مقدمه. یکی از دیدگاه‌های حاکم بر مکانیک کلاسیک، روش لاگرانژی است. در بسیاری از موارد، استفاده از این روش ساده‌تر و کاربردی‌تر از روش نیوتنی است. در این مسئله می‌خواهیم این روش را برای یک سیستم خاص به کار ببندیم.

هر سیستم از چند پارامتر حالت تشکیل شده است که مختصات مکانی سیستم را نشان می‌دهند؛ و آن‌ها را با q_1 ، q_2 ، q_3 ، ... نشان می‌دهیم. آهنگ تغییر این پارامترها را نیز $\dot{q}_1$ ، $\dot{q}_2$ ، $\dot{q}_3$ ، ... می‌نامیم. پارامتر L را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

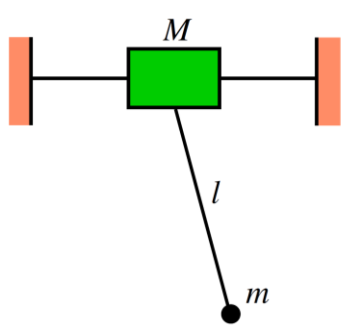
$$L = T - V$$

که در آن T انرژی جنبشی و V انرژی پتانسیل کل سیستم می‌باشد.

روش لاگرانژی بیان می‌کند که با حل معادله‌ی زیر برای هر یک از پارامترهای حالت، می‌توانیم آن پارامتر حالت را بدست آوریم.

$$\circledast : \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

حال سیستم زیر را در نظر بگیرید. جسم کوچکی به جرم m توسط نخی به طول l به جسم دیگری به جرم M که می‌تواند در راستای افقی حرکت کند، متصل شده است.



الف) دو پارامتر حالت مناسب برای سیستم انتخاب کنید و آن‌ها را $q_۱$ و $q_۲$ بنامید. با محاسبه‌ی انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل سیستم، لاگرانژی کل سیستم L را برحسب آن‌ها بدست آورید. (۳ نمره)

م) با استفاده از رابطه‌ی ⊛ دو معادله‌ی دیفرانسیل، شامل پارامترهای حالت و مشتق‌های زمانی آن‌ها، بنویسید. سپس آن‌ها را با فرض کوچک بودن نوسان‌های جرم m بازنویسی کنید. (۳ نمره)

ی) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت قبل و راهنمایی داده شده، فرم کلی $q_۱$ و $q_۲$ را بدست آورید. (۳ نمره)

د) اگر $C = ۰$ باشد، حرکت هر دو جسم را تحلیل کنید. (۱ نمره)

راهنمایی: اگر u، v و s توابعی از زمان باشند؛ جواب‌های کلی دو معادله دیفرانسیلِ

$$\ddot{v} + A\ddot{u} = ۰ \qquad\qquad \ddot{s} + \omega^۲ s = ۰$$

به ترتیب، به صورتِ

$$v = -Au + Bt \qquad\qquad s = C\cos(\omega t + \phi)$$

می‌باشد. که درآن‌ها A، B، C، ω و ϕ مقادیر ثابتی هستند.