به نام خدا

ترکیبات

جلسه دوم

۱۳۸۹/۴/۲۳

سید احسان آزرم سا
seazarmsa@gmail.com

نگین السادات موسوی
mousavi۸@gmail.com

سوال: دسته کارتی از ۵۲ کارت مختلف تشکیل شده است. در هر حرکت می توانیم گروهی از کارت ها را یک جا از قسمتی از دسته کارت بیرون بکشیم و آن ها را بی آن که ترتیبشان در گروه را به هم بزنیم یا کارتی را پشت و رو کنیم، در جایی دیگر (به همان صورت) قرار دهیم. نشان دهید می توان با ۲۷ حرکت ترتیب کارت ها را برعکس کرد اما با ۲۶ حرکت امکان پذیر نیست.

- **برای ۹ کارت نشان دهید می توان با ۵ حرکت این کار را انجام داد.**

این قسمت به هیچ وجه بخش راحتی نیست و احتیاج به زمان نسبتا خوبی برای حل آن دارد. برای راهنمایی سعی کنید ترتیبی به شکل ۳ ۲ ۷ ۸ ۹ ۶ ۵ ۴ ۱ بدست آورید. بعد از این طی دو حرکت می توانید کار را تمام کنید.

این گونه سوالات، سوالاتی نیستند که منطق خاصی پشت سر حل آن ها باشد و به شدت نیازمند تلاش و کمی هم شانس هستند. اما این بدان معنا نیست که ما چند حرکت به صورت کاتوره ای و بی هدف انجام دهیم تا ببینیم حاصل چه می شود. می توان با پیدا کردن اصولی یا با هدف گذاری های خوبی تا حدی روند حل را سریع تر کرد. همچنین به دنبال روندی می گردیم که با تکرار آن بتوانیم به هدف خود برسیم.

توضیحات زیر برای بدست آوردن شهودی که به حل مساله کمک می کند، بیان شده است. شما در تمامی مراحل توجه داشته باشید که ۳ ۲ ۷ ۸ ۹ ۶ ۵ ۴ ۱ را بسازید و اگر جایی احساس می کنید که می توانید این ترتیب را ایجاد کنید، خودتان دست به کار شوید.

با انجام حرکت آخر، کارت ها به صورت ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ مرتب می شوند. پس قبل از این حرکت هم ساختار کارت ها تفاوت چندانی با این وضعیت ندارد. و کارت ها تا حد خوبی به صورت مطلوب، مرتب شده اند و بلوک های بزرگ و مرتبی وجود دارند.

حال سعی می کنیم حدودا با k حرکت دو بلوک مجاور هم به شکل

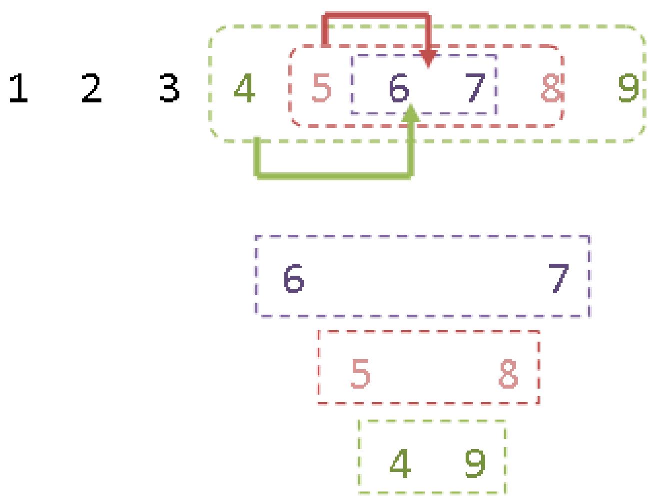
$a, a-1, a-2, \cdots, a-k$	$b+k, b+k-1, \cdots, b+1, b$

را بسازیم؛ به طوریکه شامل بیشترین اعداد ممکن (نه لزوما همه اعداد) باشند و $a < b$ باشد. پس برای این که این بلوک ها اعداد بیشتری را در بر بگیرند، احتمالا بهتر است b تا حد ممکن کو چک وa و k تا حد ممکن بزرگ باشند. پس اولا می توان گفت $b = a + ۱$ و $a, b \approx \frac{\text{تعداد کارت ها}}{۲}$.

در نتیجه برای آن که بتوانیم این دو بلوک را بسازیم، سعی می کنیم در هر حرکت، اندازه هر بلوک را یکی افزایش دهیم.

