۱

گزینه ۳

رابطهٔ سرعت متوسط: $\mathrm{v_{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

در این تست به درک بهتری از مفهوم Δt در رابطهٔ $\mathrm{v_{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ می‌رسیم. معمولاً Δt را به‌عنوان مدت حرکت می‌شناسیم اما درواقع بهتر است بگوییم Δt مدت‌زمان رسیدن به مقصد است.

$$\mathrm{v_{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t_{\text{حرکت}} + \Delta t_{\text{توقف}}} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{v_۱} + ۵} \Rightarrow ۲۰ = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{۲۵} + ۵}$$

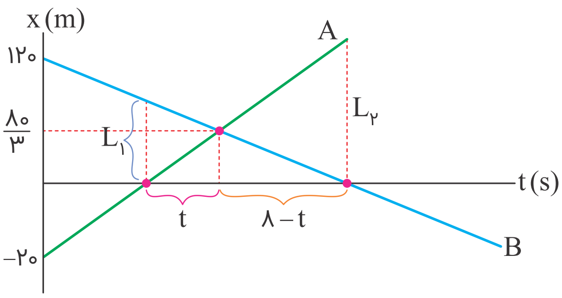
$$\Rightarrow ۲۰ = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x + ۱۲۵}{۲۵}} \Rightarrow ۲۰ = \frac{۲۵\Delta x}{\Delta x + ۱۲۵}$$

$$\Rightarrow ۲۵\Delta x = ۲۰\Delta x + ۲۵۰۰ \Rightarrow ۵\Delta x = ۲۵۰۰ \Rightarrow \Delta x = ۵۰۰\,\mathrm{m}$$

درک ارتباط زمان و سرعت و درک تأثیر زمان حرکت و توقف برای حل این سؤال لازم است.

۲ گزینه ۱

باتوجه‌به نمودار مکان- زمان مسافتی که هر دو متحرک در مدت ۸ ثانیه طی می‌کنند را با استفاده از تشابه به دست می‌آوریم.



$$\begin{cases} \dfrac{t}{۸} = \dfrac{\frac{۸۰}{۳}}{\ell_۲} \Rightarrow \ell_۲ = \dfrac{۶۴۰}{۳t} \\ \dfrac{۸-t}{۸} = \dfrac{\frac{۸۰}{۳}}{\ell_۱} \Rightarrow \ell_۱ = \dfrac{۶۴۰}{۳(۸-t)} \end{cases}$$

جمع دو مسافت طی‌شده را برابر $۱۲۰\,\mathrm{m}$ قرار می‌دهیم تا t به دست بیاید.

$$\ell_۱ + \ell_۲ = ۱۲۰ \Rightarrow \frac{۶۴۰}{۳(۸-t)} + \frac{۶۴۰}{۳t} = ۱۲۰ \Rightarrow \frac{۱۶}{۳(۸-t)} + \frac{۱۶}{۳t} = ۳$$

$$\frac{۱۶(t+۸-t)}{۳t(۸-t)} = ۳ \Rightarrow ۹t(۸-t) = ۱۲۸ \Rightarrow t = \frac{۱۶}{۳}\,(\mathrm{s})$$

حالا تندی دو متحرک را به دست می‌آوریم:

$$|v_A| = \frac{\frac{۸۰}{۳}}{\frac{۱۶}{۳}} = ۵\,\mathrm{m/s} \qquad |v_B| = \frac{\frac{۸۰}{۳}}{۸-\frac{۱۶}{۳}} = \frac{\frac{۸۰}{۳}}{\frac{۸}{۳}} = ۱۰\,\mathrm{m/s}$$

حالا نسبت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\left|\frac{v_A}{v_B}\right| = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

