گراف های مسطح

حسین نادری
دانشجوی صنعتی شریف
بهار ۱۳۹۵

یک گراف مسطح است اگر بتوان آن را روی صفحه $R^۲$ طوری کشید که نقطه $f(v) \in R^۲$ به جای راس v و به جای یال (u,v) ، یک خم پیوسته بین $f(u)$ و $f(v)$ کشیده شده باشد، به شرطی که هیچ دو یالی یک دیگر را به جز در نقاط انتهایی قطع نکنند.
در یک نمایش مسطح از یک گراف مسطح، علاوه بر راس ها و یال ها، وجه ها نیز وجود دارند. وجه ها ناحیه های بسته ی $R^۲$ پس از حذف راس ها و یال ها از نمایش مسطح اند.
به دست آوردن نمونه هایی از گراف های مسطح کار ساده ای است. برای مثال هر درختی مسطح است، هر چرخ C_n مسطح است، $K_۴$ مسطح است و ... . اما یک تلاش مبتدیانه برای نمایش مسطح بودن $K_۵$ به شکست منجر می شود. در واقعیت $K_۵$ اصلا مسطح نیست. نشان دادن مسطح نبودن یک گراف کار ساده ای نیست که بعد تر به آن اشاره می کنیم. ابتدا سعی می کنیم ویژگی های عمومی گراف های مسطح را بیابیم و بعد نشان دهیم، $K_۵$ این ویژگی ها را ارضا نمی کند.

۱ رابطه اویلر[۱]

قضیه ۱ *اگر $G=(V,E)$ گراف مسطح باشد و F مجموعه وجه های یک نمایش مسطح از G باشد. داریم:*

$$|V|-|E|+|F|=۲$$

اثبات. به استقرا روی تعداد یال ها.
اگر G بدون دور باشد، $|F|=۱$ است و قضیه برقرار است چون $|E|=|V|-۱$. پایه ی استقرا گراف های بدون دور اند.
در غیر این صورت گراف حداقل یک دور دارد. e را یک یال از یک دور در نظر بگیرید. با حذف e از گراف G، گراف G' حاصل می شود که $|V|$ راس، $|E|-۱$ یال و $|F|-۱$ وجه دارد (حذف یک یال از یک دور باعث ادغام دو وجه می شود).
به استقرا داریم $|V|-(|E|-۱)+(|F|-۱)=۲$ و در نتیجه $|V|-|E|+|F|=۲$.

$\diamond$

رابطه اویلر به تنهایی ابزاری برای نشان دادن مسطح نبودن گراف ها به ما نمی دهد، چون در بیان این رابطه به صورت ضمنی به مجموعه ی وجه ها در یک نمایش مسطح از گراف ارجاع داده می شود.
اما می توانیم با استفاده از رابطه اویلر، شرط لازم زیر برای مسطح بودن را به دست آوریم.

لم ۲ *اگر گراف $G=(V,E)$ مسطح باشد و $|V|>۲$، آن گاه $|E|\leq ۳|V|-۶$.*
اثبات. اگر $|E|\leq ۳$ درستی قضیه با بررسی تحقیق می شود (دقت کنید $|V|>۲$).
در غیر این صورت از آن جایی که G حداقل ۳ یال دارد، دست کم ۳ یال پیرامون هر وجه قرار دارند. علاوه بر این هر یال حداکثر مجاور ۲ وجه است. در نتیجه $|۳F|\leq|۲E|$.
با جای گذاری این رابطه در رابطه اویلر داریم: $|E|\leq ۳|V|-۶$.

$\diamond$

نتیجه ۳ *میانگین درجات راس های یک گراف مسطح اکیدا کوچکتر از ۶ است.*

با استدلالی مشابه می توان کران های بهتری برای تعداد یال ها یافت با این شرایط که دور با طول های کوچک وجود نداشته باشد (برای مثال در لم قبل دور به طول کمتر از ۳ وجود نداشت و رابطه $|E|\leq ۳|V|-۶$ نتیجه گرفته شد یا مثلا اگر هیچ دوری در گراف وجود نداشته باشد حداکثر $|V|-۱$ یال وجود دارد).

