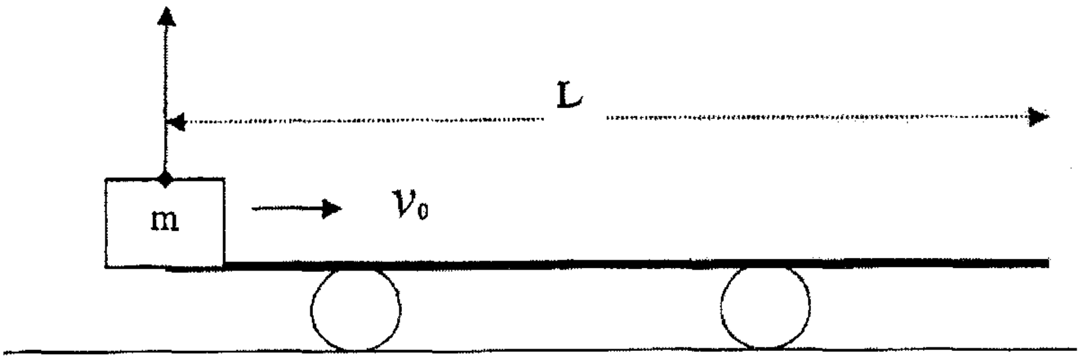
سؤال‌های بیست و یکمین
دوره آزمون‌های المپیاد فیزیک

تابستان ۱۳۸۷

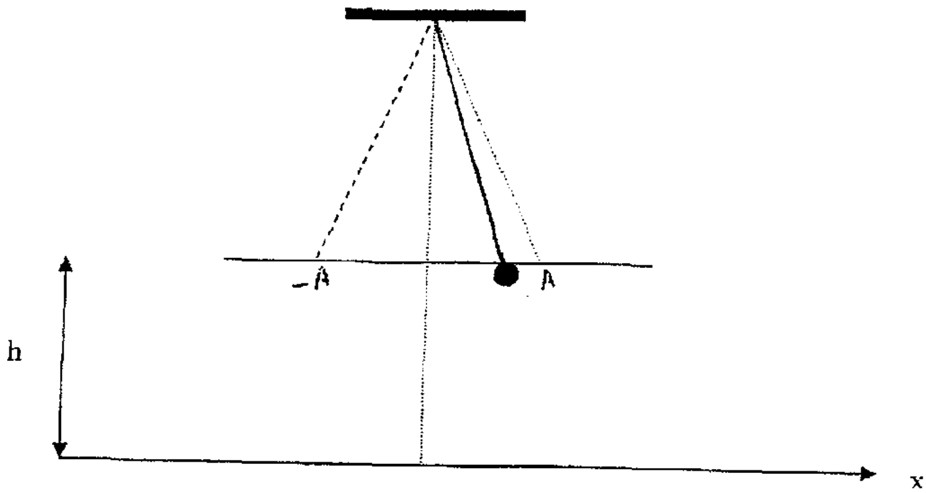
سؤال‌های امتحان اول المپیاد فیزیک ـ بیست و یکمین دوره ـ تابستان ۸۷

وقت: ۳ ساعت و ۳۰ دقیقه

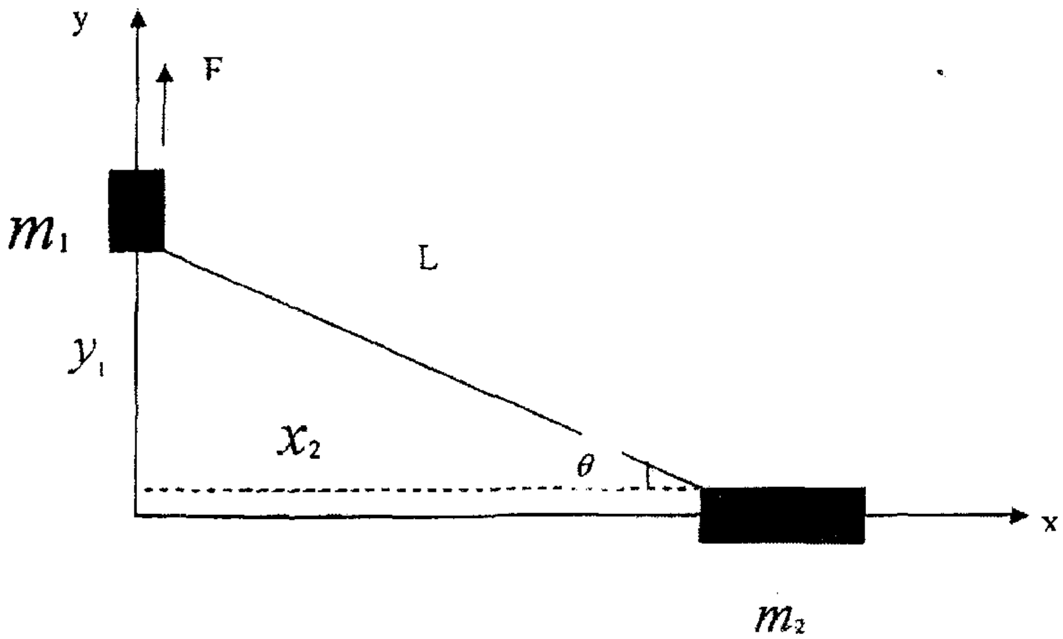
۱- جسم m مطابق شکل در انتهای ارابه‌ای به جرم M قرار دارد و درشروع، فاصله آن تا انتهای دیگر ارابه L است. در لحظه $t=0$ جسم m را با سرعت اولیه v_0 روی ارابه به حرکت در می‌آوریم. ضریب اصطکاک دو جسم μ است و ارابه روی چرخ‌های سبک و بدون اصطکاک در سطح افق حرکت می‌کند.
اگر v_0 از سرعت معینی بیشتر باشد جرم m از انتهای ارابه می‌افتد. این سرعت را تعیین کنید. در این حالت زمان افتادن جرم m از انتهای ارابه را نیز به دست آورید.
چنانچه جسم m از انتهای ارابه نیفتد چه طولی را روی آن طی می‌کند؟ این طول را در چه زمانی طی می‌کند؟ پس از آن حرکت دستگاه چگونه است و سرعت آن چیست؟



۲- آونگ طویلی مطابق شکل نوسان‌های کم دامنه انجام می‌دهد، به طوری که مسیر وزنه آونگ را می‌توان تقریباً خط راستی به موازات محور x گرفت که با معادله $\chi_1(t)=a\sin(\omega t)$ توصیف می‌شود. فرض کنید وزنه آونگ، مخزنی محتوی شن است و از سوراخ کوچکی در زیر آن دانه‌های ریز شن به سطح زمین که در فاصله عمودی h از مسیر آونگ است فرو می‌ریزند. از تأثیر ریزش شن‌ها بر حرکت آونگ چشم می‌پوشیم.
اگر در لحظه t ذرات شن به نقطه $\chi_2(t)$ روی محور x اصابت کنند، تابع $\chi_2(t)$ را بیابید.

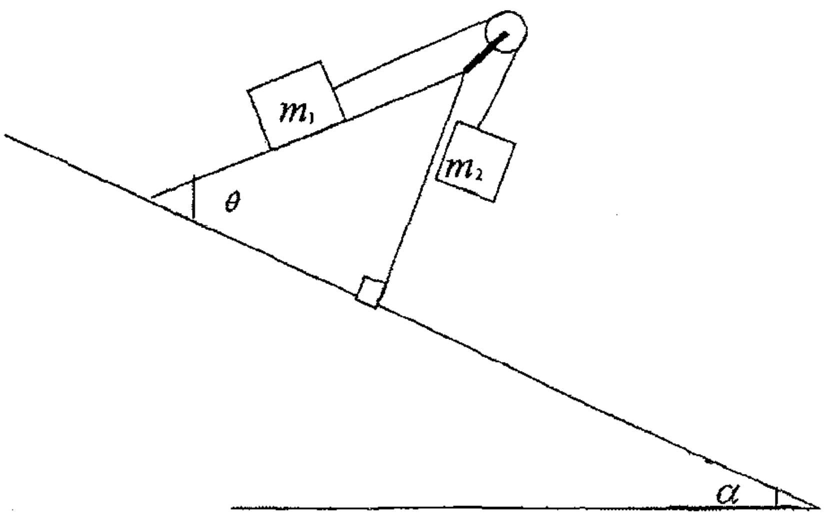


۳- در دستگاه شکل مقابل وزنه‌های m_1 و m_2 روی میله‌های بدون اصطکاک حرکت می‌کنند و صفحه x-y افقی است. نیروی ثابت F در راستای y به وزنه m_1 وارد می‌شود. وزنه‌ها با ریسمانی به طول L به یکدیگر وصل‌اند. در لحظه $t = 0$ زاویه θ، ۳۰ درجه و سرعت m_2، $-v_0$ است. در این لحظه شتاب‌های $\ddot{x}_2$ و $\ddot{y}_1$ و نیروی کشش ریسمان چه قدر است؟



۴- جرم‌های m_1 و m_2 مطابق شکل روی گوه‌ای به زاویه θ قرار دارند و با نخ سبکی که از روی قرقره‌ای سبک و بدون اصطکاک عبور کرده به یکدیگر متصل‌اند. گوه روی سطح شیبداری که زاویه α با افق می‌سازد قرار دارد. کلیه سطوح بدون اصطکاک فرض می‌شوند.