حال چگونه می توان چنین چیزی را ایجاد کرد؟ با فرض $b = a + ۱$، در اول کار $a + ۱$ و a عناصر پایه بلوک خود را ایجاد می کنند. در حرکت بعدی $a - ۱$ و $b + ۱$ را باید به بلوک ها اضافه کنیم. پس احتیاج داریم شرایطی را ایجاد کنیم که این دو عدد مجاور هم واقع شوند. بنابراین قبل از آن باید گروه

$a, b(= a + ۱)$ را جا به جا کنیم. فعلا بپذیرید که خوب است آن ها را تا حد امکان به سمت چپ بیاوریم. (بعدا دلیلش را خواهید دید.) مثلا آن ها را بین ۱ و ۲ قرار می دهیم. همچنین فرض می کنیم $a = ۶$ (مهم این است که روند حل مساله را درک کنید، این نکات ریز را با چند بار سعی و خطا و مشاهداتی ساده می توانید متوجه شوید). سپس باید $a - ۲$ و $b + ۲$ را به بلوک هایمان اضافه کنیم، مشاهده می کنیم که این کار نیز ممکن است. شکل زیر نشان دهنده شمایی از طریقه به وجود آوردن بلوک های ذکر شده، هستند.

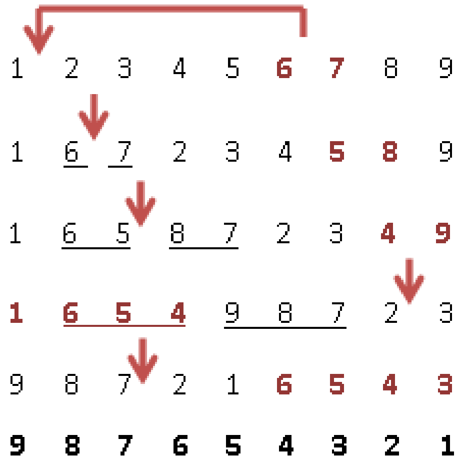


قبل از خواندن ادامه مقاله، با توجه به مطالبی که تا کنون گفته شد، دوباره سعی کنید این قسمت را حل کنید.

امیدوارم به این قسمت احتیاج پیدا نکرده باشید، اما پاسخ را در شکل زیر می توانید مشاهده کنید.

در حرکت اول، مقدمه تشکیل دو بلوک -مشخص شده در شکل- را مهیا کردیم، سپس طی دو حرکت بلوک ها را ساختیم و در دو حرکت آخر آن ها را جفت هم چیدیم.

به این صورت عمل می کنیم:



- **برای ۵۲ کارت نشان دهید می توان با ۲۷ حرکت ترتیب اولیه را معکوس کرد.**
- با تعمیم روش فوق سوال را حل می کنیم. زوج اعداد وسط را جا به جا می کنیم، سپس به ترتیب بلوک های متشکل از دو عدد $(k, n+۱-k)$ (اینجا $n = ۵۲$)را بر می داریم و بین دو عدد
- $(k+۱, n-k)$ می گذاریم. پس از $\frac{n}{۲}$ حرکت دو بلوک شامل اعداد ۱ تا ۲۶ و ۲۷ تا ۵۲ با ترتیب موردنظرمان (نزولی و متوالی) داریم. در حرکت آخر، بلوک اول را سمت راست آخرین عدد می گذاریم که این ترتیب مورد نظر ما را نتیجه می دهد.

	۱ ۲ ... ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ... ۵۱ ۵۲
مرحله ۱	۲۶ ۲۷ ۱ ۲ ... ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ... ۵۱ ۵۲
۲	۲۶ ۲۵ ۲۸ ۲۷ ۱ ۲ ... ۲۳ ۲۴ ۲۹ ۳۰ ... ۵۱ ۵۲
۳	۲۶ ۲۵ ۲۴ ۲۹ ۲۸ ۲۷ ۱ ۲ ... ۲۳ ۳۰ ... ۵۱ ۵۲
:	:
۲۶	۲۶ ۲۵ ۲۴ ۲۳ ... ۲ ۱ ۵۲ ۵۱ ... ۳۰ ۲۹ ۲۸ ۲۷
۲۷	۵۲ ۵۱ ... ۳۰ ۲۹ ۲۸ ۲۷ ۲۶ ۲۵ ۲۴ ۲۳ ... ۲ ۱

تا این جای کار نشان دادیم که با ۲۷ حرکت می توان ترتیب کارت ها را برعکس کرد. اما صورت مسئله از ما می خواهد که نشان دهیم با کمتر از ۲۷ حرکت، این کار امکان پذیر نیست. حال به اثبات این امر می پردازیم.

