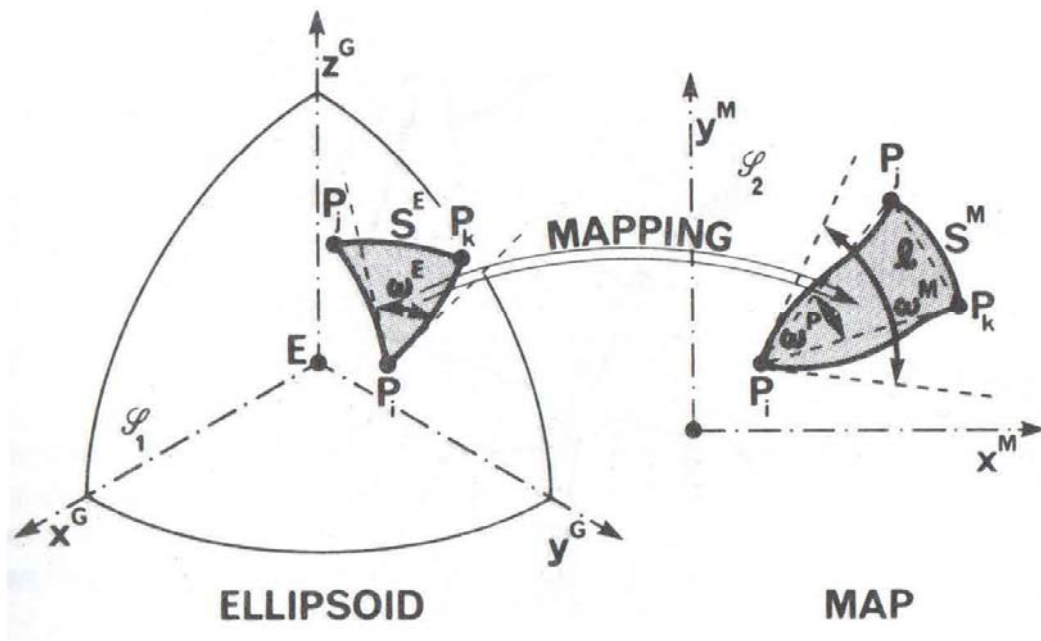
با جایگذاری روابط (۱۶) و (۱۷) در (۱۵) به رابطه زیر می رسیم.

$$\cos \theta = \left(\frac{\partial X}{\partial \phi} \frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{\partial Y}{\partial \phi} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \frac{\partial Z}{\partial \phi} \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \right) \frac{1}{\sqrt{EG}} = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (18)$$

اعمال رابطه (۱۸) برای بیضوی مرجع زمین مقدار θ را برابر با ۹۰ درجه به دست می دهد.

سیستم های تصویر متشابه

همانطور که گفته شد در این نوع سیستم های تصویر اندازه زوایای واقع بر روی یک بیضوی پس از تصویر به همان اندازه اصلی خود حفظ می شود. مفهوم چنین تصویری در نگاره (۴) دیده می شود. در این نگاره، مثلث بیضوی $P_i P_j P_k$ پس از اعمال تابع نگاشت مستقیم، به مثلث مسطحاتی $P_i P_j P_k$ در صفحه xy تبدیل شده است. همچنین در این نگاره، تابع نگاشت معکوس نیز مثلث مسطحاتی $P_i P_j P_k$ را به بیضوی $P_i P_j P_k$ تبدیل کرده است.



نگاره ۴- نگاشت متشابه از سطح یک بیضوی به یک صفحه و بر عکس

با توجه به اینکه هدف اصلی از اعمال توابع مذکور حفظ زاویه راس های مثلث هست، بنابراین مقدار زاویه ω^E بر روی بیضوی برابر با زاویه ω^M بر روی صفحه تصویر است. مسئله اساسی در این بخش یافتن تابع های نگاشت مستقیم و معکوس است، به گونه ای که تصاویر متشابه به دست آیند. چنانچه تابع های نگاشت f_1 و f_2 ، مختصات (φ_i, λ_i) یک نقطه دلخواه P_i بر روی بیضوی را به (x_i, y_i) و تابع های نگاشت g_1 و g_2 ، مختصات (x_i, y_i) یک نقطه دلخواه P_i را بر روی صفحه به (φ_i, λ_i) تبدیل نماید، در آن صورت مدل ریاضی زیر را می توانیم بنویسیم.

$$x_i = f_1(\varphi_i, \lambda_i) \quad (19)$$

$$y_i = f_2(\varphi_i, \lambda_i)$$

$$\varphi_i = g_1(x_i, y_i) \quad (20)$$

$$\lambda_i = g_2(x_i, y_i)$$

برای رسیدن به توابع مذکور، ابتدا مطالبی در مورد صفحه ایزومتریک، ضریب مقیاس، شرط تشابه، هندسه خم های تصویر شده و تقارب نصف النهارات خواهیم داشت.

صفحه ایزومتریک

صفحه ایزومتریک به صفحه واسطه بین رویه تصویر شونده و صفحه تصویر شده اطلاق می گردد. در ژئودزی رویه تصویر شونده بیضوی مرجع زمین است و صفحه تصویر شده همان صفحه نقشه ها است. با یادآوری معادله (۱۲) صفحه ایزومتریک را تعریف می کنیم.

$$ds^2 = v^2 \cos^2 \varphi (dq^2 + d\lambda^2) \quad (21)$$

که در آن

$$dq = \frac{\rho}{v} \sec \varphi d\varphi \quad (22)$$

در رابطه (۲۱) عبارت داخل پرانتز بیانگر مربع یک فاصله دیفرانسیلی بر روی یک صفحه است. به چنین صفحه ای، صفحه ایزومتریک می گویند. مقادیر مختصات بر روی چنین صفحه ای طول ژئودتیک (λ) و

عرض ایزومتریک (q) نامیده می شوند. برای بیان عرض ایزومتریک (q) بر حسب عرض ژئودتیک (φ) از رابطه زیر استفاده می شود.

$$\int_0^q dq = \int_0^\varphi \frac{\rho}{v} \sec \varphi d\varphi \quad (23)$$

با یادآوری روابط شعاع های انحنای نصف النهاری و قائم اصلی

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

$$v = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$$

با قرار دادن روابط فوق در معادله (۲۳) خواهیم داشت:

$$\int_0^q dq = \int_0^\varphi \frac{(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} d\varphi \quad (24)$$

$$= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - e^2 \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}$$