برای دو نوع حرکت ممکن دستگاه روابطی را بنویسید که از حل آن‌ها شتاب گوه، شتاب جرم‌های m_1 و m_2 نسبت به گوه و نیروهای قیدی وارد بر m_1 و m_2 به دست آیند. حل معادلات لازم نیست و حرکت‌هایی که تفاوت آن‌ها فقط در جهت شتاب‌ها است را یکی بگیرید.



سؤال‌های امتحان دوم المپیاد فیزیک ـ بیست و یکمین دوره ـ تابستان ۸۷

وقت: ٤ ساعت

۱- توزیع بار الکتریکی در بعضی هسته‌ها را می‌توان به طور تقریبی با چگالی بار حجمی

$$\rho(r)=\begin{cases}\rho_0(1-\dfrac{r^2}{a^2}) & r\le a\\ 0 & r\ge a\end{cases}$$

در نظر گرفت، که ρ_0 و a و r فاصله شعاعی تا مرکز هسته است.

الف) بار کل داخل هسته، Q، را به دست آورید.

ب) میدان الکتریکی داخل هسته را در فاصله r از مرکز هسته، $E_{in}(r)$، به دست آورید.

ج) میدان الکتریکی خارج هسته را در فاصله r از مرکز هسته، $E_{out}(r)$ به دست آورید.

د) پتانسیل الکتریکی داخل هسته را در فاصله r از مرکز هسته، $V_{in}(r)$، به دست آورید. (مبدأ پتانسیل را در بینهایت بگیرید.)

ه) پتانسیل الکتریکی خارج هسته را در فاصله r از مرکز هسته، $V_{out}(r)$، به دست آورید.

و) در چه فاصله‌ای از مرکز هسته میدان الکتریکی بیشنیه است؟

ز) به ازای $\rho_0=5/0\times10^{25}C/m^3$ و $a=3/4\times10^{-15}m$ مقادیر عددی Q، میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی بر روی سطح هسته و مقدار پتانسیل الکتریکی را در مرکز هسته محاسبه کنید.

ح) نمودار $E/(\rho_0/\varepsilon_0)$ و $V/(\rho_0/\varepsilon_0)$ را بر حسب تابعی از r در فاصله‌ی $0\le r\le 5a$ را رسم کنید.

۲-بار الکتریکی q به طور یکنواخت بر روی میله نارسانای نازکی به طول l توزیع شده است.

الف) پتانسیل الکتریکی را در نقطه دلخواهی مانند p که مختصات استوانه‌ای آن (ρ,z) است بدست آورید. (مبدأ پتانسیل را در بینهایت بگیرید.)

ب) بردار میدان الکتریکی را در نقطه p، در مختصات استوانه‌ای به دست آورید.

ج) میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به مختصات $(0,z)$ بنویسید.

د) معادله سطح هم پتانسیل، با پتانسیل V_0 را بنویسید.

ه) عبارتی برای مجموع فواصل یک نقطه مانند (ρ_0,z_0) روی سطح هم پتانسیل V_0 دو سر میله بنویسید و آن را تا حد امکان ساده کنید.

اکنون دو میله نارسانای نازک به طول‌های l_1 و l_2 که به فاصله d از هم قرار گرفته‌اند و بار الکتریکی q_1 و q_2 به طور یکنواخت روی آن‌ها توزیع شده است، در نظر بگیرید.

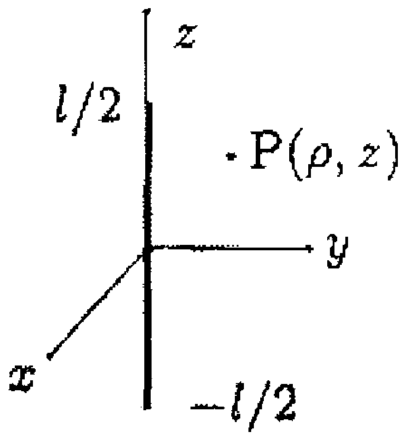
و) نیروی الکتریکی که هر میله به میله دیگر وارد می‌کند چقدر است؟

ز) در حد $l_2 \gg l_1 + d$ و $d \ll l_1$ این نیرو چقدر است؟

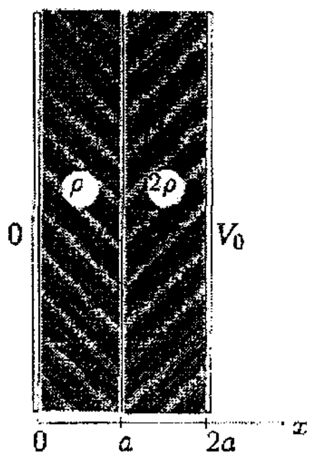
ح) در حد $d \gg l_1$ و $d \gg l_2$ این نیرو چقدر است؟

در صورت نیاز:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)+C$$



۳- دو صفحه تخت نامتناهی رسانا به فاصله 2a از یکدیگر و موازی هم قرار دارند و در پتانسیل 0 و V_0 ثابت نگه داشته شده‌اند. ناحیه $0 < x < a$ با بار حجمی با چگالی یکنواخت ρ و ناحیه $a < x < 2a$ با بار حجمی با چگالی یکنواخت 2ρ پر شده است.



الف) میدان الکتریکی، $E(x)$، را در نواحی مختلف در بازه $-\infty < x < +\infty$ به دست آورید.

ب) پتانسیل الکتریکی، $V(x)$، را در نواحی مختلف در بازه $-\infty < x < +\infty$ به دست آورید.

ج) چگالی بار سطحی روی دو طرف هر یک از صفحه‌های رسانا را به دست آورید.

د) نمودار $E(x)$ را رسم کنید.

ه) نمودار $V(x)$ را رسم کنید.

۴- شناگری می‌خواهد با شناکردن از نقطه A روی دریاچه‌ای به نقطه ثابت O که یک جزیره است برود. مبدأ مختصات را نقطه O و مختصات A را (x_0, y_0) بگیرید. سرعت شناکردن او در آب ساکن u و جهت شنا کردن او همواره به سمت نقطه O است. اگر آب دریاچه ساکن بود او در خطی راست به سمت O می‌رفت. اما آب دریاچه ساکن نیست. موج‌هایی وجود دارند که باعث می‌شوند آب سطح دریاچه با سرعت u در جهت ثابت I حرکت کند. r و θ مختصات قطبی شناگر نسبت به چارچوب xy هستند.

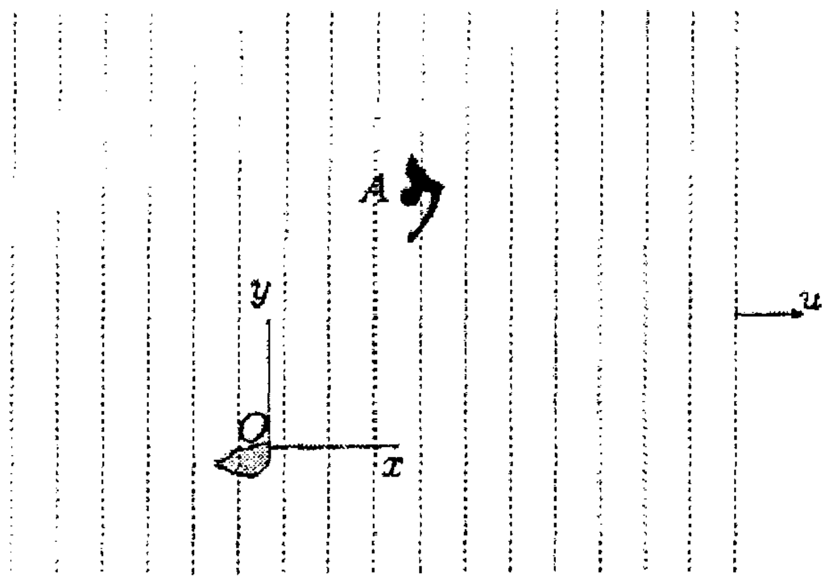
الف) v_x و v_y مؤلفه های x و y سرعت شناگر را نسبت به چارچوب xy بر حسب u و θ به دست آورید.

