جلسه‌ی دهم، یازدهم و دوازدهم ـ نظریه‌ی مجموعه‌ها

۱. قسمت یکم:

آ) با این تعریف $(\{۲\}, ۱) = (۲, \{۱\})$ خواهد بود که مد نظر ما نیست.

ب) با این تعریف $(۲, ۱) = (۱, ۲)$ خواهد بود که مد نظر ما نیست.

قسمت دوم:

آ) خیر مناسب نیست. با این تعریف $(۲, ۱, ۲) = (۱, ۲, ۱)$ خواهد شد.

ب) بله مناسب است. اگر $\big((x_۱, y_۱), (y_۱, z_۱)\big) = \big((x_۲, y_۲), (y_۲, z_۲)\big)$ باشد، طبق تعریف زوج مرتب $(x_۱, y_۱) = (x_۲, y_۲)$ و $(y_۱, z_۱) = (y_۲, z_۲)$ می‌شود که نتیجه خواهد داد:

$$x_۱ = x_۲ \qquad y_۱ = y_۲ \qquad z_۱ = z_۲$$

ج) خیر مناسب نیست. با این تعریغ $(۱, ۲, ۲) = (۲, ۱, ۱)$ خواهد شد.

۲. فرض کنید $X \neq \phi$ و $f : X \to Y$ یک تابع باشد. ابتدا صورت هر یک از قسمت‌ها را خوب هضم کنید و سپس شروع به فکر کردن کنید!

آ) فرض کنید a عنصری دل‌خواه از X باشد. اگر f درون‌گستر باشد، تابع

$$g(y) = \begin{cases} f^{-۱}(y) & y \in f[X] \\ a & y \notin f[X] \end{cases}$$

شرط ما را خواهد داشت.

برعکس، فرض کنید تابع g تابعی با شرایط گفته شده است و فرض کنید $f(x_۱) = f(x_۲)$. پس $x_۱ = g\big(f(x_۱)\big) = g\big(f(x_۲)\big) = x_۲$. پس f درون‌گستر (یک‌به‌یک) است و حکم اثبات می‌شود.

ب) فرض کنید f برون‌گستر باشد. به ازای هر $y \in Y$ دست کم یک $x \in X$ وجود دارد که $f(x) = y$ باشد. به ازای هر y یک x این‌چنینی انتخاب کنید و تابع g را بسازید. توجه کنید این‌جا از اصل انتخاب استفاده کردیم.

برعکس، فرض کنید تابع g با شرایط گفته شده وجود دارد و فرض کنید $y \in Y$ باشد. در این صورت $f\big(g(y)\big) = y$ است؛ پس دست کم یک x وجود دارد که y را بسازد و f تابعی برون‌گستر(پوشا) است.

ج) فرض کنید f درون‌گستر و h_1,h_2 دو تابع با شروط گفته شده باشند. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید $h_1 \neq h_2$ باشد. پس $y \in Y$ وجود دارد که $h_1(y) \neq h_2(y)$. پس از آن‌جایی که f درون‌گستر (یک‌به‌یک) است، باید $f\big(h_1(y)\big) \neq f\big(h_2(y)\big)$ باشد که تناقض است و حکم ثابت می‌شود

برعکس، فرض کنید f درون‌گستر نباشد. پس $x_1,x_2 \in X$ وجود دارند که $x_1 \neq x_2$ امّا $f(x_1) = f(x_2)$ باشد. حال h_1,h_2 را طوری تعریف کنید که به ازای هر $y \in Y$ داشته باشیم $h_1(y) = x_1, h_2(y) = x_2$. حال به ازای هر y داریم $f\big(h_1(y)\big) = f\big(h_2(y)\big)$ امّا $h_1 \neq h_2$ و حکم ثابت می‌شود.

د) فرض کنید f برون‌گستر باشد و توابع h_1,h_2 شرط گفته شده را داشته باشند. برای هر $y \in Y$ دست کم یک $x \in X$ وجود دارد که $f(x) = y$ باشد. با در نظر گرفتن چنین x ای و فرض سوال به ازای هر y داریم $h_1(y) = h_2(y)$ و حکم ثابت می‌شود.

برعکس، فرض کنید f برون‌گستر نباشد. پس $y \in Y$ وجود دارد که در تصویر f نباشد. حال h_1,h_2 را دو تابع دل‌خواه تعریف کنید که در همه جا برابرند؛ به جز این که $h_1(y) \neq h_2(y)$ باشد. در این صورت به ازای هر x، $h_1\big(f(x)\big) = h_2\big(f(x)\big)$ است؛ امّا $h_1 \neq h_2$ و حکم ثابت می‌شود.

۳. آ) به راحتی می‌توانید حکم را با استقرا ثابت کنید.

ب) به ازای هر $i \in \mathbb{N}$، X^i شامل تمام دنبالک‌های به طول i است. از آن‌جایی که هر یک از این X^i ها شمارا هستند، پس اجتماع آن‌ها (که خود مجموعه‌ی سوال است) نیز شماراست (طبق قضیه‌ی اثبات شده در کلاس).

ج) هر چندجمله‌ای این‌چنینی، متناظر با یک دنبالک از اعداد صحیح است. پس تعداد چندجمله‌ای‌های گفته شده شماراست. از طرفی هر چندجمله‌ای درجه n حداکثر ریشه‌ی حقیقی دارد. پس باز هم با اجتماع چند مجموعه‌ی شمارا سر و کار داریم که قطعن شماراست. از آن‌جایی که مجموعه‌ی اعداد حقیقی شمارا نیست، مجموعه‌ی اعداد متعالی نیز شمارا نیست؛ زیرا در غیر این صورت مجموعه‌ی اعداد حقیقی اجتماع دو مجموعه‌ی شمارا خواهد بود که تناقض است.

۴. آ) تابع $f(x) = tan^{-1}\big(\pi(x - \frac{1}{2})\big)$ خواسته‌ی مسئله را برآورده می‌کند.

ب) به ازای هر نقطه‌ی (x,y) با نمایش‌های دهدهی $x = 0.x_1x_2\ldots$ و $y = 0.y_1y_2\ldots$، عدد $z = 0.x_1y_1x_2y_2\ldots$ را متناظر می‌کنیم.

ج) با استفاده از (آ)، تابعی یک‌به‌یک از نقاط یک مربع به نقاط صفحه وجود دارد. با استفاده از (آ) و

(ب)، تابعی یک‌به‌یک از نقاط یک مربع به اعداد حقیقی نیز وجود دارد. پس بین این دو مجموعه تابعی یک‌به‌یک وجود دارد.

۵. بروید از سایت‌های‌تان پاسخ را ببینید | :