نتیجه انتگرال اول برابر است با

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right]$$

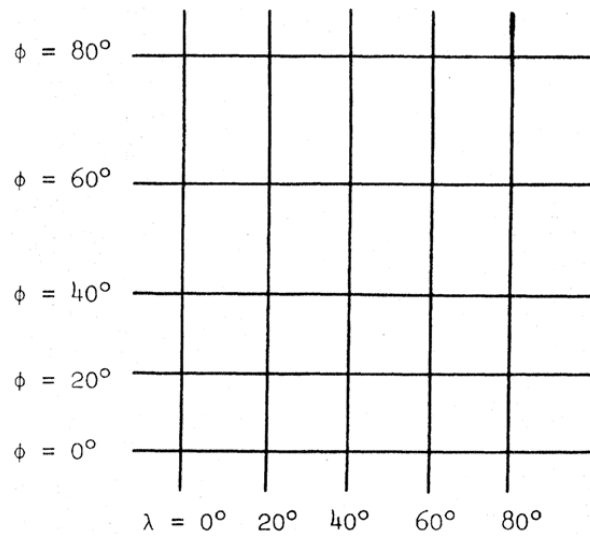
با تغییر متغیر $\sin \varphi = p$ و $\cos \varphi d\varphi = dp$ ، انتگرال دوم نیز به صورت زیر خواهد بود.

$$e^2 \int_0^\varphi \frac{dp}{1 - e^2 p^2} = e^2 \ln \left[\frac{1 + ep}{1 - ep} \right] = \ln \left[\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right]^{e/2}$$

با ترکیب دو انتگرال فوق به رابطه نهایی زیر برای q می‌رسیم.

$$q = \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right] \quad (25)$$

مشاهده می‌شود که برای هر مقدار φ یک مقدار q وجود دارد. به عنوان مثال در جدول (۲)، برای برخی مقادیر φ ، مقادیر متناظر q برای بیضوی اورست با پارامترهای $a = 6377276.345 \text{ m}$ و $1/f = 300.8017$ محاسبه شده است. مطابق جدول (۲) و نگاره (۵)، تا عرض ژئودتیک حدود ۱۲ درجه، مقدار عرض ایزومتریک کمتر از عرض ژئودتیک است و برای عرض‌های ژئودتیک بزرگتر از حدود ۱۲ درجه، عرض ایزومتریک به تدریج خیلی بزرگتر از عرض ژئودتیک می‌باشد. این بدان معنی است که در تصویر نصف النهارات و مدارات رویه یک بیضوی، در حالی که نصف النهارات به موازات هم و در فواصل مساوی از هم قرار می‌گیرند، فواصل مدارات مساوی نیست و هر چه از استوا دورتر می‌شویم، فاصله بین مدارات بیشتر می‌شود.



نگاره ۵- تصویر متشابه مدارات و نصف النهارات برای بیضوی اورست

جدول ۲- برخی عرض های ژئودتیک و ایزومتریک برای بیضوی اورست

Geodetic Latitude (ϕ)	Isometric Latitude (q)
1	0.9934132219
10	9.9851128986
11	10.9956288708
12	12.0096232035
20	20.2888725073
30	31.2726570656
40	43.4668126053
50	57.6161578380
60	75.1262119163
70	99.0738773214
75	115.8041916752
80	139.2112650896
85	179.0306399306
86	191.8283989049
87	208.3211451844
88	231.5595670367
89	271.2781638574

اکنون با توجه به رابطه (۲۵) می توان مقدار عرض ژئودتیک φ را از عرض ایزومتریک q به دست آورد. اما این کار به سادگی امکان پذیر نیست و به ناچار باید از روش های تکراری مانند نیوتن-رافسون بهره برد. برای این منظور ابتدا رابطه (۲۵) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم.

$$q = \frac{1}{2} [\ln(1 + \sin \varphi) - \ln(1 - \sin \varphi) + e \ln(1 - e \sin \varphi) - e \ln(1 + e \sin \varphi)] \quad (26)$$

بنابراین تابع زیر را می توان برای روش تکراری نیوتن-رافسون ارائه نمود.

$$f(\varphi) = \frac{1}{2} [\ln(1 + \sin \varphi) - \ln(1 - \sin \varphi) + e \ln(1 - e \sin \varphi) - e \ln(1 + e \sin \varphi)] - q = 0 \quad (27)$$

مشتق تابع فوق نیز عبارتست از:

$$f'(\varphi) = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = \frac{(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} \quad (28)$$

برای شروع تکرار نیاز به مقدار اولیه φ_0 می باشد که با تقریب کروی به جای بیضوی، یعنی $e = 0$ می توان آن را به صورت زیر تعیین نمود.

$$q = \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right) \right] \quad (29)$$

$$\varphi_0 = 2 \tan^{-1}[\exp(q)] - \frac{\pi}{2} \quad (30)$$

حال با استفاده از روش نیوتن-رافسون به صورت زیر، می توان تا دستیابی به یک مقدار کوچک برای اختلاف دو تکرار آخر به تکرار ادامه داد.

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} - \frac{f(\varphi_{n-1})}{f'(\varphi_{n-1})} \quad (31)$$

ضریب مقیاس

ضریب مقیاس در هر نقطه بیانگر میزان ضایعه یا اعوجاج در یک طول دیفرانسیلی است که در سیستم های تصویر متشابه به دلیل اعمال شرط تشابه بوجود می آید. بنا به تعریف نسبت طول نقطه ای بر روی نقشه به همان طول نقطه ای روی رویه بیضوی ضریب مقیاس گویند.

$$k = \frac{dS_P}{dS_E} \quad (32)$$

قبلا دیدیم که نصف النهارات و مدارات واقع بر روی یک بیضوی عمود بر هم هستند. از آنجا که سیستم تصویر انتخابی نیز متشابه است، لذا تصویر این منحنی ها نیز بر روی صفحه تصویر عمود بر هم می باشند. مطابق معادله (۱۱) مربع یک طول دیفرانسیلی بر روی بیضوی به صورت زیر تعریف می شود.

$$dS_E^2 = (\rho d\varphi)^2 + (v \cos \varphi d\lambda)^2 \quad (33)$$

معادل طول فوق بر روی صفحه تصویر از رابطه زیر تعیین می گردد.

$$dS_P^2 = dx^2 + dy^2 \quad (34)$$

بنابراین بر اساس (۳۲)، مربع ضریب مقیاس از رابطه زیر به دست می آید.

$$k^2 = \frac{dS_P^2}{dS_E^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{(\rho d\varphi)^2 + (v \cos \varphi d\lambda)^2} \quad (35)$$