لم ۴ *اگر گراف $G=(V,E)$ مسطح با $|E|\geq g$ باشد و هیچ دوری با طول کمتر از g نداشته باشد، آن گاه داریم:*

$$|E|\leq \frac{g}{g-۲}(|V|-۲)$$

اثبات. اثبات دقیقا مشابه اثبات قبلی است با این تفاوت که می دانیم هر وجه حداقل g یال روی محیطش دارد.
از $g|F|\leq ۲|E|$ و رابطه اویلر داریم: $|E|\geq \frac{g}{g-۲}(|V|-۲)$.

$\diamond$

[۱] Euler

۲ چند گراف نامسطح

به کمک شرط هایی که در بخش قبل برای مسطح بودن گراف به دست آوردیم، ثابت می کنیم گراف های زیر مسطح نیستند.

- $K_۵$: $K_۵$ شامل ۵ راس و ۱۰ یال است، درنتیجه طبق لم ۲ مسطح نیست.
- $K_{۳,۳}$: $K_{۳,۳}$ ۶ راس و ۹ یال دارد. در این مورد لم ۲ کمکی نمی کند. اما توجه داشته باشید که چون دوبخشی است دور به طول ۳ ندارد. این جا لم ۴ با $g = ۴$ به درد می خورد. $K_{۳,۳}$ در نتیجه مسطح نیست.
- هر گرافی که شامل یک زیرگراف نامسطح باشد، نامسطح است. پس $K_۶$ و $K_{۴,۵}$ نامسطح اند.

حقیقت شوکه کننده این است که سه گزاره بالا همه ی گراف های نامسطح را نشان می دهند. رایاضی دانان در گذشته از نامسطح بودن $K_۵$ و $K_{۳,۳}$ با خبر بودند ولی نمی دانستند این دو مثال چقدر اساسی اند. قضیه کوراتوسکی[۲] (۱۹۳۵) می گوید:

قضیه ۵ *گراف G مسطح است اگر و فقط اگر شامل هیچ زیرگراف همریخت با $K_۵$ و $K_{۳,۳}$ نباشد.*

۳ رنگ آمیزی گراف های مسطح

یکی از زمینه های مهیج تحقیق در رابطه با گراف های مسطح به حدس چهار رنگ در سده ی ۱۸۰۰ بر می گردد. چند رنگ برای رنگ آمیزی رئوس یک گراف مسطح نیاز است به طوری که رنگ هیچ دو راس همسایه ای یکسان نباشد؟
(سوال را به این طریق نیز می توان بیان کرد: تعداد رنگ های مورد نیاز برای رنگ ناحیه های یک نقشه جغرافیایی به شرطی که هیچ دو ناحیه ی مجاوری هم رنگ نباشند، چقدر است؟). خیلی وقت پیش فرانسیس گوتر[۳] حدس زد که ۴ رنگ برای این امر کافی است. ریاضی دانان بسیاری در راه اثبات این حدس شکست خوردند و آن قدر این مساله بدنام شد که در طی زمان به مرض چهار رنگ شهرت گرفت.
در پایان این مقاله اثبات خواهیم کرد که ۵ رنگ برای رنگ آمیزی گراف های مسطح کافی است.

قضیه ۶ (قضیه ۶رنگ) *هر گراف مسطح را می توان با ۶ رنگ، رنگ آمیزی کرد.*
اثبات. به استقرا روی تعداد راس های G.
از نتیجه ی ۳ نتیجه می گیریم راس v در G با حداکثر درجه ۵ وجود دارد. v را از G حذف کنید. گراف باقی مانده مسطح است و طبق فرض استقرا ۶رنگ پذیر است. v را برگردانید. حداقل یک رنگ وجود دارد که هیچ یک از همسایه های v (حداکثر ۵ راس) به آن رنگ نیستند. اگر v را با یکی از رنگ های استفاده نشده در همسایه هایش رنگ کنید؛ گراف جدید با ۶ رنگ، رنگ آمیزی شده است.