- **با ۱۷ حرکت این کار امکان پذیر نیست.**

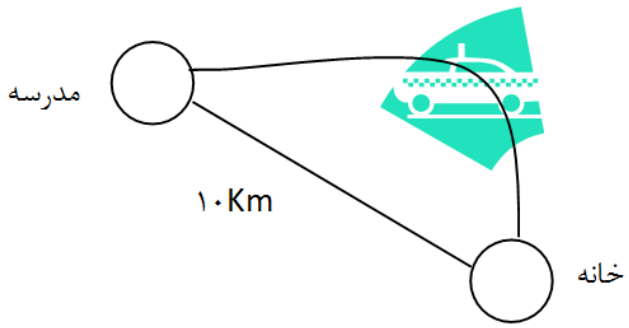
برای این که نشان دهیم با تعداد حرکات مشخصی می توان یک کار را انجام داد، کافی است که مثالی ارائه دهیم. اما توضیح این که با کمتر از آن تعداد، آن کار میسر نیست پیچیدگی بیشتری دارد. به وضوح نمی توانیم تمامی حالات ناشی از ۱۷ حرکت را بررسی کنیم و مشاهده کنیم در هیچ کدام ترتیب کارها برعکس نمی شود.

با هر حرکتی که انجام می دهیم، تغییری در ترتیب کارت ها ایجاد می کنیم. این تغییرات را پشت سر هم اعمال می کنیم تا از ترتیب اولیه به عکس آن برسیم. اما دو سوال وجود دارد: این که حالات اولیه و نهایی با هم چقدر تفاوت(فاصله) دارند و ما در هر حرکت می توانیم چقدر تغییر در ترتیب کارت ها ایجاد کنیم؟ در واقع بررسی می کنیم که احتمال انجام این کار وجود دارد یا نه.

توجه کنید که ملاکمان برای **میزان تغییر**، چیزی نیست که در مسئله به آن اشاره شده باشد یا اجبارا یک ملاک مشخص مد نظر باشد. سعی می کنیم ملاک هایمان را با توجه به تفاوت های بین دوحالت اولیه و

حالت نهایی کارت ها و نوع حرکت ها تنظیم کنیم. این ملاک ها لزوما چیزهای پیچیده ای نیستند، به هیچ وجه سخت فکر نکنید.

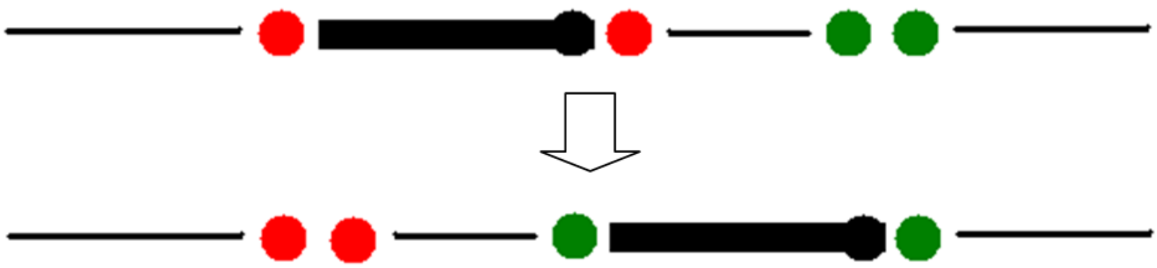
شبیه این گونه استدلال ها را در زندگی روزمره نیز استفاده می کنیم. مثلا فرض کنید که در شهر شما از تاکسی و اتوبوس برای رفت و آمد استفاده می شود. همچنین برخی مسیرها را می توان پیاده رفت. فرض کنید تاکسی ها (که سریعترین وسیله رفت و آمد است)به طور متوسط به ازای هر کیلومتر که شما را می برند، ۵۰۰ تومان از شما می گیرند و سرعتشان حداکثر ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت است. اتوبوس ها نیز به ازای هر کیلومتر ۱۰۰ تومان از شما دریافت می کنند. یک روز صبح شما می خواهید از خانه خود به مدرسه تان که در فاصله ۱۰ کیلومتری از خانه شما واقع شده است(منظور فاصله ریاضی است)، عزیمت کنید. پس در اول شما در خانه خود بوده اید و در آخر هم در مدرسه خواهید بود. بررسی می کنیم حداقل چقدر زمان می برد که شما به مقصد برسید. خوب به وضوح شما زودتر از ۵ دقیقه به مدرسه نمی رسید. زیرا اگر ملاک تغییر را فاصله از مدرسه در نظر بگیریم، در هر دقیقه حداکثر ۲ کیلومتر به مدرسه نزدیکتر می شوید (مسیر تماما در جهت مدرسه شما نیست).