ب) v_r و v_θ مؤلفه‌های r و θ سرعت شناگر را نسبت به چارچوب xy بر حسب u و θ به دست آورید.

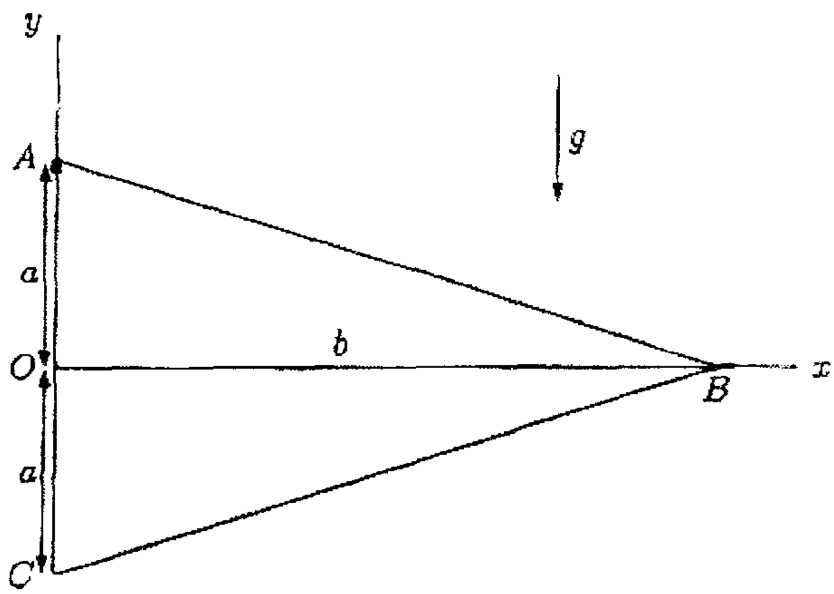
ج) $r(\theta)$ مسیر شناگر را به دست آورید.

د) معادله‌ای به صورت $dt = f(\theta)d\theta$ به دست آورید. از این جا، T، زمانی که شناگر به محور x می‌رسد را به دست آورید.

راهنمایی: احتمالاً با انتگرالی مواجه می‌شودی که نمی توانید آن رامحاسبه کنید. زمانی که شناگر از نقطه‌ای در نزدیکی محور x به آن می‌رسد را محاسبه کنید.



۵- سه دانه تسبیح بسیار کوچک با جرم‌های یکسان m می‌توانند از نقطه A بدون اصطکاک روی سه سیم بلغزند. یک سیم AB، دیگری AOB، و سومی ACB است. هر سه سیم درانتها یعنی نقطه B افقی شده‌اند. هر جا که سیم‌ها خم شده‌اند انحنای کوچکی وجود دارد به طوری که دانه‌ی تسبیح این نقاط را به راحتی دور می‌زند و اندازه‌ی سرعت درست قبل و پس از این نقاط یکی است.



الف) منحنی‌های v_x بر حسب t را برای سه دانه تسبیح به طور کیفی در پاسخ نامه بکشید.

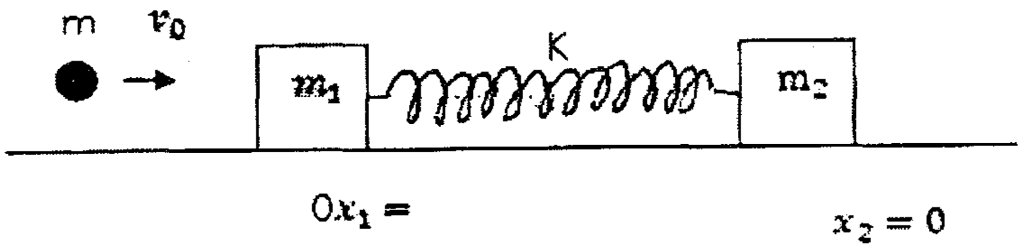
ب) زمان رسیدن هر کدام از تسبیح‌ها به نقطه B از سه مسیر مختلف را $T_1 : T_{AB}$، $T_2 := T_{AOB}$، $T_3 := T_{ACB}$، بنامید. این زمان‌ها را حساب کنید.

ج) در حد $a / b \to 0$، یعنی در حد که شکل سه سیم به هم نزدیک می‌شود، نسبت T_2 / T_1 و T_3 / T_1 را حساب کنید. نتیجه را تا حد امکان ساده کنید.

سؤال‌های امتحان سوم المپیاد فیزیک ـ بیست و یکمین دوره ـ تابستان ۸۷

وقت: ٤ ساعت و ۳۰ دقیقه

۱- دو قطعه چوب به جرم‌های m_1 و m_2 مطابق شکل در ابتدا روی میز افقی بدون اصطکاکی ساکن هستند و با فنر بدون جرمی به ضریب k به یکدیگر متصل‌اند. گلوله ای به جرم m با سرعت اولیه v_0 به سمت m_1 شلیک می‌شود و در آن فرو می‌رود. زمان متوقف شدن گلوله نسبت به m_1 ناچیز است. مبدأ زمان (لحظه $t = 0$) را لحظه برخورد گلوله با m_1 و مبدأ مکان را برای جرم‌های m_1 و m_2 به ترتیب محل قرار گرفتن (مثلاً لبه راست) آن‌ها در این لحظه بگیرید به طوری که $x_2(0) = x_1(0) = 0$. پاسخ هر قسمت را بر حسب پارمترهای داده شده در صورت مساله و یا پارامترهای معرفی شده در قسمت‌های قبل از آن بیان کنید.



۱- سرعت جرم‌ها بلافاصله بعد از برخورد گلوله چیست؟ (v_{20}, v_{10})

۲- اگر فنر حداکثر به اندازه طول d قابل فشرده شدن باشد، حداکثر v_0 چه قدر باشد تا فنر به این حالت، یعنی فشردگی کامل نرسد؟ $(v_{0\max})$ در بخش‌های ۳، ۴ و ۵ این مساله فرض کنید $v_0 < v_{0\max}$

۳- چه مدت طول می‌کشد تا جرم‌ها برای نخستین بار به کمترین فاصله از هم برسند؟ (τ)

۴- $X_1(t)$ و $X_2(t)$ را به دست آورید.

۵- شرط آن که m_1 به توقف لحظه‌ای برسد چیست؟ در صورت برقرار بودن این شرط، توقف m_1 نخستین بار در چه لحظه‌ای اتفاق می‌افتد؟ (t_1) و سرعت m_2 در این لحظه چیست؟ $(V_2(t_1))$

۶- اگر v_0 از مقدار فوق یعنی $v_{0\max}$ بیشتر باشد، لحظه t_2 که در آن فنر کاملاً فشرده می‌شود را پیدا کنید.

۷- اگر پس از رسیدن به فشردگی کامل، دو قطعه چوب مدت بسیار کوتاهی با هم حرکت کنند، $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را پس از آن (با همان مبدأهای زمان و مکان ذکر شده) به دست آورید.

۲- ذره‌ای به جرم m دریک بُعد تحت تأثیر نیرویی با انرژی پتانسیل $V(x)$ که در x_0 بیشینه است، قرار دارد. وقتی ذره در x_1 $(x_1 < x_0)$ است، انرژی اش با بیشینه انرژی پتانسیل $V(x_0)$، برابر است و به سمت x_0 می‌رود.