$\diamond$

[۲] Kuratowski
[۳] Francis Guthrie

در ۱۸۹۰، هیوود[۴] اولین ایده های اساسی برای حل این مساله را مطرح کرد. او ثابت کرد گراف های مسطح ۵رنگ پذیر اند (در میان مسیر اثبات، وی نقصی را در اثبات کمپ برای حدس چهار رنگ که به مدت ۱۱ سال توسط عموم پذیرفته شده بود پیدا کرد).

قضیه ۷ (قضیه ۵رنگ) *هر گراف مسطح G را می توان با ۵ رنگ، رنگ آمیزی کرد.*
اثبات. به استقرا روی تعداد راس های G.
اگر یک راس با درجه $\leq$ ۴ وجود داشته باشد، آن راس را حذف می کنیم و گام استقرا را مانند اثبات قضیه ۶ رنگ اثبات می کنیم.
اگر چنین نبود، حداقل یک راس v از درجه ۵ دارد (نتیجه ۳). v را از G حذف کنید و طبق فرض استقرا گراف مسطح باقی مانده ۵ رنگ پذیر است. اکنون v رابرگردانید.
اگر در میان ۵ همسایه ی v در G همه ی ۵ رنگ استفاده نشده بودند، v را با رنگ استفاده نشده رنگ می کنیم و گام استقرا برقرار می شود.
در غیر این صورت همه ی ۵ همسایه ی v به رنگ های مختلف اند. فرض کنید u و w دو همسایه ی v اند که به یک دیگر یال ندارند (اگر چنین دو راسی وجود نداشته باشد یعنی همه ی همسایه های به یک دیگر یال دارند. خود این رئوس تشکیل یک زیرگراف همریخت با K_5 می دهند، که با فرض مسطح بودن G در تضاد است). v را از G حذف کنید. پس از حذف دو راس u و w را با یک دیگر ادغام کنید. به این صورت که ابتدا آن دو را حذف کنید، سپس راس d را به جای آن ها به G اضافه کنید. حال اجتماع مجموعه های همسایه های u و w را به d وصل کنید.
گراف به دست آمده راس های کمتری دارد، در نتیجه می توان آن را طبق فرض استقرا با ۵ رنگ، رنگ آمیزی کرد. اگر دو راس u و w را از یک دیگر جدا کنیم، یک رنگ آمیزی با ۵ رنگ از همه ی رئوس به جز v به دست می آید. آن چه که از ادغام و دوباره جدا کردن u و w به دست آوردیم، دو همسایه ی همرنگ در میان همسایه های v بود. اکنون v را با رنگ استفاده نشده در میان همسایه هایش رنگ می کنیم و یک رنگ آمیزی با ۵ رنگ برای G به دست می آید.

$\diamond$

اثبات استقرایی بالا علاوه بر اثبات قضیه ۵ رنگ کار دیگری هم می کند. در حقیقت یک الگوریتم کارآمد برای رنگ آمیزی گراف های مسطح با ۵ رنگ ارائه می دهد (دقت کنید که نمایش مسطح برای گراف ارائه نمی دهد و باید از قبل مسطح رسم شده باشد).
سر انجام در دهه ی ۷۰ میلادی اپیل[۵] و هیکن[۶] حدس ۴ رنگ را اثبات کردند. اثبات غیرمرسوم آن ها مبتنی بر دو چیز بود:

- کاهش حدس به بررسی تعدادی متناهی گراف (بر اساس کار های هش[۷] در ۱۹۵۰)
- و به دست آوردن رنگ آمیزی برای حالات خاص به وسیله کامپیوتر. تا به امروز هیچ روش ساده ای که از کامپیوتر استفاده نکند کشف نشده است!

hnaderi268.blog.ir
hnaderi268@gmail.com

[۴] Heawood
[۵] Appel
[۶] Haken
[۷] Heesch