۳ گزینه ۱

$$\text{در قسمت اول}: t_۱ = \frac{۱}{۴}t \Rightarrow d_۱ = v_۱t_۱ = ۳۰ \times \frac{۱}{۴}t = ۷/۵t$$

$$\text{در قسمت دوم}: t_۲ = \frac{۳}{۴}t \Rightarrow d_۲ = v_۲t_۲ = ۸ \times \frac{۳}{۴}t = ۶t \Rightarrow \overline{v} = \frac{|d_۱ - d_۲|}{t_۱ + t_۲}$$

$$= \frac{۷/۵t - ۶t}{t} = ۱/۵\,\mathrm{m/s}$$

۴ گزینه ۱

$$x = vt + x_\circ$$

$$\begin{cases} t_۱ = ۱\,s \Rightarrow x_۱ = x(۱) = ۱ \times v + x_\circ = -۲\,m \\ t_۲ = ۳ + ۱ = ۴\,s \Rightarrow x_۲ = x(۴) = ۴ \times v + x_\circ = ۷\,m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v + x_\circ = -۲ \\ ۴v + x_\circ = ۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = ۳\,m/s \\ x_\circ = -۵\,m \end{cases}$$

۵ گزینه ۲

$$x = vt + x_\circ \Rightarrow \begin{cases} x(۲) = v \times ۲ + x_\circ \\ x(۲+۲) = v \times ۴ + x_\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲v + x_\circ = \circ \\ ۴v + x_\circ = -۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = -۳\,m/s \\ x_\circ = ۶\,m \end{cases}$$

$$x = vt + x_\circ \Rightarrow x = -۳t + ۶$$

۶

گزینه ۴

روش اول:

$$\begin{cases} x_A = vt + ۰ \\ x_B = -۳vt + d \end{cases} \Rightarrow x_A = x_B \Rightarrow vt = -۳vt + d$$

$$\Rightarrow t = \frac{d}{۴v}$$

چون حرکت متحرک A با سرعت و ثابت انجام می‌شود، فاصلهٔ $OM (\frac{۳}{۴}d)$ را در ۱۰ ثانیه طی کرده است، فاصلهٔ $NO (\frac{d}{۴})$ را در مدت $\frac{۱۰}{۳}$ ثانیه طی می‌کند؛ بنابراین:

$$\frac{d}{۴v} = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow d = \frac{۴۰}{۳}v$$

مدت‌زمان طی کردن کل مسیر توسط متحرک B برابر است با:

$$s = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow ۳v = \frac{d}{\Delta t_B} \Rightarrow \Delta t_B = \frac{d}{۳v} = \frac{\frac{۴۰}{۳}v}{۳v} = \frac{۴۰}{۹} (s)$$

روش دوم:

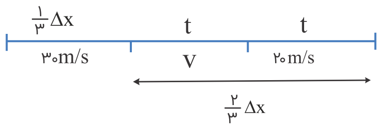
چون دو متحرک یک مسافت را طی می‌کنند، مدت کل حرکت آن‌ها به نسبت عکس سرعت آن‌ها است.

$$\Delta t_A = \Delta t_{NO} + \Delta t_{OM} = \frac{۱۰}{۳} + ۱۰ = \frac{۴۰}{۳} s$$

$$\ell_A = \ell_B \Rightarrow \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = \frac{v_B}{v_A} \Rightarrow \frac{\frac{۴۰}{۳}}{\Delta t_B} = \frac{۳v}{v} \Rightarrow \Delta t_B = \frac{۴۰}{۹} (s)$$

۷

گزینه ۱



ابتدا سرعت متوسط در دو قسمت آخر حرکت را به دست می‌آوریم.

$$v_{av_۱} = \frac{vt + ۲۰t}{t + t} = \frac{۲۰ + v}{۲}$$

سرعت متوسط کل برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\frac{۱}{۳}\Delta x + \frac{۲}{۳}\Delta x}{\frac{\frac{۱}{۳}\Delta x}{۳۰} + \frac{\frac{۲}{۳}\Delta x}{\frac{۲۰ + v}{۲}}} = ۱۸ \Rightarrow v = ۱۰\,m/s$$