الف) انرژی پتانسیل را تحلیلی بگیرید، در این صورت $V(x)$ در نزدیکی x_0 بسط تیلور دارد و خودش به آن هم گرا است، یعنی

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{V''(x_0)}{2}(x - x_0) + \cdots$$

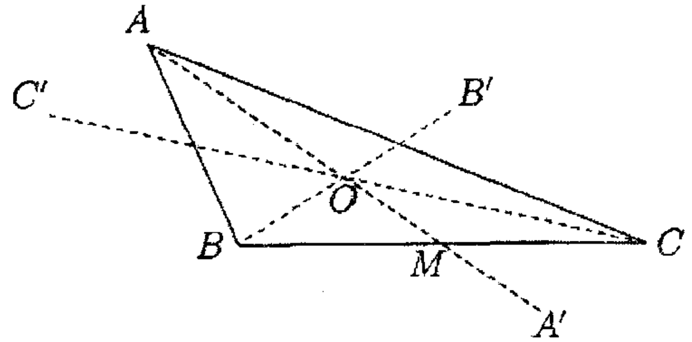
T_1 زمانی که ذره از نقطه x_1 به x_0 می‌رسد را به صورت یک انتگرال بنویسید.

$$T_1 = \int_{x_1}^{x_0} dx\ f(x)$$

$f(x)$ چیست؟ اگر فرض کنیم که x_1 خیلی به x_0 نزدیک است $(x_1 := x_0 - \varepsilon)$، مقدار انتگرالی را که داشتید حساب کنید.

ب) فرض کنید پتانسیل در نقطه‌ای که بیشینه است تحلیلی نیست، مثلاً $V(x) = -\beta|x|^{3/2}$ در $x = 0$. T_2 زمانی که ذره از نقطه x_1 به $x = 0$ می‌رسد چه قدر است؟ β ثابتی مثبت است.

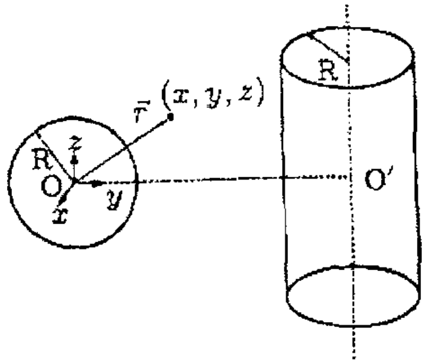
۳- سطحی به شکل یک مثلث با ضلع‌های $BC := a$، $AC := b$ و $AB := c$ با چگالی بار سطحی یک نواخت σ باردار شده است. مطابق شکل O مرکز مثلث (محل تقاطع میانه‌ها)، و A' در امتداد میانه AM است به طوری که $AA' = 2AO$. نقاط B'، و C' نیز به همین ترتیب در امتداد دو میانه دیگر هستند. صفحه مثلث را صفحه x, y و O مرکز مثلث را مبدأ مختصات بگیرید.



الف) پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای با مختصات x, y علاوه بر x, y به ابعاد مثلث a، b، c و چگالی σ بستگی دارد، $\Phi(x, y) = F(x, y, a, b, c, \sigma)$. با استفاده از تحلیل ابعادی کلی ترین شکل بستگی تابع F و در نتیجه $\Phi(x, y)$ به پارامترهای مربوطه چیست؟ با استفاده از تحلیل ابعادی کلی‌ترین شکل بستگی پتانسیل الکتریکی در نقطه O، Φo، چیست؟

ب) با استفاده از تحلیل ابعادی رابطه‌ای بین Φo پتانسیل الکتریکی در نقطه O مرکز مثلث، و $\Phi_{A'}$، $\Phi_{B'}$، و $\Phi_{c'}$ پتانسیل الکتریکی درنقاط A'، B'، و C' به دست آورید.

۴- یک کره عایق به شعاع R با چگالی بار حجمی یکنواخت ρ و یک استوانه عایق به طول نامتناهی، شعاع R و چگالی بار حجمی یکنواخت ρ در نظر بگیرید.



محور استوانه‌ای موازی محور z و $O\vec{O}'=4R\hat{j}$ است. اگر $\vec{r}$ بردار مکان یک نقطه دلخواه مانند (x,y,z) در فضا نسبت به مبدأ O باشد، بردار میدان الکتریکی را در نقاط زیر بر حسب x,y,z و سایر پارامترها به دست آورید.

آ) داخل کره

ب) خارج ازکره و استوانه

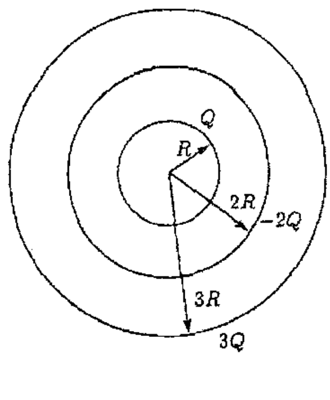
ج) داخل استوانه

اختلاف پتانسیل بین نقاط خواسته شده در زیر را به دست آورید.

د) $V_o - V_{o'}$

ه) $V_A - V_B$ که A نقطه‌ای روی سطح کره به مختصات $(R,0,0)$ و B نقطه‌ای روی سطح جانبی استوانه به مختصات $(R,4R,0)$ است.

۵- سه پوسته کروی هم مرکز رسانا به شعاع‌های R، 2R و 3R که به ترتیب دارای بار الکتریکی Q، 2Q- و 3Q هستند. در نظر بگیرید.



الف) میدان الکتریکی را در نواحی: $r < R$، $R \le r < 2R$، $2R \le r < 3R$ و $r \ge 3R$ بنویسید.

ب) $V(R)$ و $V(3R)$ چقدر است؟ مبدأ پتانسیل را در بینهایت بگیرید.

ج) انرژی الکتریکی ذخیره شده در این دستگاه چقدر است؟

پوسته داخلی را با سیم نازکی که روکش عایق دارد و از سوراخ کوچکی که در پوسته وسطی تعبیه شده، می‌گذرد به پوسته بیرونی وصل می‌کنیم. فرض کنید توزیع بار روی هر پوسته هنوز هم متقارن است.

د) بار الکتریکی هر پوسته را به دست آورید.

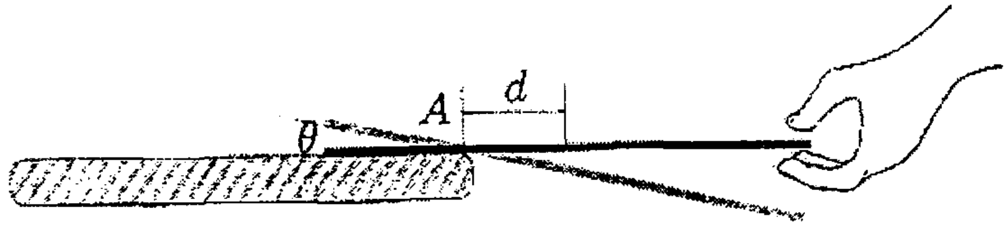
ه) بار الکتریکی روی سطح داخلی و خارجی هر پوسته چقدر است؟

و) انرژی الکتریکی ذخیره شده در این دستگاه چقدر است؟

سؤال‌های امتحان چهارم المپیاد فیزیک ـ بیست و یکمین دوره ـ تابستان ۸۷

وقت: ٤ ساعت

۱- میله یک نواختی به طول L و جرم m را کنار میزی با دست نگه داشته ایم. مرکز جرم میله، در فاصله d از گوشه میز است. میله را را رها می‌کنیم. ابتدا میله مدتی حول نقطه A دوران می‌کند تا آن که ناگهان شروع به لغزیدن می‌کند. ضریب اصطکاک ایستایی میله و میز μ است. لبه میز در نزدیکی نقطه A را بخشی از دایره با شعاع بسیار کوچک بگیرید.



الف) سرعت زاویه‌ای میله قبل از لیز خوردن (که آن را با ω نشان می‌دهیم) را بر حسب θ زاویه دوران میله، شتاب ثقل g، d، و L به دست آورید.

ب) نیرویی عمودی‌ای که میز به میله وارد می‌کند را با N نشان می‌دهیم. تا قبل از لیز خوردن N را بر حسب θ، g، d، m و L را به دست آورید.N همواره بر میله عمود است.

ج) زاویه لیز خوردن میله، θ_0 را بر حسب μ، d، و L به دست آورید. با فرض $\mu = 0.25$ و $d = L/3$ مقدار عددی $\theta_\circ$ چند درجه است.

۲- مطابق شکل طنابی به طول L و جرم یکنواخت M در نظر بگیرید که بین دو نقطه ثابت A و B بسته شده و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول خط مستقیم AB می‌چرخد. فاصله هر نقطه از طناب تا محور دوران را با طول r نشان می‌دهیم. (توجه کنید مقدار r بسته به هر نقطه طناب تغییر می‌کند.) خط مماس بر طناب در هر نقطه با محور دوران زاویه θ می‌سازد. زاویه مماس بر دو انتهای طناب با محور دوران، $+\theta_\circ$ و $-\theta_\circ$ است.

فرض کنید فاصله مرکز جرم طناب تا محور دوران R_{cm} است.

