بسم ا... الرحمن الرحیم

سیستم های کنترل دیجیتال

Digital Control Systems

جلسه دوم و سوم: ۲۶ بهمن ۱۳۹۲

محمدرضا رمضانی

1

تبدیل Z گسسته

فصل دوم کتاب کنترل دیجیتال اگاتا

مراجع

1. K. Ogata, Discrete-time control systems, Prentice Hall, 1995
2– اسلایدهای درس کنترل دیجیتال دانشگاه علم و صنعت دکتر بلندی و دکتر اسمعیل زاده

2

” تبدیل Z“

اهداف :

1- تعاریف تبدیل Z
2- قضایای اساسی مربوط به تبدیل Z
3- روشهای تعیین عکس تبدیل Z
4- تابع تبدیل پالسی و دنباله وزنی

مقدمه

یکی از ابزارهای ریاضی که معمولاً در تحلیل و ترکیب سیستم های کنترل زمان - گسسته تبدیل z می باشد.

توجه

نقش تبدیل z در سیستم های زمان – گسسته مشابه نقش تبدیل لاپلاس در سیستم های زمان – پیوسته است.

نقش تبدیل z

❖ در یک سیستم کنترل زمان – گسسته خطی، یک معادله تفاضلی خطی دینامیک های سیستم را مشخص می کند. برای آنکه پاسخ سیستمی را به ورودی معینی تعیین کنیم باید چنین معادله تفاضلی را حل کرد.

❖ با روش تبدیل z حل معادلات تفاضلی خطی ماهیتاً جبری می شود.

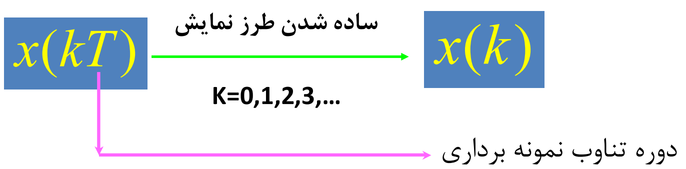
❖ تبدیل z حل معادلات تفاضلی خطی ثابت را به معادلات جبری بر حسب z تبدیل می کند.

5

سیگنال های زمان گسسته

1- اگر سیستمی شامل یک عمل نمونه برداری باشد.
2- اگر سیستمی شامل یک فرآیند تکراری انجام یافته با یک کامپیوتر دیجیتال باشد.

دنباله مقادیری که از عمل نمونه برداری حاصل می شود را به صورت زیر نمایش می دهند:



6

تابع تبدیل پالسی

با بکار بردن تبدیل z ، یک سیستم خطی زمان – گسسته را می توان با تابع تبدیلی نمایش داد که تابع تبدیل پالسی گفته می شود.

تبدیل z سیگنال خروجی

تبدیل z سیگنال خروجی را می توان به صورت حاصلضرب تابع تبدیل پالسی و تبدیل z سیگنال ورودی بیان نمود.

7

تبدیل z

تعریف :

تبدیل Z یک تابع زمانی که در آن نامنفی است، یا دنباله ای از مقادیر یا که در آن مقادیر صفر یا مثبت را اختیار کرده و T دوره تناوب نمونه برداری است، با معادله زیر تعریف می شود:

$$X(z) = Z[x(t)] = Z[x(kT)] = Z[x(k)]$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

به تبدیل z فوق، تبدیل z یکطرفه اطلاق می شود.

8

درتبدیل z یکطرفه :

$$\begin{cases} x(t) = 0 & t < 0 \\ x(kT) = x(k) = 0 & k < 0 \end{cases}$$

تبدیل z دوطرفه :

یا

$$X(z) = Z[x(t)] = Z[x(kT)] = Z[x(k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

9

درتبدیل z دوطرفه :

$$\begin{cases} x(t) \neq 0 & t < 0 \\ x(kT) = x(k) \neq 0 & k < 0 \end{cases}$$

❖ تبدیل z یکطرفه و دوطرفه سری های توانی از هستند.

❖ در این دوره تنها تبدیل z یکطرفه به تفصیل درنظر گرفته می شود.