۸ گزینه ۳

گام اول: متحرک با سرعت ثابت v مسیر مستقیم را طی می‌کند، بنابراین معادلهٔ مکان- زمان آن به‌صورت زیر است:

$$x = vt$$

اکنون با فرض اینکه متحرک، مسیر ۶۰ متری را در مدت $t_۱$ بپیماید، داریم:

$$۶۰ = vt_۱ \quad (I)$$

گام دوم: اگر متحرک $۵\,m/s$ به سرعت خود بیفزاید، مسیر موردنظر را ۲ ثانیه زودتر به پایان می‌رساند، پس:

$$۶۰ = (v + ۵)(t_۱ - ۲) \quad (II)$$

گام سوم: سمت چپ رابطه‌های (I) و (II) با یکدیگر مساوی است؛ بنابراین سمت راست آن‌ها نیز با یکدیگر مساوی است:

$$vt_۱ = (v+۵)(t_۱-۲) \Rightarrow \cancel{vt_۱} = \cancel{vt_۱} - ۲v + ۵t_۱ - ۱۰$$
$$\Rightarrow ۲v = ۵t_۱ - ۱۰ \Rightarrow v = ۲/۵t_۱ - ۵ \quad (III)$$

گام چهارم: اکنون کافی است تا v از رابطهٔ (III) را در رابطهٔ (I) قرار بدهیم و مقادیر v و $t_۱$ را به دست آوریم:

$$(I): ۶۰ = vt_۱ \xrightarrow{(III)} ۶۰ = (۲/۵t_۱ - ۵)t_۱ \Rightarrow ۶۰ = ۲/۵t_۱^۲ - ۵t_۱$$
$$\Rightarrow t_۱^۲ - ۲t_۱ - ۲۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۶s \\ t_۱ = -۴s \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$۶۰ = vt_۱ \Rightarrow ۶۰ = v \times ۶ \Rightarrow v = ۱۰\,m/s$$

بنابراین معادلهٔ مکان- زمان متحرک به‌صورت زیر خواهد شد و با استفاده از آن می‌توان مسافتی که متحرک در مدت $۴s$ می‌پیماید را به دست آورد.

$$x = vt \Rightarrow x = ۱۰t$$

$$x_۴ = ۱۰ \times ۴ = ۴۰\,m$$

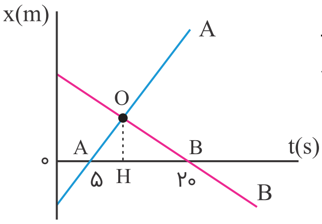
و در پایان خواستهٔ سوال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x_۴}{x_{\text{کل}}} = \frac{۴۰}{۶۰} = \frac{۲}{۳}$$

۹ گزینه ۳

راه‌حل اول:

در مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ شیب خط OA دو برابر بزرگی شیب خط OB است بنابراین $HB = ۲AH$ است پس:



$$AH + HB = ۱۵$$
$$۳AH = ۱۵ \Rightarrow AH = ۵$$

بنابراین دو متحرک در لحظهٔ $t = ۱۰\,s$ به هم می‌رسند.

چون در ابتدا از هم $۱۵۰\,m$ فاصله داشته‌اند و پس از $۱۰\,s$ به هم رسیده‌اند پس $۱۰\,s$ ثانیه بعد (یعنی لحظهٔ $t = ۲۰\,s$) فاصلهٔ آن‌ها از هم باز هم $۱۵۰\,m$ است.

