بسمه تعالی

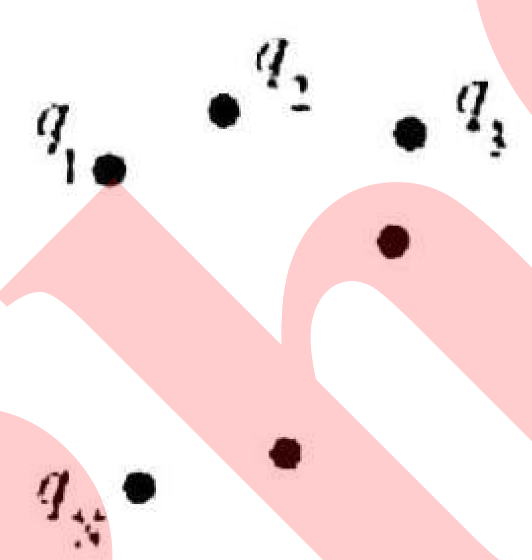
آزمون دوم المپیاد فیزیک (تابستان 96)　　　　　　مدت : 4 ساعت

96/5/19

مسئله ی 1)

آ) مطابق شکل بارهای q_1، q_2، ...، q_N در مکان های مشخصی قرار دارند به طوری که فاصله ی بار i ام تا بار jام برابر r_{ij} است. پتانسیل الکتریکی در محل بار i ام را با V_i نشان می دهیم.

اگر به جای این بارها، بارهای q'_1 ، q'_2 ، ....، q'_N در همان مکان های قبل قرار بگیرد، پتانسیل الکتریکی در محل بار i ام، V'_i ، خواهد شد.



نشان دهید $\sum_{i=1}^{N} q'_i V_i = \sum_{i=1}^{N} q_i V'_i$

ب) فرض کنید سه کره ی رسانای مشابه در رأس های یک مثلث متساوی الاضلاع قرار دارند. وقتی بار روی این سه رسانا (q, q_0, q_0) است، پتانسیل الکتریکی این کره ها $(V, 0,0)$ است. وقتی پتانسیل همه ی آنها برابر V' است، بار روی هر یک از این سه کره را بر حسب q ، q_0 ، V ، و V' به دست آورید؟

ج) فرض کنید بار روی این کره ها $(q'', 0, 0)$ باشد، پتانسیل الکتریکی هر یک از این سه کره را برحسب q'' ، q ، q_0 ، و V به دست آورید.

مسئله ۲ ـ این مسئله لزوما جوابهای جمع و جور ندارد.

مفتولی نازک و بدون اصطکاک روی سطح کره ای به شعاع R مسیری با معادله $\theta = \alpha\cos n\phi + \theta_0$ تشکیل می دهد، که θ و ϕ مختصات قطبی هستند. مهره ای کوچک به جرم m مثل یک دانه تسبیح روی این مفتول حرکت می کند. شتاب گرانش برابر g، در امتداد محور کره و به سمت پایین است.

الف) سرعت و شتاب مهره را به صورت توابعی از $\phi(t)$ و مشتقات آن، در مختصات کروی به دست آورید. اگر فرمولی لازم است به دست آورید. (۴ نمره)

ب) نیروی N وارد شده از طرف مفتول به مهره را به صورت توابعی از $\phi(t)$ و مشتقات آن، در مختصات کروی به دست آورید. (۲ نمره)

