به نام او که تنها او حق است و باقی همه جوب!

دومین آزمون آزمایشی

المپیاد نجوم و اختر فیزیک

زمان آزمون: ۲۷۰ دقیقه

مبحث: اختر فیزیک کهکشانی

کسری حاجیان

پرشان جوانرود

- در این آزمون ۹ صفحه سوال در ۵ برگ (به همراه جلد) به شما تحویل داده شده است. پیش از شروع آزمون از کامل بودن آن اطمینان حاصل کنید.
- آزمون شامل ۶ سوال است. ۱ صفحه روکش، ۱ صفحه ثوابت، و ۱ صفحه پیوست.
- استفاده از ماشین حساب مجاز است.
- استفاده از هر گونه یادداشت، اطلس های نجومی و لوازم الکترونیکی ممنوع است.
- پاسخ سوالات را در برگه **A۴ سفید**، تمیز و خوش خط با **خودکار آبی و یا مشکی** بنویسید. استفاده از غلط گیر غیرمجاز است و در صورت استفاده تقلب محسوب می شود.

ثوابت فیزیکی و نجومی

G	ثابت جهانی گرانش	$۶.۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\ m^{۳}kg^{-۱}s^{-۱}$
σ	ثابت استفان بولتزمن	$۵.۶۷ \times ۱۰^{-۸}\ Wm^{-۲}K^{-۴}$
k_B	ثابت بولتزمن	$۱.۳۸ \times ۱۰^{-۲۳}\ JK^{-۱}$
h	ثابت پلانک	$۶.۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}\ Js$
C	سرعت نور	$۳.۰۰ \times ۱۰^{۸}\ ms^{-۱}$
pc	پارسک	$۳.۰۹ \times ۱۰^{۱۶}\ m$
AU	واحد نجومی	$۱.۵۰ \times ۱۰^{۱۱}\ m$
ly	سال نوری	$۹.۴۶ \times ۱۰^{۱۵}\ m$
$R_\odot$	شعاع خورشید	$۶.۹۹ \times ۱۰^{۸} m$
$M_\odot$	جرم خورشید	$۱.۹۹ \times ۱۰^{۳۰}\ kg$
$L_\odot$	درخشندگی خورشید	$۳.۸۵ \times ۱۰^{۲۶}\ W$
$M_{bol,\odot}$	قدر مطلق بولومتریک خورشید	$۴.۷۲\ mag$
$m_\odot$	قدر ظاهری خورشید	$-۲۶.۸\ mag$
m_p	جرم پروتون	$۱.۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\ kg$
m_e	جرم الکترون	$۹.۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}\ kg$
e	بار الکترون	$۱.۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\ C$
$M_\oplus$	جرم زمین	$۵.۹۷ \times ۱۰^{۲۴}\ kg$
$R_\oplus$	شعاع زمین	$۶.۳۸ \times ۱۰^{۶}\ m$
ϵ	زاویه تمایل محور زمین	۲۳.۵°
ϵ_{pp}	ضریب کارایی همجوشی هیدروژن	۰.۰۰۷
$inch$	اینچ	$۲.۵۴\ cm$
$H_۰$	پارامتر هابل	$۶۹\ kms^{-۱}Mpc^{-۱}$
r_{LMC}	فاصله ابرماژلانی بزرگ از مرکز کهکشان	$۴۵\ kpc$
M_{LMC}	جرم ابرماژلانی بزرگ	$۱۰^{۱۰}\ M_{sun}$
$R_{milky\ way}$	شعاع راه‌شیری	$۱۵\ kpc$

سوال ۱) توزیع ستارگان در کهکشان (۶۰ نمره)

فرض کنید چگالی تعداد ستارگان نوع S در کهکشان به صورت زیر باشد :

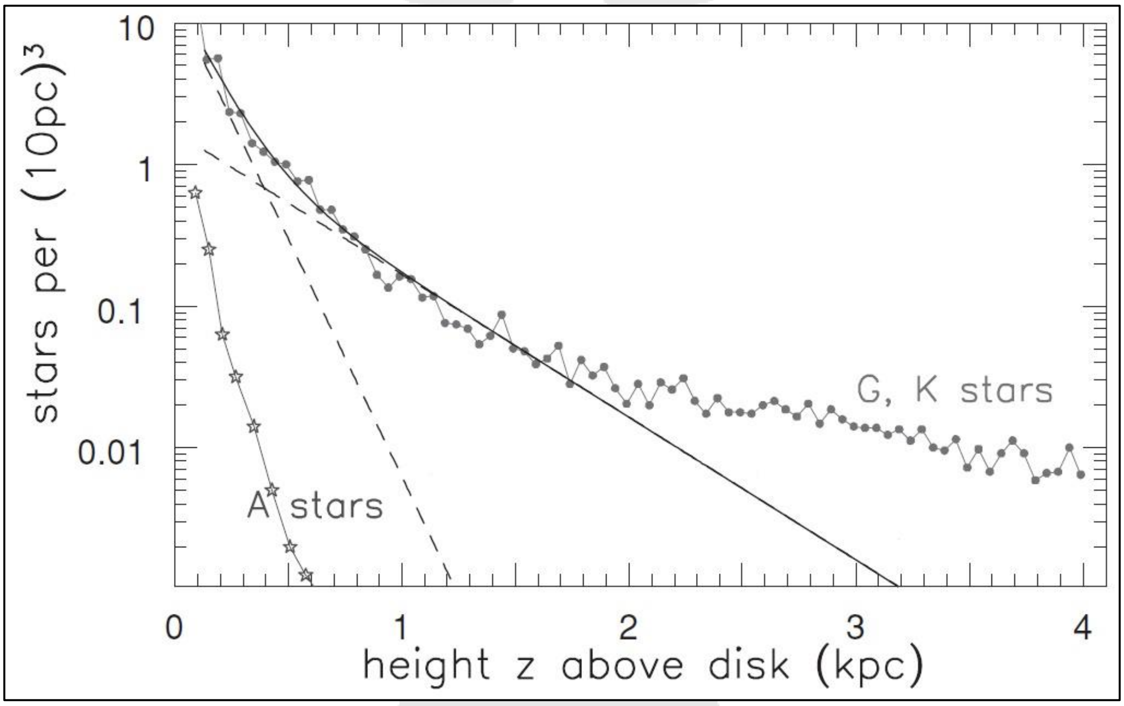
$$n(S,z,R) = n(S,\cdot,\cdot)e^{-\frac{z}{h_z}}e^{-\frac{R}{h_R}}$$