راه‌حل دوم:

$$\begin{cases} x_A = v_A t + x_{\circ A} \xrightarrow{v_A = ۲|v_B|} x_A = ۲|v_B| \times ۱۰ + x_{\circ A} \\ x_B = -|v_B|t + x_{\circ B} \end{cases}$$

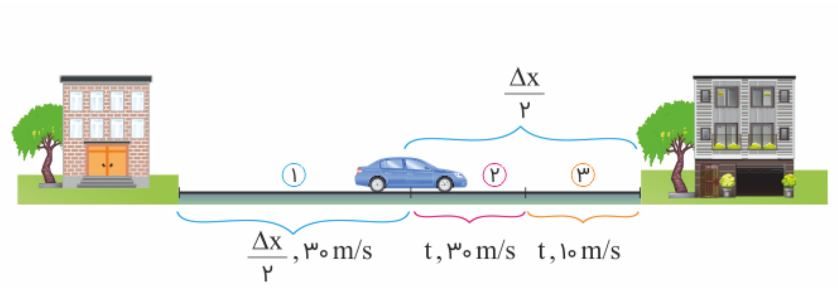
$$x_A = x_B \Rightarrow ۲|v_B| \times ۱۰ + x_{\circ A} = -|v_B| \times ۱۰ + x_{\circ B}$$
$$\Rightarrow ۳|v_B| = x_{\circ B} - x_{\circ A} = ۱۵۰$$
$$\Rightarrow |v_B| = ۵\,m/s \;,\; v_A = ۱۰\,m/s$$

حال معادلهٔ مکان- زمان را برای دو متحرک می‌نویسیم و فاصلهٔ آن‌ها را در لحظهٔ $t = ۲۰\,s$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_A = ۱۰t + x_{\circ A} \\ x_B = -۵t + x_{\circ B} \end{cases} \xrightarrow{t = ۲۰\,s} x_A - x_B = (۱۰ \times ۲۰ + x_{\circ A}) - (-۵ \times ۲۰ + x_{\circ B})$$
$$\Rightarrow x_A - x_B = ۳۰۰ - ۱۵۰ = ۱۵۰\,m$$

۱۰ گزینه ۲

ابتدا تندی متوسط در قسمت‌های دوم و سوم حرکت را به دست می‌آوریم:



$$v_{av} = \frac{\Delta x_۲ + \Delta x_۳}{\Delta t_۲ + \Delta t_۳} = \frac{۳۰t + ۱۰t}{t + t} = ۲۰\,m/s$$

حالا تندی متوسط در کل مسیر را به دست بیاوریم:

$$v_{av(\text{کل})} = \frac{\frac{\Delta x}{۲} + \frac{\Delta x}{۲}}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲ + \Delta t_۳} = \frac{\Delta x}{\frac{\frac{\Delta x}{۲}}{۳۰} + \frac{\frac{\Delta x}{۲}}{۲۰}} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{۶۰} + \frac{\Delta x}{۴۰}}$$

$$v_{av(\text{کل})} = \frac{۱۲۰\Delta x}{۵\Delta x} = ۲۴\,m/s$$

۱۱ گزینه ۳

با توجه به خطی بودن نمودار $x - t$، این متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

$$\begin{cases} x = vt + x_۰ \\ x_۰ = ۵ \\ t = ۲/۵\,s \end{cases} \Rightarrow ۰ = ۲/۵v + ۵ \Rightarrow v = -۲\,m/s$$

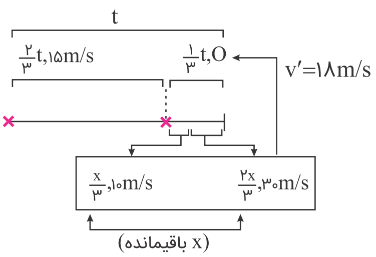
$$\xrightarrow[\Delta t = ۱]{v = \frac{\Delta x}{\Delta t}} \Delta x = -۲$$