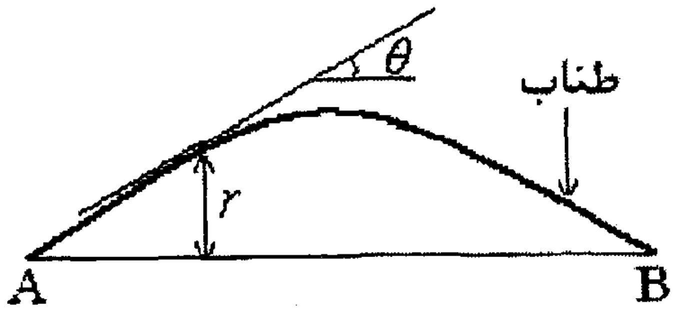
الف) کشش طناب در نقاط A و B را بر حسب M، ω، R_{cm}، و θ_0 به دست آورید. $(T_0 = ?)$

ب) معادله حرکت یک عنصر کوچک روی طناب را بنویسید و کشش طناب در هر نقطه طناب را بر حسب زاویه θ، θ_0 و T_0 به دست آورید.

ج) می‌توان از معادله‌های حرکت رابطه‌ای به صورت $r^2 = f(\theta)$ به دست آورد. $f(\theta)$ را به دست آورید.

د) با توجه به روابط بدست آمده کشش طناب در هر نقطه را بر حسب فاصله آن نقطه تا محور دوران (r) و ثابت‌های دیگر به دست آورید.

ه) بیشترین فاصله طناب از محور دوران چه قدر است؟ $r_{max} = ?$



۳- دو صفحه رسانای نیمه بی نهایت عمود بر هم‌اند و پتانسیل الکتریکی صفر دارند. خط مشترک دو صفحه، محور z است. بار نقطه‌ای q در نقطه $(a,b,0)$ قرار دارد.

الف) پتانسیل الکتریکی را در ربع فضایی که بار q در آن است به دست آورید.

ب) چگالی سطحی بار الکتریکی القا شده روی هریک از دو صفحه رسانا را پیدا کنید.

ج) روی صفحه رسانایی که در صفحه xz قرار دارد، نوار باریکی به ضخامت dx، به موازات محور z و در فاصله x از آن در نظر بگیرید. این نوار از $z \to -\infty$ تا $z \to +\infty$ واقع است. بار الکتریکی روی این نوار را به دست آورید.

د) با توجه به قسمت (ج) بار کل روی رسانایی که در صفحه xz است را به دست آورید.

ه) بار کل روی رسانایی که در صفحه yz است را نیز به دست آورید.

و) مجموع بار کل روی دو رسانا را حساب کنید.

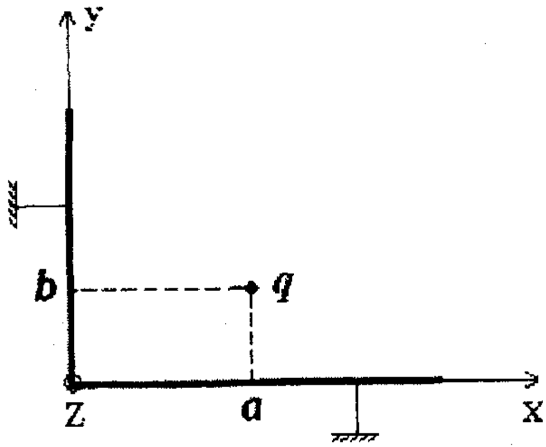
توجه: انتگرال‌های زیر ممکن است مفید باشند.

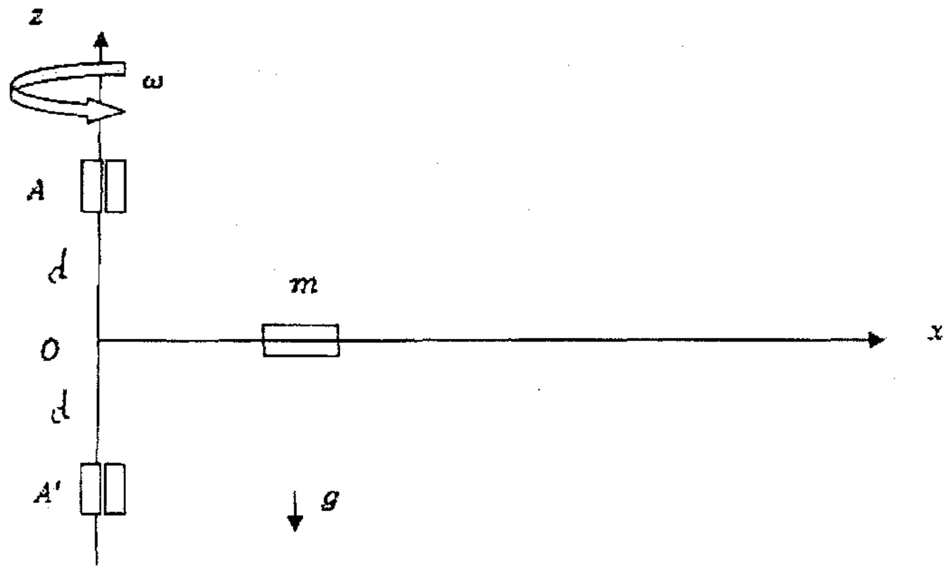
$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)} = \frac{1}{a}\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} == \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$$

$$\int \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\ln(a^2+x^2)$$





۴- دستگاه شکل فوق از دو میله بسیار سبک که در نقطه O به هم جوش داده شده‌اند تشکیل شده است. وزنه m روی بازوی بسیار طویل Ox قرار دارد و ضریب اصطکاک (جنبشی) آن با میله μ است. بازوی عمودی توسط یاتاقان‌های A و A′ در امتداد محور z نگه داشته شده و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. شتاب ثقل در راستای $(-z)$ است.

۱. ابتدا فرض کنید شتاب ثقل وجود ندارد. معادله‌ای برای r(t) به دست آورید.
۲. a چه باشد تا e^{at} حل معادله‌ی فوق باشد.
۳. نیروی عمودی میله بر جسم، N(t) را به دست آورید.
۴. تکانه زاویه‌ای دستگاه L(t) نسبت به نقطه O را به دست آورید.
۵. گشتاور خارجی وارد بر دستگاه $T_{ov}(t)$ نسبت به نقطه O را به دست آورید.
۶. نیروی افقی یاتاقانهای A و A′ بر میله عمودی F(t) را به دست آورید و گشتاور آن‌ها نسبت به نقطه O را به دست آورید.
۷. حال شتاب ثقل را در نظر بگیرید و معادله‌ای برای r(t) به دست آورید.
۸. a چه باشد تا $r(t)=r_\circ \cosh at$ حل معادله‌ی فوق باشد.

۹. $N(t)$ را به دست آورید.

راهنمایی: سینوس و کسینوس هذلولوی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) \qquad \cosh x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$$

و برخی از خواص آن‌ها چنین است:

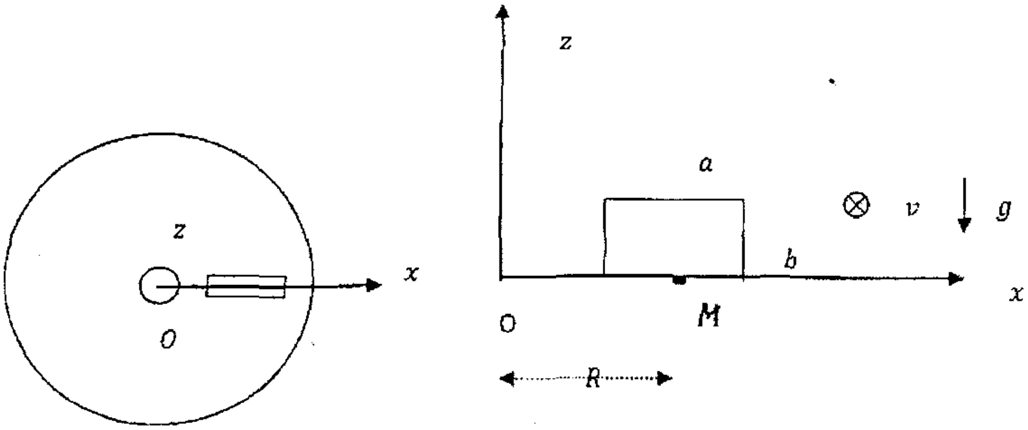
$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1 \qquad \sinh(0) = 0 \qquad \cosh(0) = 1$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x \quad و \quad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$

سؤال‌های امتحان نهایی المپیاد فیزیک ـ بیست و یکمین دوره ـ تابستان ۸۷

وقت: ۱۰ ساعت

۱- جعبه‌ای به ابعاد a، b و d روی یک صفحه افقی که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور قائم Z می‌چرخد قرار دارد و همراه آن می‌چرخد. شکل سمت چپ نمای دستگاه را از بالا نشان می‌دهد و شکل سمت راست نمای جانبی دستگاه را در شرایطی نشان می‌دهد که سرعت جعبه به سمت داخل شکل است. فرض کنید $d \ll R$ و ضریب اصطکاک ایستایی جسم با صفحه چرخان μ_s است و تغییرات سرعت زاویه‌ای به حدی آرام صورت می‌گیرد که همواره می‌توان حرکت دستگاه را با سرعت زاویه‌ای ثابت گرفت، به طوری که در دستگاه چرخان، جعبه در جهت مماس هیچ نوع جابه‌جایی ندارد.