چنانچه مختصات (x_i, y_i) یک نقطه دلخواه P_i را بر روی صفحه ایزومتریک به صورت تابعی از (q_i, λ_i) در نظر بگیریم، در آن صورت مدل ریاضی زیر را می توانیم بنویسیم.

$$x_i = f_1(q_i, \lambda_i)$$

$$y_i = f_2(q_i, \lambda_i)$$

حال بر پایه رابطه (۸)، می توان رابطه زیر را برای طول دیفرانسیلی بر روی صفحه ایزومتریک نوشت.

$$dS_P^2 = edq^2 + 2fdq d\lambda + gd\lambda^2 \quad (36)$$

که در آن

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial q} \frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2$$

از آنجا که زوایا بر روی بیضوی باید برابر با زوایای متناظر بر روی صفحه تصویر باشد، باید رابطه زیر نیز برقرار باشد.

$$dS_P^2 = edq^2 + gd\lambda^2$$

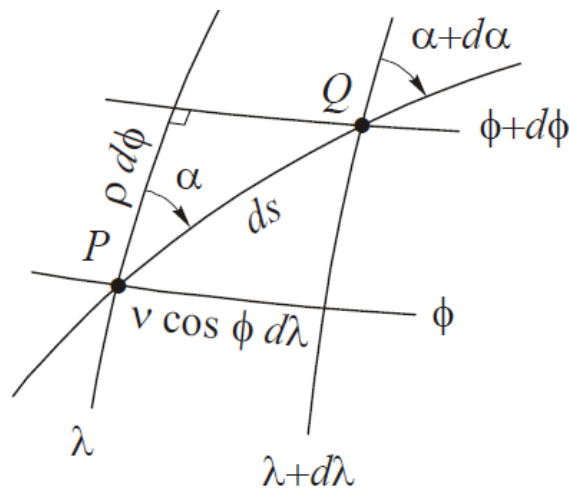
بنابراین رابطه نهایی ضریب مقیاس به صورت زیر ارائه می شود.

$$k^2 = \frac{dS_P^2}{dS_E^2} = \frac{edq^2 + gd\lambda^2}{v^2 \cos^2 \varphi (dq^2 + d\lambda^2)} \quad (37)$$

شرط تشابه بین صفحه نقشه و صفحه ایزومتریک

مطابق نگاره (۶) رابطه زیر را می توان برای آزیموت α تنظیم نمود.

$$\tan \alpha = \frac{v \cos \varphi}{\rho d\varphi} d\lambda \quad (38)$$



نگاره ۶- یک قطعه دیفرانسیلی بر روی یک بیضوی

با یادآوری رابطه (۲۲) و جایگذاری در معادله (۳۸) به رابطه (۴۰) و (۴۱) می رسیم.

$$dq = \frac{\rho d\varphi}{v \cos \varphi} \quad (39)$$

$$\tan \alpha = \frac{d\lambda}{dq} \quad (40)$$

$$d\lambda = \tan \alpha dq \quad (41)$$

حال با جایگذاری (41) در (37) مقدار ضریب مقیاس به صورت تابعی از آزیموت معرفی می شود.

$$k^2 = \frac{e \cos^2 \alpha + g \sin^2 \alpha}{v^2 \cos^2 \varphi} \quad (42)$$

با توجه به اینکه در سیستم های تصویر متشابه، ضریب مقیاس باید مستقل از امتداد باشد، لذا برای برقراری این شرط باید رابطه زیر را داشته باشیم.

$$k^2 = \frac{e}{v^2 \cos^2 \varphi} = \frac{g}{v^2 \cos^2 \varphi} \quad (43)$$

بنابراین رابطه (43) ایجاب می کند که شرط تشابه بر اساس کمیت های اصلی گوس به صورت زیر معرفی شود.

$$f = 0 \quad (44)$$

$$e = g$$

اکنون به تحلیل شروط فوق می پردازیم. ابتدا مجدداً کمیت های اصلی گوس را در نظر می گیریم.

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial q} \frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2$$

با در نظر گرفتن معادلات (۴۴) خواهیم داشت:

$$f = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial q} \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = - \frac{\frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial x}{\partial \lambda}}{\frac{\partial y}{\partial q}} \quad (46)$$

$$e = g$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 \quad (47)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{\left(-\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2}{\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2} \quad (48)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2}{\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2\right] \quad (49)$$

معادله فوق تنها در یکی از دو حالت زیر برقرار می شود.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 = 0 \quad (50)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 \quad (51)$$

از معادله (51) به رابطه زیر می رسیم.

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = + \frac{\partial y}{\partial q} \quad (52)$$

با در نظر گرفتن علامت مثبت رابطه (52) و جایگزینی در (45) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial x}{\partial q} = - \frac{\partial y}{\partial \lambda} \quad (53)$$

معادله (53) و معادله (52) با علامت مثبت، موسوم به معادلات کوشی و ریمان هستند که در زیر بازنویسی

می شوند.

$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\partial y}{\partial q}$
$\frac{\partial x}{\partial q} = - \frac{\partial y}{\partial \lambda}$

(۵۴)

معادله (۵۳) و معادله (۵۲) با علامت منفی نیز، موسوم به معادلات کوشی و ریمان هستند که در زیر معرفی می شوند.

$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = - \frac{\partial y}{\partial q}$
$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial \lambda}$

(۵۵)

معادلات کوشی و ریمان در واقع بیانگر شرط تشابه در سیستم های تصویر می باشند و در تعریف و تعیین توابع نگاشت بسیار کاربرد دارند.

تعیین ضریب مقیاس

با یادآوری رابطه ضریب مقیاس نقطه ای:

$$k^2 = \frac{dS_P^2}{dS_E^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{v^2 \cos^2 \varphi (dq^2 + d\lambda^2)} \quad (۵۶)$$

و برخی جایگذاری ها و ساده سازی ها به دو رابطه زیر برای تعیین ضریب مقیاس می رسمیم که بسته به شرایط خاص سیستم تصویرهای متشابه، یکی از آنها مورد استفاده قرار می گیرد.