۱۲ گزینه ۲

ابتدا باید بدانیم که در این مثال همه قسمت‌های حرکت دارای سرعت ثابت هستند، پس:

$$\Delta x = v.\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v}$$

در ابتدا می‌گوید $\frac{2}{3}$ کل زمان را با سرعت ثابت $15\,(m/s)$ طی می‌کند، پس $\frac{1}{3}$ کل زمان باقی می‌ماند که راجع به سرعت آن چیزی نمی‌دانیم ولی تکه‌ای که راجع به سرعت آن اطلاعات نداده است مجدداً به دو قسمت تقسیم کرده است پس می‌توان سرعت متوسط در آن تکه را یافته و به‌عنوان تندی ثابت و لحظه‌ای در بازهٔ زمانی که اطلاعات سرعت را نداریم از آن استفاده کنیم:



قسمت کوچک‌تر(تقسیم مسیر) $\begin{cases} \Delta x_1 = \dfrac{x}{3}\ ,\ v_1 = 10\,(m/s) \\ \Delta x_2 = \dfrac{2x}{3}\ ,\ v_2 = 30\,(m/s) \end{cases}$

$$\Rightarrow v_{av} = \frac{\frac{x}{3} + \frac{2x}{3}}{\frac{\frac{x}{3}}{10} + \frac{\frac{2x}{3}}{30}} = \frac{\frac{x}{1}}{\frac{x}{30} + \frac{x}{45}} = \frac{\frac{x}{1}}{\frac{5x}{90}} = \frac{90}{5} = 18\,(m/s)$$

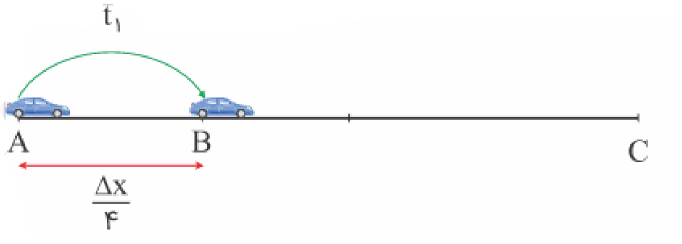
قسمت بزرگ‌تر(تقسیم زمان) $\begin{cases} \Delta t_1 = \dfrac{2t}{3}\ ,\ v_1 = 15\,m/s \\ \Delta t_2 = \dfrac{t}{3}\ ,\ v_2 = 18\,m/s \end{cases}$

$$\Rightarrow v_{av\ \text{کل}} = \frac{\frac{2t}{3} \times 15 + \frac{t}{3} \times 18}{\frac{2t}{3} + \frac{t}{3}} = \frac{10t + 6t}{t} = 16\,(m/s)$$

۱۳ گزینه ۲

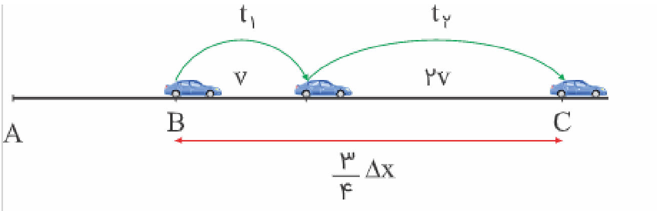
حرکت این اتومبیل را در دو مرحله بررسی می‌کنیم:

مرحلهٔ اول (AB): متحرک در زمان t_1، مسافت $\frac{\Delta x}{4}$ را با سرعت $10\,m/s$ طی کرده است.



$$t_1 = \frac{\frac{\Delta x}{4}}{10} = \frac{\Delta x}{40}$$

مرحلهٔ دوم (BC): متحرک مسافت $\frac{3}{4}\Delta x$ را در دو بازهٔ زمانی مساوی (هر یک به‌اندازهٔ t_2) با سرعت‌های v و $2v$ طی می‌کند.



$$\frac{3}{4}\Delta x = vt_2 + (2v)t_2 = 3vt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{\frac{3}{4}\Delta x}{3v} = \frac{\Delta x}{4v}$$