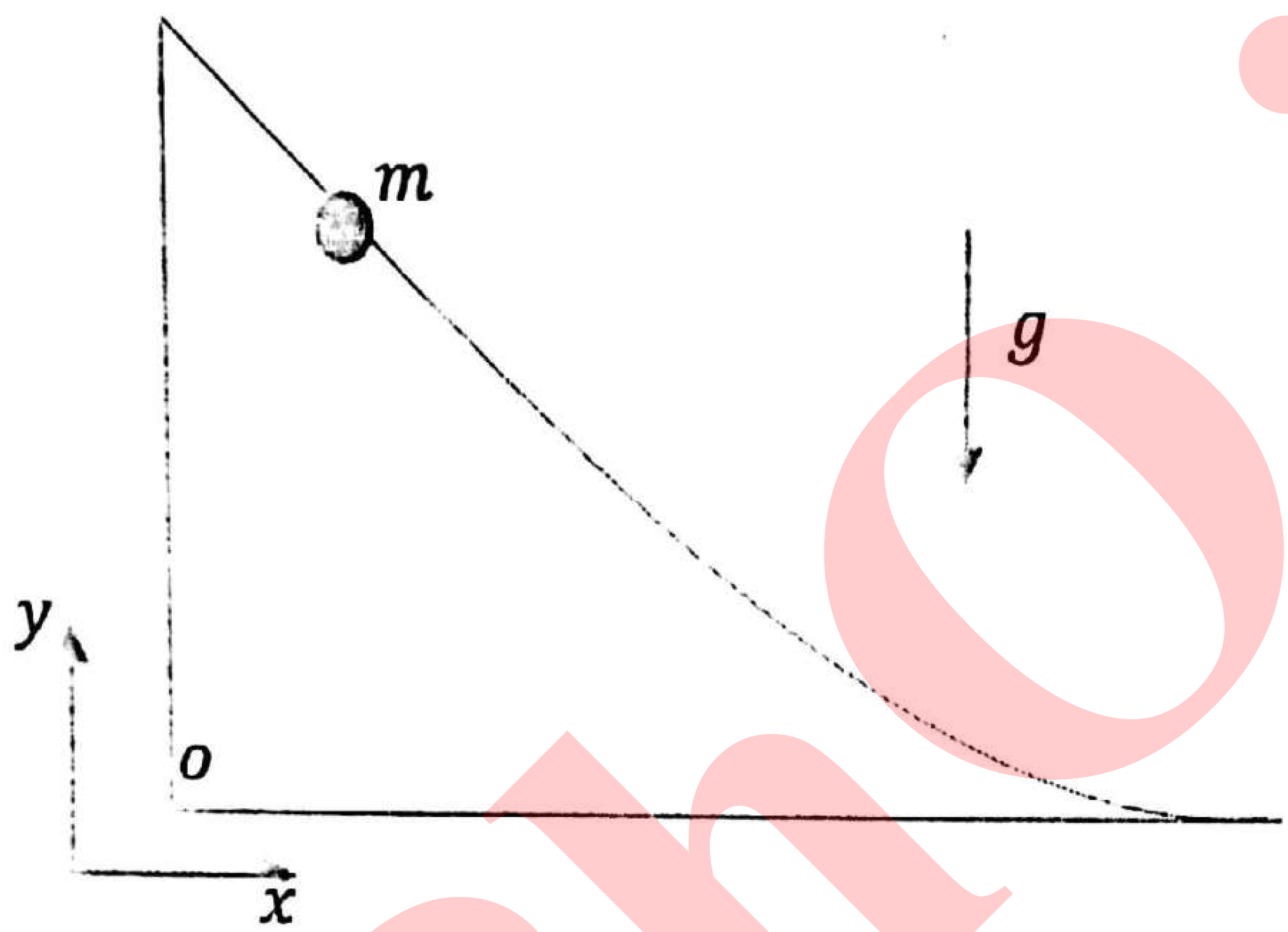
ج) انرژی مکانیکی مهره که شامل انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv^2$ و انرژی پتانسیل mgh (که h ارتفاع از مرکز کره است)، را بر حسب $\phi(t)$ و مشتقات آن، به دست آورید. رابطه $dE/dt = 0$ را به صورت معادله ای روی ϕ و مشتقات آن بیان کنید. (۲نمره)

د) با استفاده از رابطه ای که برای N به دست آوردید، شرط بدون اصطکاک بودن را به صورت معادله ای روی ϕ و مشتقات آن بیان کنید. (۲نمره)

توجه: جواب هر قسمت را تا جایی که ممکن است ساده کنید و در کادر مشخص نمایش دهید.