۱. به ازای ω معین، حداقل μ_s چه قدر باشد تا جعبه سر نخورد.

۲. چنانچه جعبه سر نخورد، نقطه اثر نیروی گریز از مرکز را به دست آورید.

۳. چنانچه جعبه سر نخورد، فاصله نقطه اثر نیروی عمودی سطح از نقطه M را به دست آورید.

۴. اگر ω به آرامی زیاد شود و اصطکاک به اندازه کافی بزرگ باشد به ازای سرعت زاویه‌ای معینی جعبه کله پا می‌شود، یعنی حول لبه بیرونی خود می‌چرخد و روی وجه دیگر قرار می‌گیرد.
برای سهولت فرض می‌کنیم پس از ۹۰ درجه چرخش جعبه مجدداً روی صفحه ساکن شود.
این سرعت زاویه‌ای حدی ω_m را به دست آورید.

۵. به ازای مقادیر مختلف پارامترها معلوم کنید با افزایش بسیار آرام سرعت زاویه‌ای در چه صورتی جعبه ابتدا سر می‌خورد و در چه صورتی ابتدا کله پا می‌شود.

۶. در هر یک از دو صورت فوق معلوم کنید با توجه به پارامترها حرکت بعدی سرخوردن است یا کله پا شدن. سپس مشخص کنید حرکت‌های بعدی با افزایش تدریجی ω چگونه است.

۲- N پره به طول R در نظر بگیرید که روی یک صفحه قرار گرفته‌اند. یک انتهای پره‌ها در نقطه O به هم لولا شده‌اند و زاویه بین دو پره متوالی $\frac{2\pi}{N}$ است. کشی به طول آزاد l_0 و ضریب سختی k_0 در

نظر بگیرید. دو انتهای این کش را به هم گره می‌زنیم و سپس آن را دور انتهای دیگر پره‌ها می‌اندازیم، به طوری که از انتهای هر N پره عبور کند و تشکیل یک N ضلعی منتظم دهد (مطابق شکل). فرض کنید هیچ اصطکاکی بین کش و پره‌ها وجود ندارد. برای راحتی کار فرض کنید $l_0 = 0$ است.

الف) انرژی پتانسیل ذخیره شده در کش (U) را به دست آورید.

ب) کشش کش (T) و نیرویی که به هر پره از طرف کش وارد می‌شود (F) را به دست آورید.

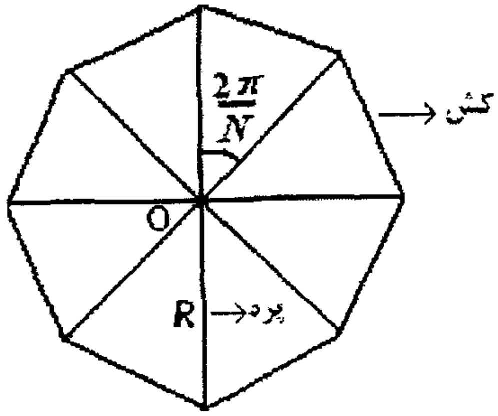
ج) U، T، و F را در حد $N \to \infty$ پیدا کنید.

فرض کنید پره‌ها حول محوری عمود بر صفحه N ضلعی و گذرنده از O (مرکز N ضلعی) به راحتی بچرخند. همچنین فرض کنید زاویه بین پره i ام و $(i+1)$ام به اندازه $\Delta\theta_i$ تغییر کند.

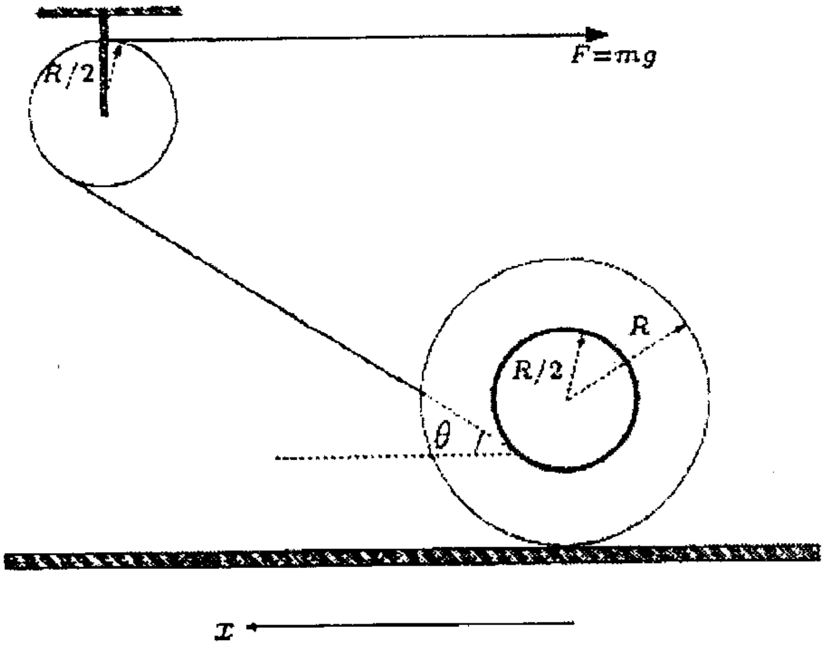
د) تغییر طول بخشی از کش که بین دو پره متوالی i ام و $(i+1)$ام است را نسبت به طول همین بخش در حالت قبل $(\Delta\theta_i = 0)$ تا مرتبه دوم نسبت به $\Delta\theta_i$ پیدا کنید.

ه) تغییر کل طول کش را نسبت به طول آن در حالت قبل $(\Delta\theta_i = 0)$ تا مرتبه دوم نسبت به $\Delta\theta_i$ حساب کنید. انرژی پتانسیل ذخیره شده در کش (U') را در این حالت تا همین مرتبه نسبت به $\Delta\theta_i$ به دست آورید.

و) تفاوت انرژی پتانسیل در حالت اول $(\Delta\theta_i = 0)$ و حالت جدید $(\Delta\theta_i \neq 0)$ را پیدا کنید.



۳- نخ بلندی به دور قرقره‌ای به جرم m، شعاع خارجی R، و شعاع داخلی $R/2$ پیچیده شده است. مطابق شکل سر دیگر این نخ پس از گذشتن از قرقره ثابتی به شعاع $R/2$ با نیروی ثابت F $(F = mg)$ کشیده می‌شود. g شتاب ثقل است. لختی دورانی قرقره حول محور تقارنش $I = mR^2/2$ است. ضریب اصطکاک قرقره با زمین را μ بگیرید. زاویه‌ای که نخ بین دو قرقره با افق می‌سازد را θ بگیرید. مقدار اولیه θ, θ_0 است و در ابتدا قرقره بسیار دور است $(\theta_0 \approx 0)$. جهت مثبت محور x در شکل نشان داده شده است. از جرم و لختی دورانی قرقره ثابت، جرم نخ و ضخامت نخ چشم پوشی کنید.



الف) فرض کنید ضریب اصطکاک آن قدر هست که قرقره می‌غلتد. معادلات لازم برای محاسبه شتاب را به دست آورید.

ب) فرض کنید ضریب اصطکاک آن قدر هست که قرقره می‌غلتد. شتاب آن، a، چه قدر است؟

ج) μ چه قدر باشد تا قرقره درست پس از این که در زاویه $\theta_0 \approx 0$ رها شد، بغلتد؟ جواب خود را تا مرتبه اول θ_0 به دست آورید.

د) به ازای چه مقداری از θ شتاب قرقره صفر می‌شود؟ این زاویه را θ_1 بگیرید. فرض کنید ضریب اصطکاک آن قدر هست که در این زاویه قرقره می‌غلتد.