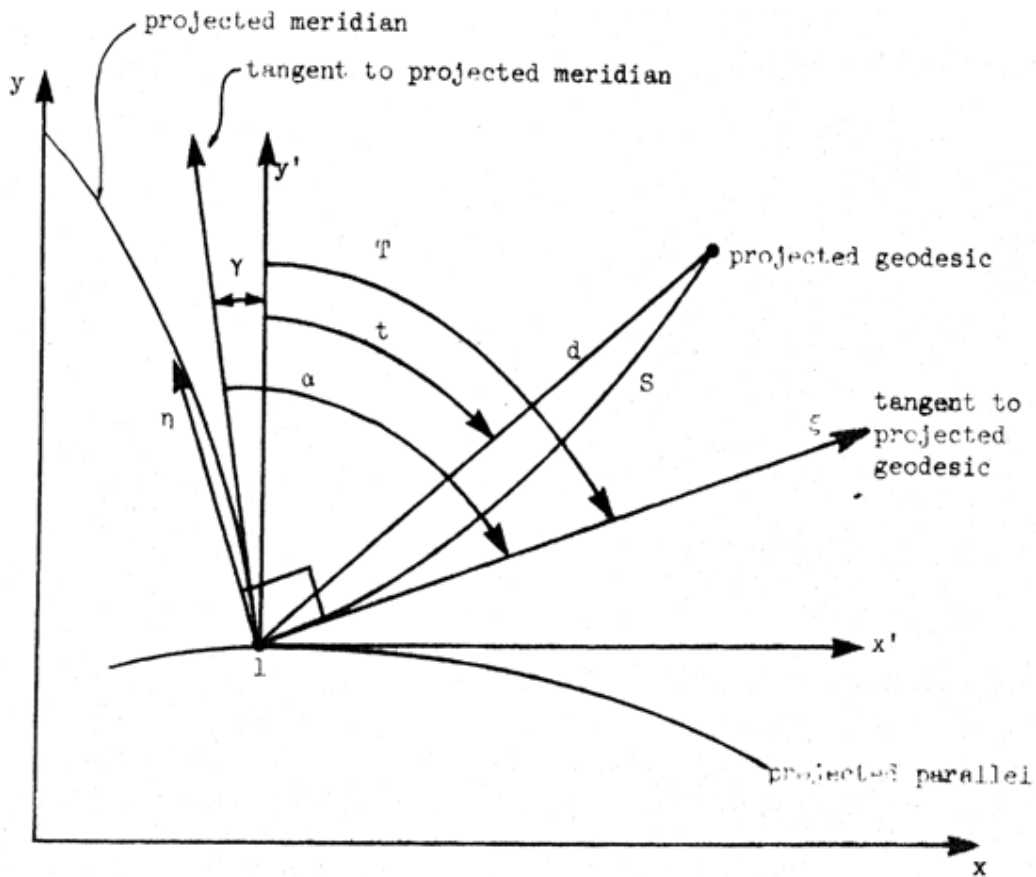
$$k = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}}{N \cos \phi} \quad (57)$$

$$k = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2}}{N \cos \phi}$$

هندسه خم های تصویر شده

در این بخش مختصری در مورد هندسه نصف النهارات، مدارات و خم های ژئودزیک تصویر شده در صفحه تصویر و روابط آنها در شبکه مختصات نقشه مورد بررسی قرار می گیرد.

مطابق نگاره (۷)، مشاهده می شود که چگونه نصف النهار و مدار گذرنده از نقطه ۱ و خم ژئودزیک بین ۱ و ۲ روی صفحه نقشه تصویر شده اند و ارتباط آنها با محورهای مختصات نقشه چگونه برقرار شده است. در این نگاره X' و Y' محورهای مختصات صفحه نقشه، α آزیموت ژئودزیک تصویر شده، T آزیموت ژئودزیک تصویر شده نسبت به شمال نقشه، t آزیموت وتر ژئودزیک تصویر شده نسبت به شمال نقشه، γ تقارب نصف النهار، S طول خم ژئودزیک تصویر شده و d طول وتر خم ژئودزیک تصویر شده می باشند.

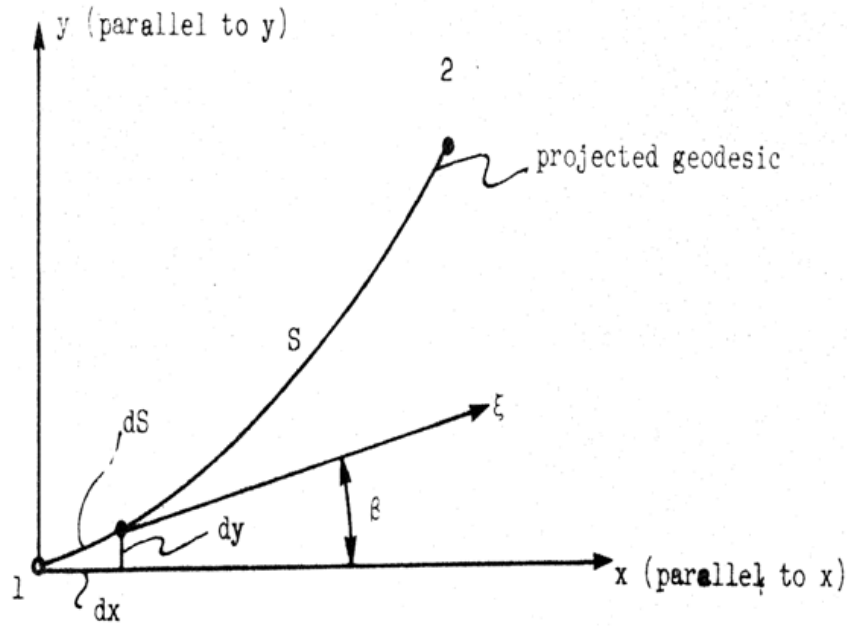


نگاره ۷- تصویر نصف النهار و مدار گذرنده از نقطه ۱ و خم ژئودزیک بین ۱ و ۲ روی صفحه نقشه

تقارب نصف النهارات

بر پایه نگاره (۸) زاویه β به عنوان زاویه بین خم ژئودزیک تصویر شده و محور X' به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tan \beta = \frac{dy}{dx} \quad (58)$$



نگاره ۸- زاویه بین خم ژئودزیک تصویر شده و محور x'

معادله پارامتریک خم ژئودزیک تصویر شده بر حسب عرض ایزومتریک و طول ژئودتیک را می توان به صورت زیر نمایش داد.

$$x = x(q, \lambda) \tag{59}$$

$$y = y(q, \lambda)$$

با دیفرانسیل گیری از معادلات مذکور به روابط زیر خواهیم رسید.