3- مطابق شکل زیر یک مسیر شیب دار که از یک سیم منحنی شکل و صلب تشکیل شده است را در نظر بگیرید. معادله این سیم در دستگاه مختصات منطبق بر کنج (O) را تابع مشتق پذیر $y = f(x)$ بگیرید.

همچنین فرض کنید که $f(0) = h$ و $f(h) = 0$ (h یک ثابت مثبت است). شتاب گرانش را نیز مقدار ثابت g و در خلاف جهت محور y بگیرید.



اکنون یک مهره تسبیح به جرم m را در نظر بگیرید. این مهره را در سیم مقید کرده و آن را از نقطه ی $y = h$ رها می کنیم. با فرض آنکه حرکت مهره در سیم بدون اصطکاک و شیب منحنی در تمامی نقاط منفی باشد، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف-	اندازه سرعت مهره را در مکانی به مختصات $(x, f(x))$ و بر حسب پارامتر های داده شده در مساله تعیین کنید.

ب-	اندازه نیروی وارد بر مهره از طرف سیم را در مکانی به مختصات $(x, f(x))$، بر حسب پارامتر های داده شده در مساله و با فرض معلوم بودن مشتقات تابع $f(x)$ تعیین کنید.

- راهنمایی : برای منحنی پیوسته و مشتق پذیر $y = f(x)$ در هر نقطه ی دلخواه، منحنی را می توان به تقریب قسمتی از یک دایره در نظر گرفت. شعاع این دایره از رابطه ی زیر بدست می آید.

$$R = \frac{\left(1 + f'^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$$

مدت زمانی که طول می کشد تا مهره به نقطه ی $(x, f(x))$ برسد، $T(x)$، را به صورت تابعی انتگرالی و برحسب پارامتر های داده شده در مساله و با فرض معلوم بودن مشتقات تابع $f(x)$ بنویسید.	پ-

اکنون فرض کنید که معادله ی سیم منحنی شکل به صورت زیر است.

$$y = f(x) = (h - x) + \Delta(x)$$

که در رابطه ی فوق $\Delta(x)$ یک تابع مشتق پذیر با شیب ملایم و با اندازه ی کوچک (نسبت به $h - x$ در هر نقطه) است.

جواب های بخش الف و ب را تا اولین مرتبه نسبت به تابع $\Delta(x)$ و مشتقات آن ساده کنید. در واقع در معادلات خود از توان دو و بالاتر $\Delta(x)$ و مشتقات آن صرف نظر کنید.	ت-

- راهنمایی: برای x خیلی کوچکتر از یک داریم

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx$$

جواب بخش پ را تا اولین مرتبه نسبت به تابع $\Delta(x)$ و مشتقات آن ساده کرده و معادله ای به صورت زیر را بدست آورید. $$T(x) = F_1(x) + \int_0^x F_2(x)dx$$ که در معادله ی فوق $F_1(x)$ و $F_2(x)$ توابعی هستند که باید تعیین کنید.	ث-

حال فرض کنید که ما معادله ی دقیق مربوط به $\Delta(x)$ را نداریم، اما می دانیم که در هر نقطه ی مشخص x $(0 \leq x \leq h)$ ، احتمال آنکه اندازه ی این تابع بین مقدار Δ و $\Delta + d\Delta$ باشد طبق معادله ی معلوم زیر تعیین می شود.