بنابراین سرعت متوسط در تمام‌مسیر برابر است با:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{t_{\text{کل}}} = \frac{\Delta x}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{40} + 2 \times \frac{\Delta x}{4v}}$$

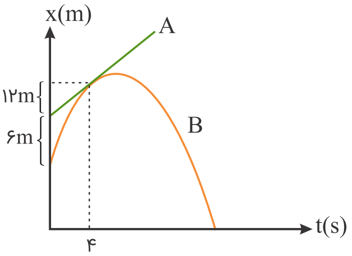
$$= \frac{1}{\frac{1}{40} + \frac{1}{2v}} = \frac{80v}{40 + 2v} = 20 \Rightarrow v = 20\,m/s$$

۱۴

گزینه ۴

نمودار متحرک A در لحظهٔ $t=۴\,s$ بر منحنی نمودار متحرک B مماس شده است؛ یعنی سرعت متحرک B در لحظهٔ $t=۴\,s$ برابر $۳\,m/s$ است.

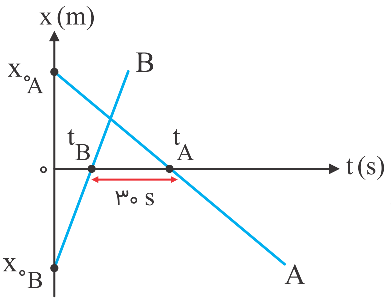
در ضمن دو متحرک A و B در $t=۴\,s$ در یک مکان قرار گرفته‌اند. اگر متحرک A طبق رابطهٔ $\Delta x = vt \Rightarrow \Delta x = ۳ \times ۴$، ۱۲ متر از مبدأ خود دور شده باشد و چون در آغاز زمان دو متحرک A و B، ۶ متر از یکدیگر فاصله داشتند، متحرک B در $t=۴\,s$ در ۱۸ متری مبدأ حرکت خود است.



۱۵

گزینه ۲

در حقیقت خواستهٔ سؤال $|x_{\circ A}| - |x_{\circ B}|$ است که چون $x_{\circ A} > \circ$ و $x_{\circ B} < \circ$ است، کافی است $x_{\circ A} + x_{\circ B}$ را به دست بیاوریم تا به پاسخ برسیم. در ابتدا با استفاده از رابطهٔ حرکت با سرعت ثابت، معادلهٔ حرکت دو متحرک A و B را می‌نویسیم:



$$\begin{cases} x_A = -۲t + x_{\circ A} \xrightarrow{x=\circ\, m} \circ = -۲t_A + x_{\circ A} \Rightarrow t_A = \dfrac{x_{\circ A}}{۲} & (*) \\ x_B = ۲t + x_{\circ B} \xrightarrow{x=\circ\, m} \circ = ۲t_B + x_{\circ B} \Rightarrow t_B = \dfrac{-x_{\circ B}}{۲} & (**) \end{cases}$$

حال با استفاده از معادله‌های (*) و (**) که در بالا به دست آمدند و باتوجه‌به اطلاعات داده‌شده روی نمودار داریم:

$$\text{نمودار}: t_A - t_B = ۳\circ\, s \xrightarrow{(*),(**)} \frac{x_{\circ A}}{۲} + \frac{x_{\circ B}}{۲} = ۳\circ \Rightarrow x_{\circ A} + x_{\circ B} = ۶\circ\, m$$

۱۶ گزینه ۱

تک‌تک موارد را بررسی می‌کنیم؛

مورد الف) باتوجه‌به اینکه شیب خط مماس در لحظهٔ اول صفر نیست، سرعت متحرک برابر با صفر نیست. (نادرست)

مورد ب) باتوجه‌به اینکه ثانیهٔ دوم می‌شود از ثانیهٔ ۱ تا ثانیهٔ ۲ و شیب خط مماس برابر با صفر است، سرعت متوسط نیز برابر با صفر است. (درست)

مورد پ) باتوجه‌به اینکه از ثانیهٔ ۲ تا ثانیهٔ ۳ نمودار $x - t$ یک خط راست است، سرعت ثابت و حرکت یکنواخت است. (درست)

دو مورد صحیح است؛ پس گزینهٔ اول صحیح است.