10

عکس تبدیل z

$$X(z) \xrightarrow{Z^{-1}[X(z)]} x(kT)$$

روش های محاسبه عکس تبدیل z

1- روش تقسیم مستقیم
2- روش محاسباتی
3- روش گسترش کسرهای جزیی
4- روش انتگرال معکوس

انتگرال عکس تبدیل z:

$$Z^{-1}[X(z)] = x(kT) = x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz$$

توجه !

دایره ای است به مرکز مبدا صفحه z به قسمی که تمام قطبهای عبارت زیر درون آن باشند:

$$X(z)z^{k-1}$$

توجه !

در محاسبه قطبها و صفرهای *X(z)* مرجح است که *X(z)* را به صورت چند جمله ای هایی از z بیان کرد، نه به صورت چند جمله ای هایی از

تبدیل z توابع مقدماتی

فرضیات:

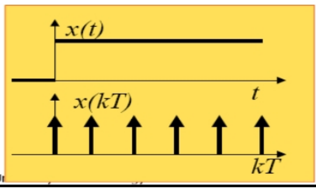
در نظریه تبدیل z یکطرفه، در نمونه گیری یک تابع ناپیوسته *x(t)* فرض می کنیم که تابع از سمت راست پیوسته است. یعنی اگر ناپیوستگی در *t=0* پیش بیاید، در این صورت به جای اینکه *x(0)* را به صورت مقدار متوسط در ناپیوستگی *[x(0-)+x(0+)]/2* نشان دهیم، مقدار *x(0)* را برابر *x(0+)* فرض می کنیم.

$$1(0)=1$$

1 – تابع پله واحد

فرض :

$$x(t)=\begin{cases} 1(t) & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$



حل :

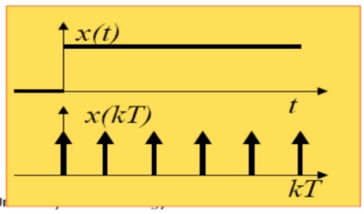
$$X(z)=Z[1(t)]=\sum_{k=0}^{\infty}1.z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}$$

$$=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\ldots$$

$$=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

نکته : دنباله پله واحد

$$1(k)=\begin{cases} 1 & k=0,1,2,3,\ldots \\ 0 & K<0 \end{cases}$$



2- تابع شیب واحد

$$x(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

حل :

$$x(kT) = kT$$

$$X(z) = Z[t] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT).z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} kTz^{-k} = T\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k}$$

$$= T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \ldots)$$

$$= T\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

15

3- تابع چند جمله ای a^k

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k = 0,1,2,3,\ldots \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

حل :

$$X(z) = Z[a^k] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k}$$

$$= 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \ldots$$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

16

4- تابع نمایی

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

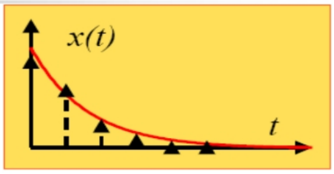
حل :

$$x(kT) = e^{-akT} \qquad k = 0,1,2,3,\ldots$$

$$X(z) = Z[e^{-at}] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k}$$

$$= 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \ldots$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$



5- تابع سینوسی

$$x(t) = \begin{cases} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

فرضیات :

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$ و $$Z[e^{-aT}] = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

حل :

$$Z[\sin \omega t] = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}) z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) z^{-1} + z^{-2}}\right)$$

$$= \frac{z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2\cos \omega T + 1}$$

18

6- تابع کسینوسی

$$x(t) = \begin{cases} \cos\omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

حل :

$$Z[\cos\omega t] = \frac{1}{2} Z(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{j\omega T}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-j\omega T}z^{-1}}\right)$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\left(\frac{2-(e^{-j\omega T}+e^{j\omega T})z^{-1}}{1-(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})z^{-1}+z^{-2}}\right)}$$

$$= \frac{z^{-2} - z\cos\omega T}{z^{-2} - 2z\cos\omega T + 1}$$

19

7- تابع سینوسی میرا

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}\sin\omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