$$dP = G_x(\Delta)d\Delta$$

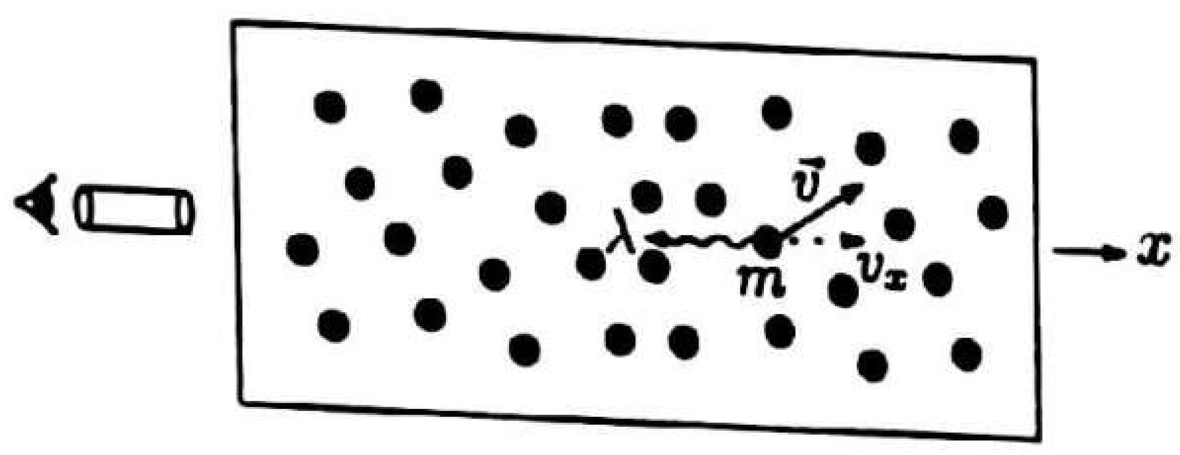
که در معادله ی فوق dP احتمال گفته شده در بالا و $G_x(\Delta)$ تابع توزیع مربوط به این احتمال در نقطه ی x است.

تابع توزیع مربوط به اندازه سرعت مهره را در هر نقطه دلخواه x از مسیر، برحسب $G_x(\Delta)$ و سایر پارامتر های داده شده در سوال تعیین کنید. فرض کنید که مقادیر مجاز مربوط به Δ بگونه ای هستند که همچنان شیب سیم در تمامی نقاط منفی بماند.	ج-

۴) طبق نظریهٔ جنبشی ماکسول برای یک گاز رقیق در دمای T، تابع توزیع احتمال تندی و تابع توزیع احتمال مؤلفه‌ی x سرعت ذرات گاز عبارتند از

$$P(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right),$$
$$P(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)$$

که m جرم ذرات گاز است. آزمایش‌های مختلفی به منظور تحقیق تجربی این نظریه انجام شده است که در قسمت a) و b) به دو تا از آن‌ها پرداخته می‌شود.



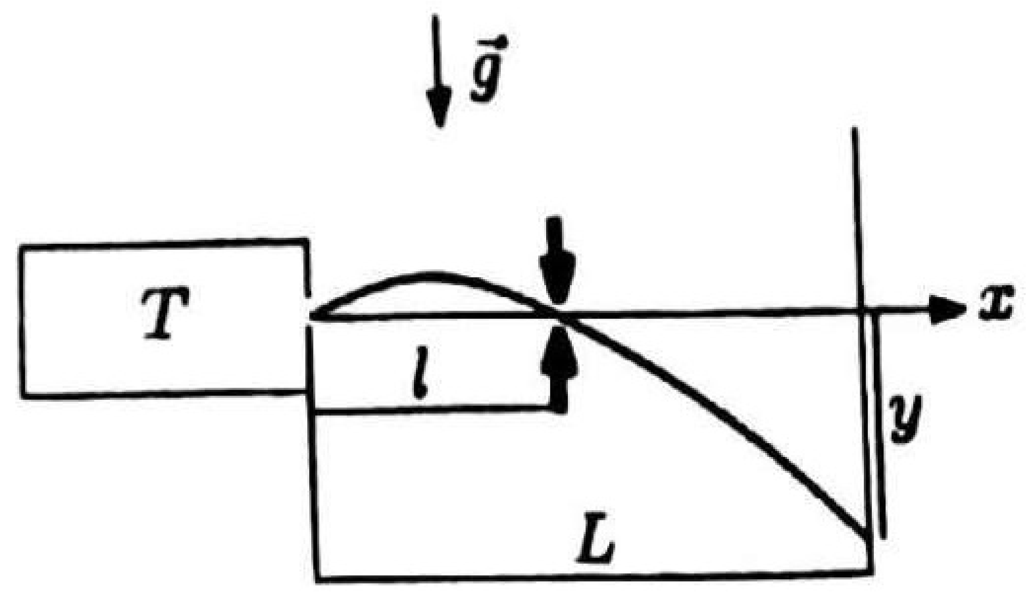
a) پهن‌شدگی دوپلری خطوط طیفی. می‌دانیم که اتم‌های برانگیخته می‌توانند فوتون (موج الکترومغناطیس) تابش کنند. فرض کنید ذرات گازی به جرم m در محفظه‌ای تا دمای T داغ شده‌اند. ذره‌ای در نظر بگیرید که مؤلفه سرعت آن در راستای x برابر v_x است. اگر طول موج تابش الکترومغناطیسی گسیل شده به وسیله‌ی ذره، نسبت به ناظر ساکن نسبت به آن λ_0 باشد طبق پدیدهٔ دوپلر، طول موج تابش اندازه‌گیری شده توسط ناظری که ذره در راستای x از او دور می‌شود $\lambda \approx \lambda_0(1 + v_x/c)$ است که c سرعت نور است. اگر ناظر طیف‌نمایی در اختیار داشته باشد و طول موج تابش وابسته به ذرات را ثبت و سپس تابع توزیع طول موج ذرات را رسم کند از مقایسه‌ی پهنای منحنی تجربی با پهنای محاسبه شده نظری می‌تواند به صحت نظریه جنبشی پی ببرد.