ه) μ چه قدر باشد تا در تمام مدتی که قرقره از زاویه θ_0 شروع به حرکت کرده تا به جایی که شتابش صفر می‌شود، یعنی زاویه θ_1 بغلتد؟

۴- ابری کروی متقارن از ذرات با چگالی جرمی یکنواخت ρ_0 را در نظر بگیرید. مبدأ مختصات را مرکز کره بگیرید. سرعت ذرات در زمان $t = 0$ مطابق قانون هابل متناسب با r فاصله تا مرکز ابر است.

$$V(r) = Hr, \qquad (1)$$

H که ضریب هابل نامیده می‌شود مستقل از مکان است. این مدل، مدلی ساده برای انبساط جهان است. ضریب هابل در زمان $t = 0$، $H(0)$، چگالی جرمی ρ_0 و ثابت جهانی گرانش، G داده شده‌اند.

الف) لایه‌ای کروی و نازک به ضخامت $\delta r(0)$ در نظر بگیرید. سطح داخلی لایه در شعاع r_0 است. پس از زمان کوتاه δt ضخامت لایه $\delta r(\delta t)$ چه قدر است؟ جواب خود را تا مرتبه اول δt و بر حسب $\delta r(0)$، δt و $H(0)$ بنویسید.

ب) پس از این زمان سرعت نقاط سطح داخلی این لایه υ_1، و سرعت نقاط سطح خارجی این لایه υ_2 چه قدر است؟ جواب‌های خود را بر حسب $\delta r(0)$، δt، r_0، G، ρ_0 و $H(0)$ بنویسید. $v(r,\delta t)$

سرعت ذره‌ای در نقطه r در زمان δt چه قدر است؟ جواب خود را بر حسب δt، r، δt، ρ_0 و $H(0)$ بنویسید.

ج) چگالیی جرمی لایه در زمان δt یعنی $\rho(\delta t)$ چه می‌شود؟ جواب خود را تا مرتبه اول δt و بر حسب $\delta r(0)$، δt، ρ_0 و $H(0)$ بنویسید. آیا چگالی لایه بعد از این زمان هم چنان یکنواخت باقی می‌ماند؟ چرا؟

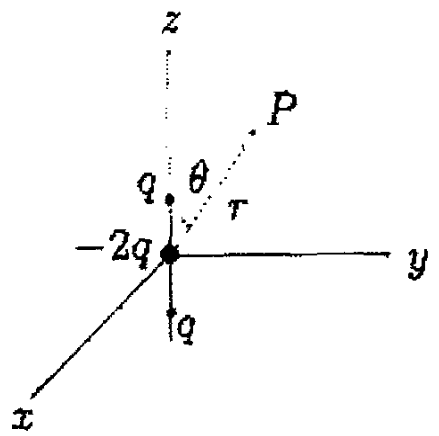
د) پس از گذشت زمان t، که کوچک هم نیست، ذره‌ای که در شعاع r_0 است به شعاع r می‌رسد. شتاب ذره در این لحظه را بر حسب r_0، G، ρ_0 و r به دست آورید.

ه) چگالی بحرانی‌ای مثل ρ_c وجود دارد که اگر چگالی اولیه، ρ_0، از آن کوچک تر باشد انبساط تا ابد ادامه پیدا می‌کند. ρ_c چه قدر است؟

راهنمایی: سرعت ذره در نقطه‌ی r را به دست آورید.

و) فرض کنید $\rho_0=\rho_c$ باشد. ذره‌ای در ابتدا در شعاع r_0 است. مکان ذره در زمان t، $r(t)$ را بر حسب $\delta r(0)$، t و $H(0)$ به دست آورید. ضریب هابل را نیز بر حسب $H(0)$ و زمان به دست آورید.

۵- بار نقطه‌ای $-2q$ را در مبدأ مختصات و دو بار نقطه‌ای دیگر q در نقاط $(0,0,\ell)$ و $(0,0,-\ell)$ روی محور z در نظر بگیرید.



الف) پتانسیل الکتریکی را در نقطه P به مختصات (r,θ) به ازای $r\gg\ell$ تا اولین مرتبه غیرصفر، بر حسب r و θ بنویسید.

ب) بردار میدان الکتریکی را در نقطه P به مختصات (r,θ) به ازای $r\gg\ell$ تا اولین مرتبه غیر صفر، بر حسب r و θ بنویسید.

ج) معادله یک سطح هم پتانسیل مربوط به این توزیع بار را در همان شرایط $r\gg\ell$، بر حسب r و θ بنویسید.

د) مقطعی از سطوح هم پتانسیل الکتریکی $\pm\frac{1}{1000}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\ell}$ را در صفحه‌ی $y-z$ به دقت رسم کنید.

ه) معادله خطوط نیروی مربوط به این توزیع بار را در همان شرایط $r \gg \ell$، بر حسب r و θ به دست آورید.

و) یک دسته از خطوط نیروی قسمت (ه) را در صفحه‌ی $y-z$ به ازای $0 \le \theta \le 2\pi$ رسم کنید.

در صورت نیاز:

$$\int\frac{d\theta}{\sin\theta} = \ln\tan\frac{\theta}{2}$$

۶- بر رئوس مستطیلی به طول $2a$ و عرض $2b$ بارهای یکسان Q قرار داده شده است. طول مستطیل در امتداد محور x و عرض آن در امتداد محور y است و مبدأ مختصات بر مرکز آن منطبق است. بار نقطه‌ای q به جرم m در مبدأ مختصات به حال تعادل است. فرض کنید ساز و کاری (مثل یک لوله) وجود دارد که باعث می‌شود بار q فقط بتواند در امتداد یک خط راست از مبدأ منحرف شود.

الف) معین کنید برای جابه‌جایی‌های کوچک درهر یک از راستاهای x، y و z در چه صورتی تعادل بار q در مبدأ پایدار است. در این صورت دوره تناوب (پریود) نوسان‌های کوچک حول مبدأ را به دست آورید. جواب را بر حسب $C = \sqrt{a^2+b^2}$ و $A = tg^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ بیان کنید.

ب) tgA چه مقادیری داشته باشد تا بار q بتواند در صفحه xy روی یک مسیر بسته حرکت کند.

ج- اگر بار q در صفحه xy در امتداد محوری که با محور x زاویه ثابت φ می‌سازد حرکت کند،

ج-۱) زاویه φ_0 را چنان تعیین کنید که دوره نوسان بسیار بزرگ باشد.

ج-۲) چه شرطی روی tgA داشته باشیم تا به ازای هر φ دلخواه حرکت نوسانی (تعادل پایدار) باشد.

۷- در لحظه‌ای $t=0$ سه ذره به جرم‌های m_1 و m_2 و m_3 بر سه رأس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ℓ_0 قرار دارند. مبدأ مختصه‌ها را مرکز جرم سه ذره می‌گیریم. تنها نیروی وارد بر هر ذره نیروی گرانش دو ذره دیگر است. فاصله‌ی ذره‌ی i ام از مبدأ r_i است.

الف) اندازه و جهت نیروی وارد بر ذره‌ی i ام را حساب کنید.

فرض کنید در $t=0$ اندازه سرعت ذره i ام v_i و جهت آن به سمت مرکز جرم باشد و داشته باشیم

$$\frac{v1}{r1} = \frac{v2}{r2} = \frac{v3}{r3} = b_0$$

در بازه‌ی زمانی بسیار کوچک $[o,\delta t]$ حرکت ذره‌ها را شتاب دار با شتاب ثابت بگیرید. در زمان $t=\delta t$ ذره i ام در فاصله‌ی $r_i-\delta r_i$ از مبدأ است.

ب) $\frac{\delta r_i}{r_i}$ را حساب کنید.

سرعت اولیه هر سه ذره را صفر بگیرید و فرض کنید که حرکت چنان است که مثلثی که رئوسش مکان سه ذره است همواره متساوی الاضلاع بماند. طول ضلع مثلث را $s\ell_0$ بگیرید. در این جا s تابع زمان است.

ج) با نوشتن قانون دوم نیوتن، یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه 2 برای s به دست آورید.