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q} dq + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \tag{60}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial q} dq + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \tag{61}$$

با جایگذاری روابط فوق در معادله (۵۸)، خواهیم داشت.

$$\tan \beta = \frac{\frac{\partial y}{\partial q} dq + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{\frac{\partial x}{\partial q} dq + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda} \quad (۶۲)$$

یا

$$\tan \beta = \frac{\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dq}}{\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dq}} \quad (۶۳)$$

با یادآوری رابطه (۴۰) $(\tan \alpha = \frac{d\lambda}{dq})$ و جایگذاری آن در رابطه (۶۳)، خواهیم داشت:

$$\tan \beta = \frac{\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \tan \alpha}{\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \tan \alpha} \quad (۶۴)$$

و بنابراین می توان رابطه زیر را نیز به دست آورد.

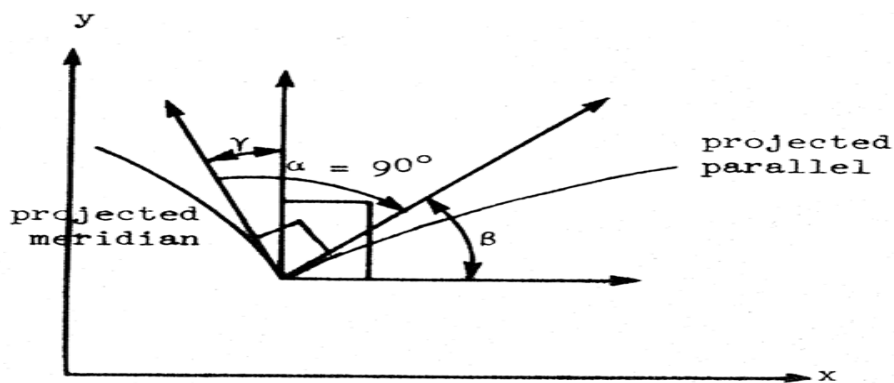
$$\tan \alpha = - \frac{\frac{\partial y}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial q} \tan \beta}{\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \tan \beta} \quad (۶۵)$$

برای یافتن رابطه تقارب نصف النهارات از معادلات فوق استفاده می شود. بر اساس نگاره (۹) می توان مقدار β و γ را یکسان در نظر گرفت. همچنین مقدار α را نیز ۹۰ درجه در نظر می گیریم. حال رابطه (۶۴) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم و سپس آن را با فرضیات مذکور ادامه می دهیم.

$$\tan \beta = \frac{\frac{1}{\tan \alpha} \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{1}{\tan \alpha} \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial \lambda}} \quad (66)$$

$$\tan \gamma = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}$$

(67)



نگاره ۹- نمایش تقارب نصف النهارات

با استفاده از معادلات کوشی ریمن، رابطه (۶۷) به صورت زیر در می آید.

$$\tan \gamma = - \frac{\frac{\partial x}{\partial q}}{\frac{\partial y}{\partial q}}$$

(68)

بسته به شرایط خاص سیستم تصویرهای متشابه، یکی از روابط (۶۶) یا (۶۷) مورد استفاده قرار می گیرد.

سیستم تصویر مرکاتور

این نوع سیستم تصویر حدود سال ۱۵۵۰ بوسیله مرکاتور معرفی گردید. در این سیستم تصویر، ضریب مقیاس در روی استوا حقیقی و مبدا محور \mathcal{Y} ها بر روی تصویر استوا می باشد. برای برقرار شروط مذکور لازم است روابط پارامتریک مورد استفاده در این سیستم تصویر به صورت زیر باشند (مسئله مستقیم).

$$x = a\lambda \quad (69)$$

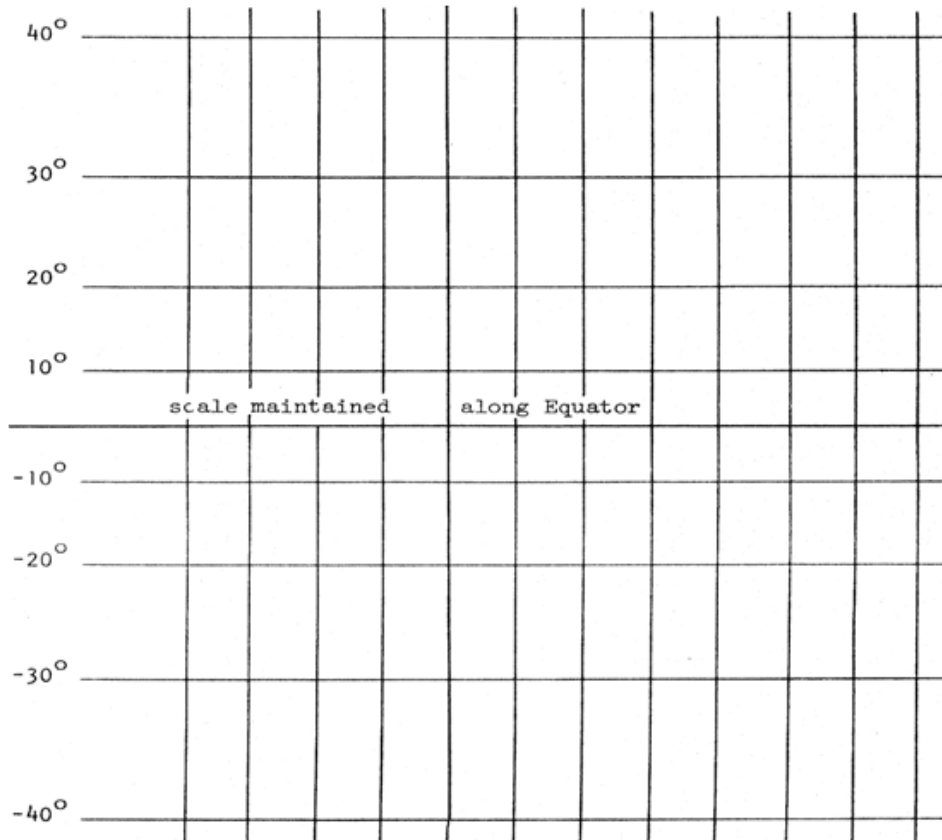
$$y = aq = a \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right]$$

در رابطه فوق a نیم قطر بزرگ و e خروج از مرکزی اول بیضوی زمین است. ضریب مقیاس نیز از رابطه (۵۷) به صورت زیر به دست می آید.

$$k = \frac{a}{v \cos \varphi} \quad (70)$$

در این سیستم تصویر براساس رابطه (۶۷)، مقدار تقارب نصف النهارات برابر صفر می شود. این بدان معنی است که محور \mathcal{Y} صفحه نقشه منطبق بر مماس بر تصویر نصف النهارات است. مطابق نگاره (۱۰) و آنچه گفته شد، می توان ویژگی های این سیستم تصویر را به صورت زیر بیان نمود.

