

به نام خدا
روز نخست
روش‌های حل مسئله + ترکیبیات شمارشی
<http://YazdCS.blog.ir>

۱ کارت بازی

$2n$ کارت که روی هر کدام یک عدد صحیح نوشته شده داریم. می‌دانیم مجموع اعداد روی کارت‌ها عددی فرد است. کارت‌ها در یک ردیف پشت سر هم چیده شده‌اند. دو نفر باهم بازی می‌کنند، در هر مرحله کسی که نوبت با اوست باید از یکی از دو سر ردیف یک کارت بردارد. در نهایت کسی برنده‌است که مجموع اعداد کارت‌هایش از رقیب بیشتر باشد. اگر هر دو نفر خیلی خیلی باهوش باشند(!) چه کسی استراتژی برد دارد؟ [مشاهده و مثال]

۲ رنگ‌آمیزی جدول

الف) یک جدول 8×8 داریم. می‌خواهیم ۳۱ خانه از جدول را سیاه کنیم به طوری که هیچ دو خانه‌ای که ضلع مشترک دارند رنگ نشده باشند. چند حالت مطلوب وجود دارد؟
ب) مسئله‌ی قبلی را برای یک جدول $2n \times 2n$ و $2n^2 - 1$ خانه‌ی سیاه حل کنید. [تقسیم مسئله به زیرمسئله‌های خوب]

۳ بازگشت!

در هر قسمت برای a_n رابطه‌ی بازگشتی پیدا کنید.
الف) a_n را تعداد رشته‌های به طول n از حروف a, b در نظر بگیرید که در آن aa وجود ندارد.
ب) a_n را تعداد رشته‌های به طول n از حروف a, b, c در نظر بگیرید که در آن aaa وجود ندارد.
ج) گراف W_n یک دور n راسی است که یک راس به آن اضافه شده که به همگی رئوس دیگر یال دارد. a_n را تعداد حالت‌های رنگ‌آمیزی راس‌های W_n با ۵ رنگ در نظر بگیرید.

۴ پریش

D_n را تعداد جایگشت‌هایی از اعداد ۱ تا n در نظر بگیرد که هیچ i -ای در جایگاه i -ام نیست. الف) یک رابطه‌ی بازگشتی برای D_n پیدا کنید. ب) با استفاده از اصل شمول و عدم شمول یک رابطه‌ی غیربازگشتی برای D_n ارائه کنید.

۵ تناظر عزیز

الف) ثابت کنید تعداد حالت‌های افراز کردن عدد طبیعی n به k عدد طبیعی، برابر با تعداد حالت‌های افراز کردن n به مقادیر حداکثر k است. ب) ثابت کنید تعداد حالت‌های افراز کردن عدد طبیعی n به اعداد متفاوت برابر با تعداد حالت‌های افراز کردن n به اعداد فرد است.

۶ چوب‌بری

یک قطعه چوب به طول n متر داریم و می‌خواهیم در نهایت آن را به n قطعه چوب به طول یک تبدیل کنیم. الف) با فرض اینکه در هر مرحله یکی از قطعه چوب‌های بزرگتر از واحد را برش بزنیم، چند حالت مختلف برای انجام کل کار داریم؟ ب) با فرض اینکه در هر مرحله همه‌ی قطعه چوب‌های بزرگتر از واحد را برش بزنیم، چند حالت مختلف داریم؟

۷ پرانتز گذاری

تعداد حالت‌های مختلف پرانتز گذاری معتبر با n جفت پرانتز را بشمارید! ارائه‌ی رابطه‌ی بازگشتی کافی است.

۸ مسیر خوش‌فرم

یک جدول مربعی $n \times n$ در نظر بگیرید. تعداد حالت‌هایی که با حرکت‌های بالا و راست از گوشه‌ی پایین چپ به گوشه‌ی بالا راست برویم و از قطر مربع (!) عبور نکنیم را بشمارید. الف) رابطه‌ی بازگشتی بیابید و نشان بدهید جواب قسمت ب سوال چوب‌بری و سوال پرانتز گذاری با این سوال برابر است. ب) یک رابطه‌ی صریح برای جواب بیابید. [اصل متمم]

۹ سوال فرد قرمز

تعداد رشته‌های به طول ۱۹۹۷ از حروف a, b, c که از هر کدام از حروف فرد بار در رشته آمده را محاسبه کنید.

۱۰ سه دوم ه بلاروس!

تعداد رشته‌های به طول n از حروف a, b که به ازای هیچ رشته‌ی دیگری مثل S ، زیر رشته‌ی $SSSSSS$ در آنها وجود ندارد را a_n در نظر بگیرید. ثابت کنید $a_n > \left(\frac{3}{4}\right)^n$ است.