حل :

$$Z[e^{-at}\sin\omega t] = \frac{1}{2j}[e^{-at}e^{j\omega t} - e^{-at}e^{-j\omega t}]$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{-(a-j\omega)T}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-(a+j\omega)T}z^{-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})e^{-aT}z^{-1}}{1-(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}\right)$$

$$= \frac{e^{-aT}z\sin\omega T}{z^2 - 2e^{-aT}z\cos\omega T + e^{-2aT}}$$

20

8- تابع کسینوسی میرا

$$x(t)=\begin{cases} e^{-at}\cos\omega t & t\ge 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

حل :

$$Z[e^{-at}\cos\omega t]=\frac{1}{2}[e^{-at}e^{j\omega t}+e^{-at}e^{-j\omega t}]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-(a-j\omega)T}z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-(a+j\omega)T}z^{-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2-(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})e^{-aT}z^{-1}}{1-(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}\right)$$

$$=\frac{z^2-e^{-aT}z\cos\omega T}{z^2-2e^{-aT}z\cos\omega T+e^{-2aT}}$$

21

مثال :

$$X(s)=\frac{1}{s(s+1)} \longrightarrow X(z)=?$$

روش اول : تبدیل *X(s)* به به $t\ge 0$ و سپس پیدا کردن تبدیل z مربوط

$$L^{-1}[X(s)]=1-e^{-t} \qquad t\ge 0$$

$$X(z)=Z[1-e^{-t}]=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

$$=\frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})}=\frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

روش دوم : گسترش X(s) به کسرهای ساده و استفاده از جدول تبدیل Z

22

خواص و قضایای مهم تبدیل z

1- ضرب در یک مقدار ثابت

$$Z[ax(t)] = aZ[x(t)] = aX(z)$$

اثبات :

$$Z[ax(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} ax(kT)z^{-k} = a\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = aX(z)$$

2- خطی بودن تبدیل z

$$x(k) = \alpha f(k) + \beta g(k)$$

$$\Downarrow$$

$$X(z) = \alpha F(z) + \beta G(z)$$

23

اثبات :

$$Z[x(k)] = Z[\alpha f(k) + \beta g(k)]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha f(k) + \beta g(k)]z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha f(k)z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta g(k)z^{-k}$$

$$= \alpha Z[f(k)] + \beta Z[g(k)]$$

$$= \alpha F(z) + \beta G(z)$$

24

3- ضرب در a^k

$$Z[a^k x(k)] = X(a^{-1}z)$$

اثبات :

$$Z[a^k x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)(a^{-1}z)^{-k} = X(a^{-1}z)$$

4- قضیه انتقال حقیقی

a) $$Z[x(t-nT)] = z^{-n} X(z)$$

b) $$Z[x(t+nT)] = z^{n}[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k}]$$

25

مفروضات :

1) $x(t) = 0 \qquad ,t < 0$

2) n صفر یا یک عدد صحیح مثبت

اثبات (a) :

$$Z[x(t-nT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT-nT) z^{-k} = z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT-nT) z^{-(k-n)}$$

با تعریف m= k - n داریم :

$$Z[x(t-nT)] = z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} x(mT) z^{-m}$$

با توجه به فرض (1) داریم: $x(mT) = 0, m < 0$

$$Z[x(t-nT) = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) z^{-m} = z^{-n} X(z)$$

26

اثبات (b) :

$$Z[x(t+nT)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT+nT)z^{-k}=z^{n}\sum_{k=0}^{\infty}x(kT+nT)z^{-(k+n)}$$

$$=z^{n}[\sum_{k=0}^{\infty}x(kT+nT)z^{-(k+n)}+\sum_{k=0}^{n-1}x(kT)z^{-k}-\sum_{k=0}^{n-1}x(kT)z^{-k}]$$

$$=z^{n}[\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}-\sum_{k=0}^{n-1}x(kT)z^{-k}]$$

$$=z^{n}[X(z)-\sum_{k=0}^{n-1}x(kT)z^{-k}]$$

27

مثال : تبدیل z عبارات زیر را بدست آورید $x(k+1)$

حل:

$$Z[x(k+1)]=\sum_{k=0}^{\infty}x(k+1)z^{-k}=\sum_{k=1}^{\infty}x(k)z^{-k+1}$$

$$=z[\sum_{k=0}^{\infty}x(k)z^{-k}-x(0)]$$

$$=zX(z)-zx(0)$$

تذکر : حالت خاص

$$x(0)=0 \quad \Longrightarrow \quad Z[x(k+1)]=z.Z[x(k)]$$

28

$$x(k+2)$$

حل:

$$Z[x(k+2)] = z.Z[x(k+1)] - zx(1)$$

$$z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)$$

$$x(k+n)$$

حل:

$$Z[x(k+n)] = z^n X(z) - z^n x(0) - z^{n-1} x(1) - \ldots - zx(n-1)$$

$$x(k-n)$$

حل:

$$Z[x(k-n)] = z^{-n} X(z)$$

29

مثال : تبدیل z عبارت زیر را بدست آورید

$$f(a) = \begin{cases} a^{k-1} & k = 1,2,3,\ldots \\ 0 & k \le 0 \end{cases}$$

حل : می دانیم

$$Z[x(k-1)] = z^{-1} X(z)$$

$$Z[a^k] = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$Z[f(a)] = Z[a^{k-1}] = z^{-1}\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

30

تفاضل های معکوس و مستقیم

تفاضل معکوس اول:

$$\nabla x(k) = x(k) - x(k-1)$$

تبدیل z تفاضل معکوس اول

$$Z[\nabla x(k)] = Z[x(k)] - Z[x(k-1)]$$

$$= X(z) - z^{-1}X(z)$$

$$= (1 - z^{-1})X(z)$$

31

تفاضل معکوس دوم

$$\nabla^2 x(k) = \nabla[\nabla x(k)] = \nabla[x(k) - x(k-1)]$$

$$= \nabla x(k) - \nabla x(k-1)$$

$$\nabla^2 x(k) = [x(k) - x(k-1)] - [x(k-1) - x(k-2)]$$

$$= x(k) - 2x(k-1) + x(k-2)$$

تبدیل z تفاضل معکوس دوم

$$Z[\nabla^2 x(k)] = Z[x(k)] - 2Z[x(k-1)] + Z[x(k-2)]$$

$$= X(z) - 2z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z)$$

$$= (1 - z^{-1})^2 X(z)$$

32

تفاضل معکوس سوم : به طریق مشابه داریم

$$\nabla^3 x(k) = \nabla^2 x(k) - \nabla^2 x(k-1)$$

تبدیل z تفاضل معکوس سوم

$$Z[\nabla^3 x(k)] = (1 - z^{-1})^3 X(z)$$

توجه !

عمل گرفتن تفاضل معکوس متناظر با ضرب $X(z)$ در $(1 - z^{-1})$ است.

تفاضل معکوس m ام :

$$\nabla^m x(k) = \nabla^{m-1} x(k) - \nabla^{m-1} x(k-1)$$

تبدیل z تفاضل معکوس m ام:

$$Z[\nabla^m x(k)] = (1 - z^{-1})^m X(z)$$

33

5–قضیه انتقال مختلط :

$[e^{-at} x(t)] \xrightarrow{\text{تبدیل z}} X(ze^{at})$

اثبات :

$$Z[e^{-at} x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-akT} z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(ze^{aT})^{-k} = X(ze^{aT})$$

مثال 1: تبدیل Z تابع سینوسی میرا با استفاده از قضیه انتقال مختلط ؟

$$Z[e^{-at} \sin \omega t] = ?$$

34

حل : می دانیم

$$Z[\sin \omega t] = \frac{z^{-1} \sin \omega t}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}}$$

$$z \to ze^{aT}$$

$$Z[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{e^{-aT} z^{-1} \sin \omega t}{1 - 2e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT} z^{-2}}$$

35

مثال 2: تبدیل Z تابع زیر را بدست آورید:

$$Z[te^{-at}] = ?$$

حل : می دانیم :

$$Z[t] = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = X(z)$$

$$z \to ze^{aT}$$

$$Z[te^{-at}] = X(ze^{aT}) = \frac{Te^{-aT} z^{-1}}{(1 - e^{-aT} z^{-1})^2}$$

36

۶- قضیه مقدار اولیه

- اگر $x(t)$ دارای تبدیل z باشد و
- اگر $\lim_{z\to\infty} X(z)$ وجود داشته باشد
- آنگاه مقدار اولیه $x(0)$ با رابطه زیر بدست می آید