فرض کنید با تاکسی در ۱۵ دقیقه به مدرسه می رسید و شما ۲۰۰۰ تومان برای رفتن به مدرسه دارید. آیا باز هم می توانید در ۱۵ دقیقه به مدرسه برسید؟ شما با ۲۰۰۰ تومان، تنها ۴ کیلومتر از تاکسی می توانید استفاده کنید، اما مسیر خانه تا مدرسه از ۱۰ کیلومتر بیشتر است. پس نمی توانید تمام راه را با تاکسی بروید.

مشاهده نشان می دهد که شماره کارت سمت راست برای تمامی کارت های از ۱ تا ۵۲ تغییر کرده است (در سمت راست آخرین کارت یک کارت فرضی صفر و در سمت چپ اولین کارت یک کارت ۵۳ قرار دهید).

همچنین ساختار بلوکی حرکات ایجاب می کند که هر حرکت برای تعداد محدودی کارت، شماره کارت سمت راست را تغییر دهد. دقیقا در هر حرکت می تواند برای ۳ کارت، شماره کارت راست را تغییر دهد.



ساختاری شماتیک از یک حرکت (منظور از هر دایره یک کارت است)

در ساختار شماتیک همان جور که مشاهده می کنید، کارت هایی که برای آن ها کارت سمت راستی شان تغییر می کنند، عبارت اند از کارت قرمز (سمت چپی)، کارت سبز (سمت چپی) و کارت سیاه. پس حداکثر برای ۳ کارت وضعیت کارت بعدی شان تغییر می کند(اما این امر نیازمند استدلالی دقیق تر است که آن بر عهده خواننده).

ما باید طی حرکات خود برای ۵۲ کارت، وضعیت کارت بعدی را تغییر دهیم. اما این کار با ۱۷ حرکت میسر نیست زیرا $۳ \times ۱۷ < ۵۲$.

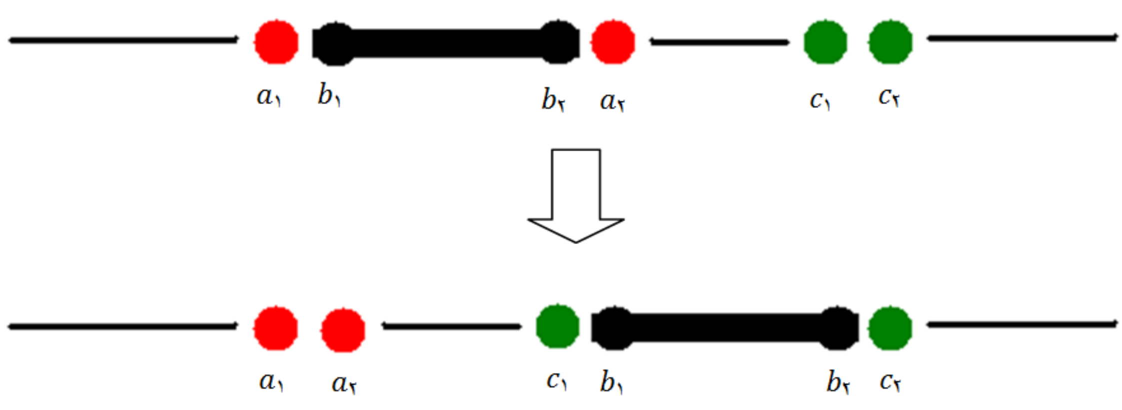
- **با ۲۶ حرکت این کار امکان پذیر نیست.**

در قسمت قبلی ملاک تغییرمان، تعداد کارت هایی بود که کارت بعدی آن ها تغییر کرده بود. با این ملاک متوجه شدیم که دست کم به ۱۷ حرکت احتیاج داریم. اما این ملاک تضمین نمی کند که ۲۷ حرکت نیز لازم است. بنابراین سعی می کنیم این ملاک را اصلاح کنیم. برای این کار، می توانیم از روشی که منجر به برگرداندن کارت ها طی ۲۷ حرکت شدند، کمک بگیریم. یا می توان برای این که پیچیدگی بررسی مان کمتر شود، روشمان در حالت ۹ کارت را بررسی کنیم. در یکی از حرکات میانی این تغییر را شاهد بودیم.