- مقدار تقارب نصف النهارات برابر صفر است.
- ضریب مقیاس در طول استوا برابر یک است.
- تصویر مدارات و نصف النهارات عمود بر هم هستند.
- فواصل بین نصف النهارات مساوی است.
- فواصل بین مدارات با دور شدن از استوا افزایش می یابد.



نگاره ۱۰- نمایش تصویر مدارات و نصف النهارات در سیستم مرکاتور

به طور معکوس می توان روابط زیر را نیز به دست آورد (مسئله معکوس).

$$\lambda = \frac{x}{a}$$

$$q = \frac{y}{a} \tag{۷۱}$$

سیستم تصویر مرکاتور معکوس

این سیستم تصویر متشابه توسط لامبرت در سال ۱۷۷۲ معرفی گردید. در این سیستم تصویر ضریب مقیاس در طول نصف النهار مرکزی حقیقی، مبدا محور y ها بر روی تصویر استوا و مبدا محور x ها بر روی تصویر نصف النهار مرکزی می باشد. برای برقرار شروط مذکور لازم است روابط پارامتریک مورد استفاده در این

سیستم تصویر به صورت زیر باشند (مسئله مستقیم). البته روابط زیر دارای دقت ۱ میلی متر برای ۳ درجه دوری از نصف النهار مرکزی می باشند (فرمول گوس-گروگر).

$$\begin{aligned} \frac{X}{N} = & \lambda \cos \phi + \frac{\lambda^3 \cos^3 \phi}{6} (1 - t^2 + \eta^2) \\ & + \frac{\lambda^5 \cos^5 \phi}{120} (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2 + 13\eta^4 \\ & \quad + 4\eta^6 - 64\eta^4 t^2 - 24\eta^6 t^2) \\ & + \frac{\lambda^7 \cos^7 \phi}{5040} (61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6) \end{aligned} \quad (۲۲)$$

$$\begin{aligned} \frac{Y}{N} = & \frac{S \phi}{N} + \frac{\lambda^2}{2} \sin \phi \cos \phi + \frac{\lambda^4}{24} \sin \phi \cos^3 \phi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \\ & + \frac{\lambda^6}{720} \sin \phi \cos^5 \phi (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2 \\ & \quad + 445\eta^4 + 324\eta^6 - 680\eta^4 t^2 + 88\eta^8 - 600\eta^6 t^2 - 192\eta^8 t^2) \\ & + \frac{\lambda^8}{40320} \sin \phi \cos^7 \phi (1385 - 3111t^2 + 543t^4 - t^6) \end{aligned} \quad (۲۳)$$

که در آن N همان شعاع انحنای قائم اصلی، $S \phi$ طول کمان نصف النهاری بر پایه روابط (۲۲) تا (۳۶) در فصل پنج و سایر پارامترها به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\begin{aligned} t &= \tan \phi \\ \eta^2 &= (e')^2 \cos^2 \phi \\ (e')^2 &= \frac{a^2 - b^2}{b^2} \end{aligned}$$

مقدار تقارب نصف النهارات نیز از رابطه زیر تعیین می گردد.

$$\begin{aligned} \tan \gamma = & \lambda \sin \phi \left[1 + \frac{\lambda^2}{3} \cos \phi (1 + t^2 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \right. \\ & + \frac{\lambda^4 \cos^4 \phi}{15} (2 + 4t^2 + 2t^4 + 15\eta^2 + 35\eta^4 - \\ & - 40 t^2 \eta^4 + 33\eta^6 - 60t^2 \eta^6 + 18\eta^8 - \\ & \left. - 24 t^2 \eta^8) + \frac{17}{315} (1 + t^2)^3 \lambda^6 \cos^6 \phi \right] \end{aligned} \quad (74)$$

ضریب مقیاس نیز از رابطه زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} k = & 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \phi (1 + \eta^2) + \frac{\lambda^4 \cos^4 \phi}{24} (5 - 4t^2 + 14\eta^2 + \\ & + 13\eta^4 - 28t^2 \eta^2 + 4\eta^6 - 48t^2 \eta^4 - 24t^2 \eta^6) + \\ & + \frac{\lambda^6 \cos^6 \phi}{720} (61 - 148t^2 + 16t^4) \end{aligned} \quad (75)$$

به طور معکوس می توان روابط زیر را نیز به دست آورد (مسئله معکوس).

$$\begin{aligned} \lambda = & \sec \phi_1 \left[\frac{X}{N_1} - \frac{1}{6} \left(\frac{X}{N_1} \right)^3 (1 + 2t_1^2 + \eta_1^2) \right. \\ & + \frac{1}{120} \left(\frac{X}{N_1} \right)^5 (5 + 6\eta_1^2 + 28t_1^2 - 3\eta_1^4 + 8t_1^2 \eta_1^2 + 24t_1^4 \\ & \quad \left. - 4\eta_1^6 + 4t_1^2 \eta_1^4 + 24t_1^2 \eta_1^6) \right. \\ & \left. - \frac{1}{5040} \left(\frac{X}{N_1} \right)^7 (61 + 662t_1^2 + 1320t_1^4 + 720t_1^6) \right] \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \phi = & \phi_1 - \frac{t_1 X^2}{2M_1 N_1} + \frac{t_1 X^4}{24M_1 N_1^3} (5 + 3t_1^2 + n_1^2 - 4n_1^4 - 9n_1^2 t_1^2) \\ & - \frac{t_1 X^6}{720M_1 N_1^5} (61 - 90t_1^2 + 46n_1^2 + 45t_1^4 - 252t_1^2 n_1^2 - 5n_1^4 \\ & + 100n_1^6 - 66t_1^2 n_1^4 - 90t_1^4 n_1^2 + 88n_1^8 + 225t_1^4 n_1^4 \\ & + 84t_1^2 n_1^6 - 192t_1^2 n_1^8) \\ & + \frac{t_1 X^8}{40320M_1 N_1^7} (1385 + 3633t_1^2 + 4095t_1^4 + 1575t_1^6) \end{aligned} \quad (77)$$

که در آن اندیس ۱ نشاندهنده نقطه پایه یا نقطه مبنا (ϕ_1) است. این نقطه تصویر هر نقطه دلخواه در صفحه نقشه بر روی نصف النهار مرکزی است. M_1 و N_1 به ترتیب شعاع انحنای قائم اصلی و نصف النهاری نقطه مبنا و سایر پارامترها به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\begin{aligned} t_1 &= \tan \phi_1 \\ n_1^2 &= (e')^2 \cos^2 \phi_1 \\ (e')^2 &= (a^2 - b^2)/b^2 \end{aligned}$$