۱۷ گزینه ۱

اگر سرعت پله‌برقی را $v_۱$ فرض کنیم و فاصلهٔ بین آن دو نقطه را Δx فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$v_۱ = \frac{\Delta x}{۰/۵}$$

و همین‌طور اگر در پلهٔ ساکن، سرعت شخص را $v_۲$ فرض کنیم:

$$v_۲ = \frac{\Delta x}{۱}$$

در حالت سوم، سرعت انتقال شخص برابر خواهد شد با:

$$v_۳ = v_۱ + v_۲$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta t_۳ = \frac{\Delta x}{v_۳} = \frac{\Delta x}{v_۱ + v_۲} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{۰/۵} + \frac{\Delta x}{۱}} \Rightarrow \Delta t_۳ = \frac{۱}{\frac{۱}{۰/۵} + \frac{۱}{۱}}$$

$$\Rightarrow \Delta t_۳ = (\frac{۱}{۲ + ۱}) = \frac{۱}{۳}\text{min}$$

۱۸

گزینه ۴

شیب خط مماس در نقطهٔ A، $+۱۰$ است؛ بنابراین سرعت در این لحظه $+۱۰\,m/s$ می‌باشد. ازطرفی $x_A = x_۰$ است، پس سرعت اولیهٔ متحرک $-۱۰\,m/s$ می‌باشد. سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۴\,s$ است؛ بنابراین داریم:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = ۴a - ۱۰ \Rightarrow a = ۲/۵\,m/s^۲$$

حالا معادلهٔ سرعت متحرک را نوشته و سرعت را در لحظهٔ $t = ۶\,s$ به دست می‌آوریم:

$$v = ۲/۵t - ۱۰ \Rightarrow v = ۲/۵ \times ۶ - ۱۰ \Rightarrow v = ۵\,m/s$$

۱۹

گزینه ۴

شیب خط مماس در نقطهٔ A، $+۱۰$ است؛ بنابراین سرعت در این لحظه $+۱۰m/s$ است. از طرفی $x_A = x_۰$ است، پس سرعت اولیهٔ متحرک $-۱۰m/s$ است.
سرعت متحرک در لحظه $t = ۴s$ صفر است؛ بنابراین داریم:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = ۴a - ۱۰ \Rightarrow a = ۲/۵\,m/s^۲$$

حالا معادلهٔ سرعت متحرک را نوشته و سرعت را در لحظهٔ $t = ۶s$ به دست می‌آوریم.

$$v = ۲/۵t - ۱۰ \Rightarrow v = ۲/۵ \times ۶ - ۱۰ \Rightarrow v = ۵\,m/s$$

۲۰

گزینه ۲

چون حرکت دو متحرک، حرکت با شتاب ثابت است، بنابراین از معادلهٔ سرعت- زمان حرکت شتاب ثابت یعنی $v = at + v_۰$ استفاده می‌کنیم و برای هر دو متحرک این معادله را می‌نویسیم و همچنین چون دو متحرک از حال سکون حرکت کرده‌اند $v_۰ = ۰$؛ یعنی داریم:

$$\begin{cases} \text{متحرک اول} : v = at + v_۰ \xrightarrow{v=۱۰} ۱۰ = at & (۱) \\ \text{متحرک دوم} : v = at + v_۰ \xrightarrow{v=۲۲} ۲۲ = (a + ۱/۵)t & (۲) \end{cases}$$

با قرار دادن مقدار a از رابطهٔ (۱) در رابطهٔ (۲) داریم:

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۲۲ = ۱۰ + ۱/۵t \Rightarrow ۱۲ = ۱/۵t \Rightarrow t = ۸s$$