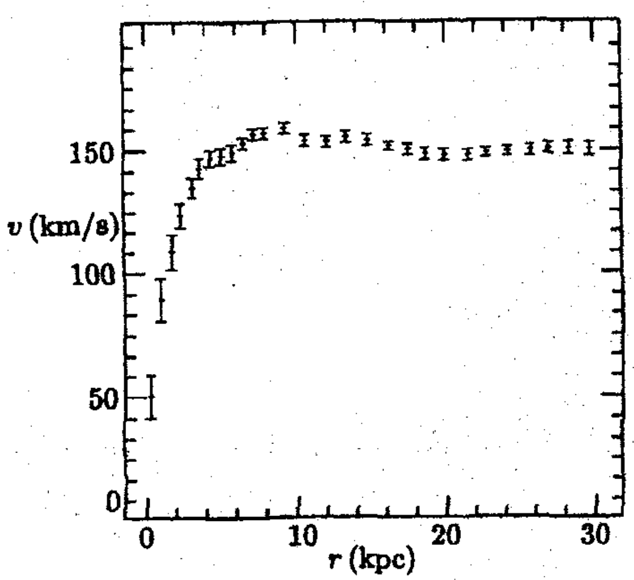
د) یک معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی 1 برای s بنویسید. راهنمایی: اگر به ذره‌ای یک نیروی پایستار وارد شود انرژی کل آن ثابت است.

ه) معادله بالا را برای s حل کنید (یعنی انتگرال بگیرید). شرط آغازین مناسب را اعمال کنید. و زمان رسیدن سه ذره به هم (یعنی صفر شدن s) را به دست آورید.

راهنمایی: انتگرال را با تغییر متغیر $s=\sin^2\theta$ بگیرید.

۸- ستاره‌های کهکشان به دور مرکز آن با سرعت $v(r)$ می‌چرخند، که r فاصله ستاره تا مرکز کهکشان است. در شکل زیر داده‌های مربوط به این اندازه گیری برای یک کهکشان مارپیچی آمده است.

در حل مساله به تقریب چگالی جرم را پیوسته بگیرید و فرض کنید این جرم به طور همسانگرد پخش شده. یک پارسک برابر است با $1pc=3\times10^{16}\,m$. ثابت جهانی گرانش $G=7\times10^{-11}\,Nm^2kg^{-2}$ است.



الف) $v(r)$ چه رابطه‌ای با $M(r)$، جرم درون کره‌ای به مرکز کهکشان و شعاع r، دارد؟

ب) با توجه به این که برای $r > 10\text{kpc}$ منحنی سرعت بر حسب فاصله تقریباً تخت است، $M(r)$ را بدست آورید. به ازای این مقادیر r، چگالی جرم $\rho(r)$ بر حسب G، و r تقریباً چیست؟ $\rho(r)\big|_{r=20\text{kpc}}$ تقریباً چقدر است؟

ج) اگر شعاع کهکشان تقریباً $r = 100\text{kpc}$ باشد و سرعت بر حسب فاصله از $r = 30\text{kpc}$ تا $r = 100\text{kpc}$ همان مقدار ثابت قبلی باشد، جرم ماده کهکشان برای شعاع بیش از $r = 10\text{kpc}$ را به تقریب به دست آورید.

۹- یک پوسته کروی رسانای بدون بار به شعاع a در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}_0$ در نظر بگیرید. یک روش برای ایجاد میدان تقریباً یکنواخت $\vec{E}_0$ در نزدیکی مبدأ، قرار دادن دو بار نقطه‌ای $\pm Q$ در $z = \mp L$ است. میدان این دو بار نقطه‌ای در مبدأ $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{L^2}$ است. برای این که میدان یکنواخت اولیه $\vec{E}_0$ که کره در آن قرار گرفته، تولید شود، کافی است $Q \to \infty$ و $L \to \infty$ به طوری که $E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{L^2}$ و E_0 مقدار ثابتی باشد.

الف) به کمک روش تصویر و توضیحات بالا پتانسیل الکتریکی را در نقطه p بر حسب r، θ، a، E_0 به دست آورید.

ب) بردار میدان الکتریکی را در نقطه‌ی p بنویسید.

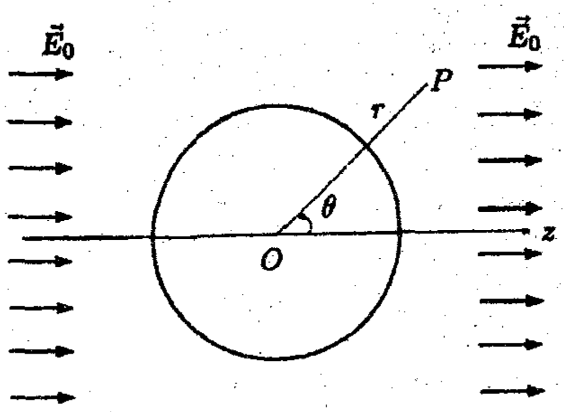
ج) چگالی بار سطحی القایی روی سطح کره را محاسبه کنید.

د) گشتاور دو قطبی الکتریکی وابسته به این توزیع بار چقدر است؟

ه) دو نیم کره‌ای که به وسیله‌ی یک صفحه فرضی عمود بر میدان الکتریکی از پوسته ایجاد می‌شوند چه نیرویی به هم وارد می‌کنند؟

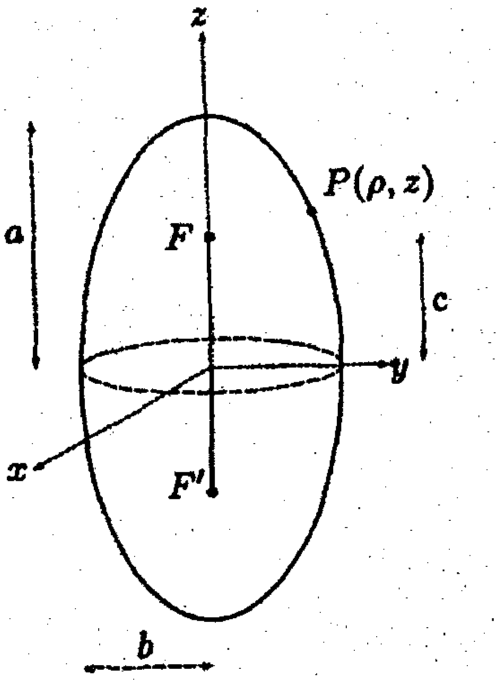
اکنون فرض کنید پوسته رسانا دارای بار خالص q است.

و) کمیت‌های خواسته شده در بندهای الف) تا ه) چقدراند؟



۱۰- در مساله دوم از امتحان دوم دیدیم، سطوح هم پتانسیل یک میله نازک به طول ℓ با توزیع بار یکنواخت، بیضی گون‌هایی هستند که کانون‌های آنها، F و F'، دو سر میله است. بیضی گون، مکان هندسی نقاطی است که مجموع فاصله هر یک از نقاط آن تا دو کانون مقدار ثابتی باشد. در شکل زیر این مقدار ثابت، $2a$ یعنی به اندازه طول قطر بزرگ بیضی گون است. اگر (ρ, z) مختصات استوانه‌ای (ρ فاصله تا محور z است) نقطه P روی سطح یک بیضی گون با مقطع دایره‌ای (در صفحه‌ی $x-y$ باشد داریم:

$$\frac{\rho^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$



که b نصف قطر کوچک بیضی است. اگر c فاصله‌ی کانون تا مرکز بیضی باشد، بین a، b و c رابطه‌ی $b^2+c^2=a^2$ برقرار است. در ضمن بردار یکه عمود بر سطح بیضی گون در نقطه P

$$\hat{n}=\frac{\dfrac{\rho\hat{\rho}}{b^2}+\dfrac{z\hat{z}}{a^2}}{\sqrt{\dfrac{\rho^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{a^4}}}$$

است.

یک پوسته رسانا به شکل بیضی گون با نیم قطر بزرگ a و مقطع دایره‌ای با نیم قطر کوچک b و بار الکتریکی q در نظر بگیرید.

الف) پتانسیل الکتریکی روی سطح این رسانا را بر حسب a و b به دست آورید.

ب) ظرفیت این پوسته، C را بر حسب a و b به دست آورید.

ج) میدان الکتریکی قائم بر سطح رسانا در نقطه P را به دست آورید.

د) چگالی بارسطحی در نقطه P را بر حسب مختصات این نقطه و a و b محاسبه کنید و جواب را به ساده ترین شکل ممکن بنویسید.

ه) نیروی دافعه بین نیمه‌ی بالایی (بالای صفحه‌ی $x-y$) و پایینی (پایین صفحه‌ی $x-y$) این رسانای باردار را محاسبه کنید.

و) به ازای $a = b$ کمیت‌های خواسته شده در قسمت‌های ب) تا ه) را به دست آورید.