$$۱۶۵ \uparrow ۸۷۲۳(۴۹) \Longrightarrow ۱۶۵۴۹۸۷۲$$

در ملاک قبلی، وقتی حرکات ایده آل بودند که برای هر حرکت طی یک و حداکثر یک حرکت بتوانیم تغییر مطلوب (مثلا کارت بعد از ۸ را طی یک حرکت به ۷ تغییر دهیم) را ایجاد کنیم. الان طی حرکت فوق عدد بعد از ۵، از ۸ به ۴ تغییر کرده است. بعد از ۳، در اول کارت ۴ بوده که بعد از آن حذف شده است(ما گفتیم که می توانیم یک کارت فرضی به شماره ۰ در انتهای ردیف قرار دهیم، اما حق هیچ گونه تغییری روی آن نداریم. در این صورت کارت بعد از ۴ به ۰ تغییر کرده است). کارت بعداز ۹ هم از ۰ به ۸ تغییر کرده است. همان طور که مشاهده می کنیم تغییر دوم ایده آل نیست و احتمالا نمی توان آن را با حرکت ایده آل دیگری تعویض کرد. پس ملاک تغییرمان را کمی تغییر می دهیم تا با حرکاتمان منطبق تر شود. می توانیم ملاک تغییر را تعداد کارت هایی که شماره کارت بعدی شان در حالت مطلوب قرار گرفته است، در نظر بگیریم. این ملاک کمی سخت گیرانه است و می توانید مشاهده کنید که حالت بندی ها و محاسبات مربوط به آن کمی دشوار است. برای همین کمی از سخت گیری مان می کاهیم. ملاک سنجش مان را تعداد کارت هایی در نظر می گیریم که از کارت سمت راست خود بزرگ تر باشند.

در اول تنها کارت ۵۲ از کارت بعدی خود(همان ۰ فرضی) بزرگتر است. اما در آخر تمامی ۵۲ کارت این خاصیت را دارا خواهند بود. دوباره این حرکت و میزان تغییر آن را طی یک شکل شماتیک بررسی می کنیم.



ساختاری شماتیک از یک حرکت

نشان می دهیم در هر حرکت تعداد کارت هایی که از کارت بعدی خود بزرگتر هستند را حداکثر دو مرتبه می توان افزایش داد. فرض کنید طی یک حرکت بتوان سه مرتبه این تعداد را افزایش داد. در شکل شماتیک این روند را بررسی می کنیم. برای این که چنین اتفاقی بیفتد باید قبل از انجام حرکت، این نامساوی ها برقرار باشند:

$$a_1 < b_1 \qquad b_2 < a_2 \qquad c_1 < c_2$$

همچنین بعد از حرکت نامساوی های ذیل باید برقرار باشند:

$$a_1 > a_2 \qquad c_1 > b_1 \qquad b_2 > c_2$$

اما به راحتی می توان دید که این ۶ نامساوی با هم در تناقض هستند. پس همان طور که گفته شد در هر حرکت حداکثر دو مرتبه می توان تعداد کارت هایی که از کارت بعدی خود بزرگتر هستند را افزایش داد. طی حرکات ما باید این مقدار ۵۱ مرتبه افزایش پیدا کند. پس لااقل به ۲۶ حرکت طبق این استدلال احتیاج داریم. زیرا برای ۲۵ حرکت داریم:

$$۲۵ \times ۲ + ۱ < ۵۲$$

این نتیجه، فاصله کمی با خواسته مسئله دارد. پس به نظر می رسد که کافی است اصلاحات کوچکی در حد بررسی در چند حرکت خاص، انجام دهیم. بررسی را از در دسترس ترین حرکات شروع می کنیم. ببینید که در حرکت اول حداکثر یک مرتبه می توان این مقدار را افزایش داد. در حرکت آخر هم می توان دید که حداکثر یک مرتبه تعداد کارت هایی که از کارت بعدی خود بزرگتر هستند، افزایش پیدا می کند.

در نتیجه طی ۲۶ حرکت تعداد چنین کارت ها حداکثر برابر $۵۱ = ۱ + ۲ + ۲ \times ۲۴$ خواهد بود. اما در حالت نهایی تعداد چنین کارت هایی ۵۲ خواهد بود. پس نشان دادیم که به ۲۷ حرکت احتیاج داریم.

در قسمت اول نمونه ای از مسائلی که طی چند حرکت، یک عملیات مشخص صورت گیرد را بررسی کردیم و هدف از آوردن این سوال این بود که نشان دهیم در این گونه مسائل باید تلاش بسیار و بصیرت نسبت به اعمال داشت.

قسمت دوم، مثالی از مفهوم **تعداد حرکات لازم** بود و هدف از این سوال این بود که با این مفهوم و طرز رفتار با این مقوله آشنا شوید.