دانشکده علوم ریاضی

آز ریاضیات

تمرین تحویلی نهایی

سوالات انتخابی آزمون میان ترم اول ۸۱

اساتید:
دکتر فروغمند اعرابی
دکتر حاجی میرصادقی

نگارنده:
حسین نادری
۹۴۱۰۰۱۱۹

۲۵ دی ۱۳۹۴

۱ مسائل

۱.۱ سوال یکم

ثابت کنید در هر بازه I یک عدد اعشاری به شکل $a_0/a_1a_2a_3...a_m000...$ وجود دارد.(یعنی یک عدد اعشاری متناهی که ارقام بعد از ممیز از رقم m ام به بعد همگی صفر هستند.) (۱۰نمره)

۲.۱ سوال دوم

فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد، در مورد همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ بحث کنید. در مورد$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ چه نتیجه ای می گیرید؟ (۱۵ نمره)

۳.۱ سوال سوم

تابع پیوسته $f : [0,1] \longrightarrow R$ را در نظر می گیریم. اگر $f(0) = f(1)$ ثابت کنید یک نقطه $c \in [0,1]$ وجود دارد که $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$. (۲۰ نمره)

۲ پاسخ ها

۱.۲ پاسخ سوال یکم

اگر قسمت صحیح بزرگترین کران پایین و کوچک ترین کران بالای I تعداد رقم قبل از اعشار یکسانی داشتند،این دو عدد از سمت چپ تا یک رقم معینی با یکدیگر مشابه اند و در رقم n ام با هم متفاوت اند. بدون کاستن از کلیت مساله اگر بزرگترین کران پایین یک رقم قبل از اعشار داشته باشد و رقم n ام بعد از ممیز اعشار بود، عدد $a_0/a_1a_2a_3...a_n + 1000...$ در بازه I قرار دارد و خواسته مساله است.

اگر قسمت صحیح بزرگترین کران پایین و کوچک ترین کران بالای I تعداد رقم قبل از اعشار یکسانی نداشتند. بزرگترین کران پایین را به صورت $b_0/b_1b_2b_3...$ [1] در نظر می گیریم. اولین رقم بعد از اعشار از سمت چپ $(b_i(i > 0$ که $b_i < 9$ است را در نظر می گیریم وعدد $b_0/b_1b_2b_3...(b_i + 1)$ شرط خواسته مساله را دارد. اگر رقم i وجود نداشته باشد یک عدد طبیعی میان[2] بزرگترین کران پایین و کوچکترین کران بالا جواب مساله است. این عدد وجود دارد چون از کتاب ریاضی عمومی داریم $c_0/999...$ با $c_0 + 1$ برابر است که یک عدد طبیعی است[3].

[1] مختومه بودن یا نبودن تفاوتی ندارد.
[2] خود این دو عدد هم می توانند باشند.
[3] این نکته حائز اهمیت است که طول بازه مقداری بزرگ تر از صفر است.

۲.۲ پاسخ سوال دوم

از آزمون نسبت کمک می گیریم.

$$\frac{\sum_{n=1}^{k+1} \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=1}^{k} \frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{k+1}$$

حال داریم:

$$k > a \Rightarrow \frac{a}{k+1} < \frac{a}{a+1} < 1$$

پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ همگراست و چون این سری هم گراست ،از کتاب می دانیم حد جملات آن به صفر همگرا بوده است.

۳.۲ پاسخ سوال سوم

تابع $g : [0, \frac{2}{3}] \longrightarrow R$ را به این صورت در نظر می گیریم که $g(c) = f(c + \frac{1}{3}) - f(c)$. اگر $g(x) = 0$ باشد داریم $f(x + \frac{1}{3}) - f(x) = 0$ و x نقطه مد نظر سوال است. چون f پیوسته است، از آن جایی که اختلاف دو تابع پیوسته،پیوسته است؛ g نیز پیوسته است. اگر g همواره بزرگتر از صفر یا کوچک تر از صفر نباشد طبق قضیه بولزانو c وجود دارد که $g(c) = 0$. بدون کاستن از کلیت مساله اگر $g(x)$ همواره بزرگتر از صفر باشد، داریم:

$$\begin{array}{l} g(0) > 0 \Rightarrow f(\frac{1}{3}) > f(0) \\ g(\frac{1}{3}) > 0 \Rightarrow f(\frac{2}{3}) > f(\frac{1}{3}) \\ g(\frac{2}{3}) > 0 \Rightarrow f(1) > f(\frac{2}{3}) \\ \quad\Rightarrow f(1) > f(0) \end{array}$$

که خلاف فرض سوال است.