آ) تابع توزیع احتمال (شدت نسبی) تابش بر حسب طول موج λ را به دست آورید. **(۲ نمره)**

ب) پهنای تابع توزیع شدت نسبی که به صورت $\Delta\lambda = \sqrt{\overline{\lambda^2} - (\overline{\lambda})^2}$ تعریف می‌شود به دست آورید. **(۲ نمره)**

پ) اگر گاز متشکل از اتم‌های سدیم در دمای $300\,^\circ\mathrm{C}$ باشد که طول موج تابش گسیلی از آن در چارچوب سکون اتم $5896\ \text{Å}$ است، $\Delta\lambda$ را حساب کنید. جرم مولی سدیم $23\ \mathrm{g/mol}$ و ثابت گازها $8.3\ \mathrm{J/mol.K}$ است. **(۱ نمره)**

b) آزمایش اشترن. ذرات گاز از روزنه بسیار کوچکی که در دیواره ظرفی ایجاد شده به بیرون که تقریباً خلأ است نشت می‌کنند و در طول مسیرشان در اثر نیروی گرانش به سمت پایین سقوط می‌کنند و سرانجام به یک پرده می‌رسند. شمارنده‌ای ذرات رسیده به پرده را می‌شمارد. از مقایسه‌ی تابع توزیع ارتفاع سقوط با نتایج تجربی می‌توان به صحت نظریه جنبشی پی برد.



گازی که جرم هر یک از ذرات آن m است داخل ظرفی در دمای T در نظر بگیرید. این ذرات از روزنه‌ی کوچکی در دیواره ظرف نشت می‌کنند. قطر روزنه از مسافت آزاد میانگین ذرات گاز داخل ظرف کوچک‌تر است. بیرون ظرف تقریباً خلأ است. شکافی در فاصله‌ی l از روزنه و هم‌تراز با آن وجود دارد. ذراتی که موفق می‌شوند از شکاف عبور کنند به پرده‌ای که فاصله آن از روزنه L است برخورد می‌کنند. در تمام طول مسیر نیروی وزن ذرات، mg، به آن‌ها وارد می‌شود. حرکت را در یک صفحه قائم در نظر بگیرید.

آ) تابع توزیع ذرات برخورد کننده به پرده را بر حسب y به دست آورید. (۴ نمره)

ب) در چه فاصله‌ی y تابع توزیع ذرات برخورد کننده به پرده دارای بیشینه است؟ (۱ نمره)