از آنجا که طول نصف النهاری نقطه پایه همان مولفه Y در سیستم تصویر مرکاتور معکوس است، لذا بر اساس رابطه ۲۵ در فصل ۵ می توان تابع زیر را نوشت.

$$f(\phi) = a(A_0 \phi - A_2 \sin 2\phi + A_4 \sin 4\phi - A_6 \sin 6\phi + A_8 \sin 8\phi) - y = 0 \quad (78)$$

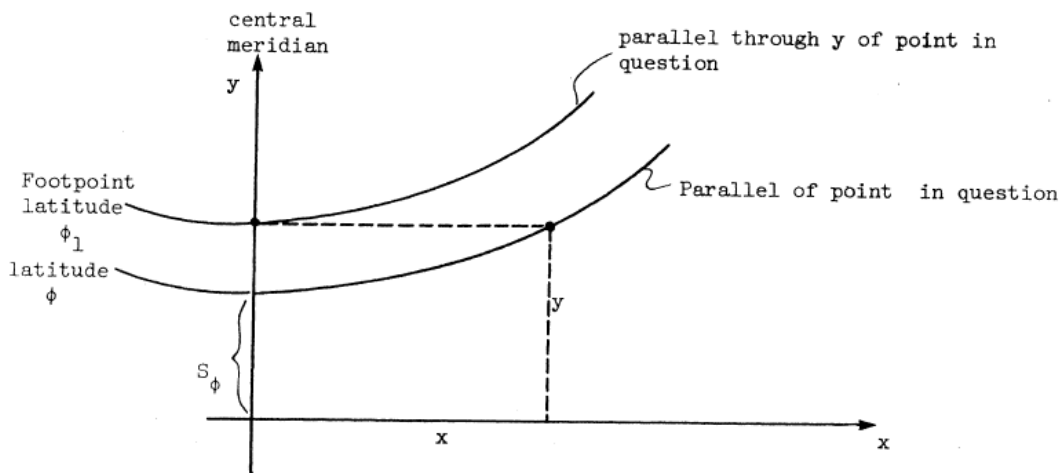
$$f'(\phi) = a(A_0 - 2A_2 \cos 2\phi + 4A_4 \cos 4\phi - 6A_6 \cos 6\phi + 8A_8 \cos 8\phi) \quad (79)$$

برای شروع تکرار نیاز به مقدار اولیه φ_0 می باشد که با تقریب کروی به جای بیضوی، یعنی $e = 0$ می-توان آن را به صورت زیر تعیین نمود.

$$\varphi_0 = \frac{Y}{a} \quad (۸۰)$$

حال با استفاده از روش نیوتن-رافسون به صورت زیر، می توان تا دستیابی به یک مقدار کوچک برای اختلاف دو تکرار آخر به تکرار ادامه داد.

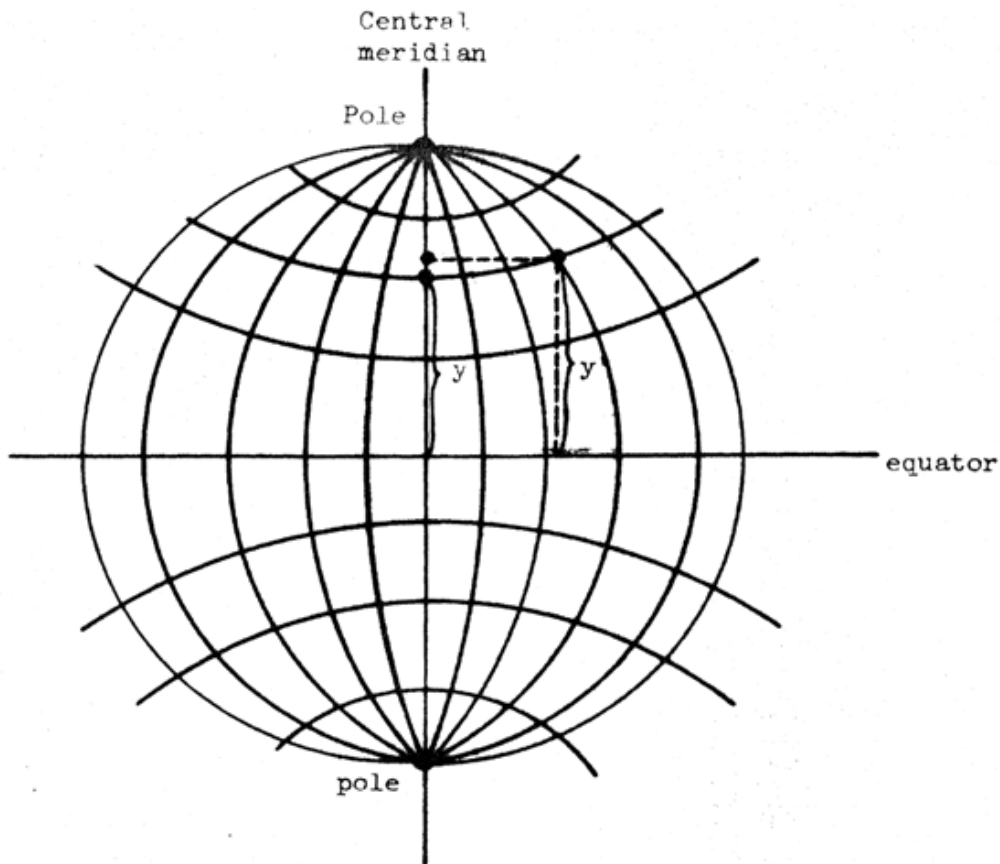
$$\varphi_n = \varphi_{n-1} - \frac{f(\varphi_{n-1})}{f'(\varphi_{n-1})} \quad (۸۱)$$



نگاره ۱۱- عرض نقطه پایه (φ_1)

مطابق نگاره (۱۲) و آنچه گفته شد، می توان ویژگی های این سیستم تصویر را به صورت زیر بیان نمود.

- مقدار تقارب نصف النهارات با دور شدن از نصف النهار مرکزی افزایش می یابد.
- ضریب مقیاس در طول نصف النهار مرکزی برابر یک است.
- تصویر مدارات و نصف النهارات عمود بر هم هستند.