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

37

مفروضات

$$\left\{\begin{array}{l} Z[x(t)] = X(z) \\ \lim_{z\to\infty} X(z) \text{ موجود است} \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

38

اثبات :

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)z^{-k}=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+....$$

$$\underset{z\to\infty}{Lim}X(z)=x(0)$$

مثال : مقدار $x(0)=?$

$$x(t)=1-e^{-t}$$

$$X(z)=\frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})}$$

حل :

$$x(0)=\underset{z\to\infty}{Lim}\frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})}=0$$

39

مثال : مقدار $x(0)=?$

$$X(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})(1-az^{-1})}$$

حل :

روش اول :

$$x(0)=\underset{z\to\infty}{Lim}\frac{1}{(1-z^{-1})(1-az^{-1})}=1$$

روش دوم :

$$X(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})(1-az^{-1})}$$

$$=\frac{\frac{1}{1-a}}{(1-z^{-1})}-\frac{\frac{a}{1-a}}{(1-az^{-1})}=\frac{1}{1-a}[\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{a}{1-az^{-1}}]$$

$$x(0)=\underset{z\to\infty}{Lim}X(z)=\frac{1}{1-a}[1-a]=1$$

40

7–قضیه مقدار نهایی :

مفروضات :

1) $x(k)=0$ برای $k<0$

2) تمام قطبهای $X(z)$ درون دایره واحد قرار گیرند، به استثنای امکان یک قطب ساده در $z=1$.

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})X(z)]$$

41

اثبات:

$$Z[x(k)] = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

$$Z[x(k-1)] = z^{-1}X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k} = X(z) - z^{-1}X(z)$$

$$\lim_{z\to 1}[\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k}] = \lim_{z\to 1}[X(z) - z^{-1}X(z)]$$

با در نظر گرفتن فرض 1 :

$$\sum_{k=0}^{\infty}[x(k) - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)] = [x(0)-x(-1)] + [x(1)-x(0)] +$$
$$+[x(2)-x(1)] + \ldots = x(\infty) = \lim_{k\to\infty}[x(k)]$$

$$\lim_{k\to\infty}[x(k)] = \lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})X(z)]$$

42

مثال: مقدار نهایی تابع زیر را بدست آورید

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

حل: با استفاده از قضیه مقدار نهایی

$$x(\infty)=\lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})X(z)]$$

$$=\lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})(\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}})]$$

$$=\lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})(\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}})]$$

$$=\lim_{z\to 1}(1-\frac{1-z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}})=1$$

43

حل: بدون استفاده از قضیه مقدار نهایی

$$x(t)=1-e^{-at}$$

$$x(\infty)=\lim_{t\to\infty}(1-e^{-at})=1$$

مثال: مقدار نهایی تابع زیر را بدست آورید

$$X(z)=\frac{0.387z^{2}}{(z-1)(z^{2}-2.37z+0.25)}$$

حل: با استفاده از قضیه مقدار نهایی

$$x(\infty)=\lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})X(z)]$$

$$=\lim_{z\to 1}[\frac{0.378z}{z^{2}-2.37z+0.25}]=\frac{0.378}{-1.12}=-0.345$$

44

8–قضیه: مشتق گیری مختلط

$$Z[kx(k)] = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

اثبات:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

$$\frac{d}{dz}X(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-k)x(k)z^{-k-1}$$

طرفین را در $-z$ ضرب می نماییم:

$$-z\frac{d}{dz}X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kx(k)z^{-k} = Z[kx(k)]$$

$$Z[kx(k)] = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

45

به طریق مشابه می توان نشان داد:

$$Z[k^2x(k)] = (-z\frac{d}{dz})^2 X(z)$$

(See p. 62)

با تکرار فرآیند فوق می توان نشان داد:

$$Z[k^m x(k)] = (-z\frac{d}{dz})^m X(z)$$

مثال: با استفاده از قضیه مشتق گیری مختلط، تبدیل z تابع شیب واحد را بدست آورید :

$$x(k) = k \longrightarrow Z[x(k)] = ?$$

حل: می دانیم:

$$Z[1(k)] = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Z[x(k)] = Z[k] = Z[k.1(k)] = -z\frac{d}{dz}(\frac{1}{1-z^{-1}}) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

46