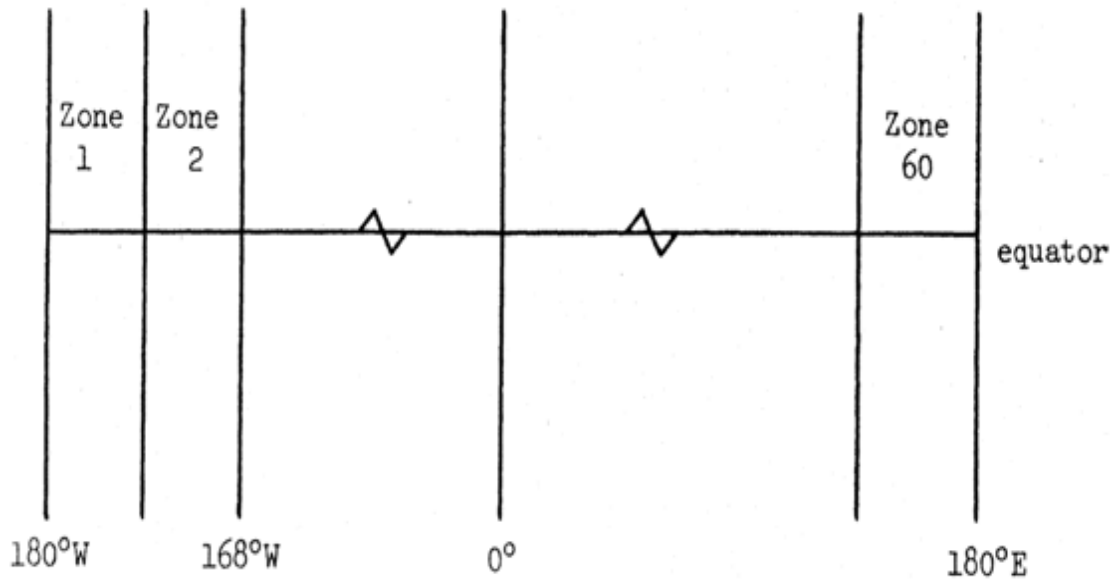


نگاره ۱۲- نمایش تصویر مدارات و نصف النهارات در سیستم مرکاتور

سیستم تصویر مرکاتور معکوس جهانی (UTM)

این سیستم تصویر متشابه نوع خاصی از سیستم تصویر مرکاتور معکوس است که مشخصات آن عبارتند از:

- سیستم تصویر مرکاتور معکوس برای قاچ های ۶ درجه ای است.
- مبدا محور طول ها، نصف النهار مرکزی با مقدار 5000000 متر است.
- مبدا محور عرض ها، استوا با مقدار صفر متر برای نیمکره شمالی و 10000000 متر برای نیمکره جنوبی است.
- ضریب مقیاس در نصف النهار مرکز $k_0 = 0.9996$ است.
- شماره گذاری قاچ ها از ۱ برای نصف النهار ۱۸۰ درجه غربی تا ۱۷۴ درجه غربی شروع و به ۶۰ برای نصف النهار ۱۷۴ درجه شرقی تا ۱۸۰ درجه شرقی ختم می گردد (نگاره ۱۳).



نگاره ۱۳- قاچ بتدی در سیستم مرکاتور معکوس جهانی

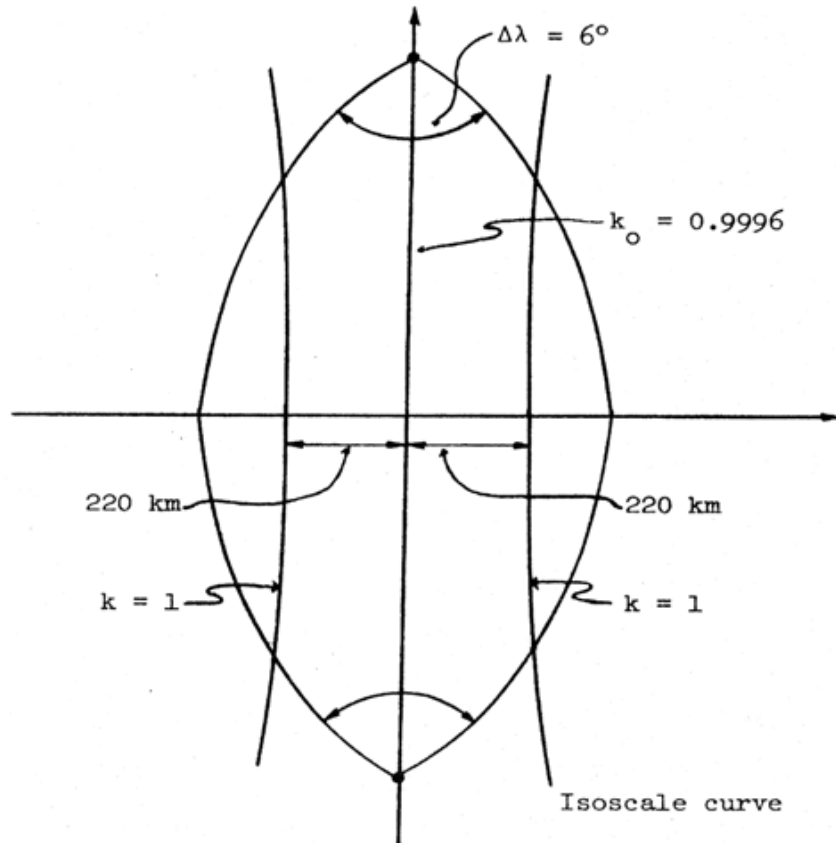
روابط مستقیم سیستم تصویر مرکاتور معکوس جهانی با اصلاحات زیر به روابط مستقیم سیستم تصویر مرکاتور معکوس عادی (۷۲) و (۷۳) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
 X_{UTM} &= k_0 X_{TM} \\
 Y_{UTM} &= k_0 Y_{TM} \\
 k_{UTM} &= k_0 k_{TM} \\
 \gamma_{UTM} &= \gamma_{TM}
 \end{aligned}
 \tag{۸۲}$$

برای دستیابی به روابط معکوس در سیستم تصویر مرکاتور معکوس جهانی نیز به جای X_{TM} و Y_{TM} در

$$\text{روابط (۷۶) و (۷۷) باید به ترتیب } \frac{X_{UTM}}{k_0} \text{ و } \frac{Y_{UTM}}{k_0} \text{ را جایگذاری نمود.}$$

در نگاره (۱۴) تغییرات ضریب مقیاس در یکی از قاچ‌های ۶۰ گانه سیستم تصویر مرکاتور معکوس جهانی دیده می‌شود.



نگاره ۱۴- تغییر ضریب مقیاس در سیستم مرکاتور معکوس جهانی