الف) تابعیت چگالی سطحی ستارگان نوع S را بدست آورید.

ب) تابعیت روشنایی سطحی برای نوع S را بیابید.

ج) نمودار زیر چگالی تعداد ستارگان نوع A و ستارگان نوع G و K را بر حسب ارتفاع از دیسک در مرکز کهکشان را نمایش می دهد؛ با توجه به اطلاعات داده شده در مورد این ستارگان، جرم و درخشندگی کهکشان را بدست آورید.(فرض کنید h_R برای تمام ستارگان برابر ۴ کیلوپارسک است.)

د) نسبت جرم به درخشندگی را محاسبه کنید.



راهنمایی:

$Type\ A\ stars:\ \cdot.\text{۷} < M_V < \text{۲.۵}$

$Type\ K\ and\ G\ stars:\ \text{۵} < M_V < \text{۶}$

$L \propto M^{\text{۳}}$

سوال ۲) دونات خودمه! (۱۰۰ نمره)

در این سوال می‌خواهیم، المان حجم بهتری برای پیدا کردن تعداد برخوردهای یک ستاره با دیگر ستاره‌های کهکشان بیابیم.

المان حجمی که معمولا استفاده می‌شود، از حرکت سطح مقطع موثر برخوردی به شکل نواری از دایره با سطح $۲\pi b\ db$ به طول $v\Delta t$ تشکیل می‌شود، که به شکل یک استوانه است. با توجه به این‌که ستاره‌ها در کهکشان در مدارهای تقریبا دایروی حرکت می‌کنند، المان حجمی بهتر از دوران سطح $۲\pi b\ db$ حول محور چرخش ستاره به‌وجود می‌آید. این شکل یک دونات توخالی با ضخامتی ناچیز است.

الف) اگر مساحت این دونات S و ضخامت آن db و چگالی عددی ستاره‌های کهکشان مقدار ثابت n باشد، تعداد برخوردها را بیابید.

ب) معادله دوناتی که از دوران دایره‌ای با شعاع b حول محور z و با فاصله r_C از آن ایجاد می‌شود را بدست آورید.

ج) معادله بردار عمود بر سطح این دونات را در نقطه‌ای با مختصات (x, y, z) بیابید.

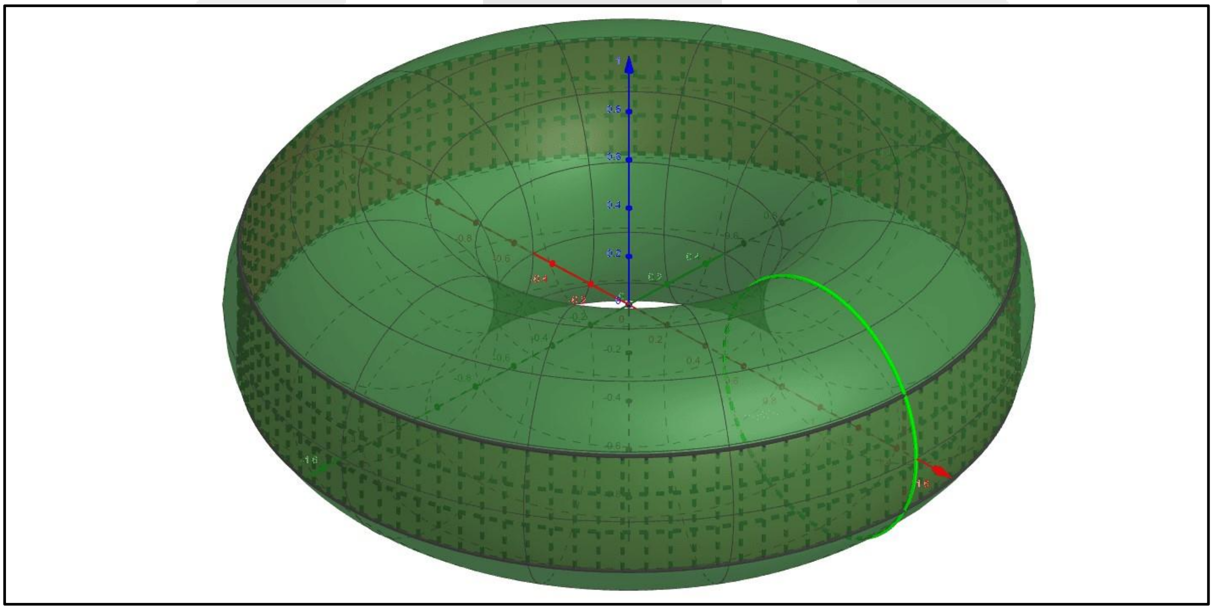
د) با توجه به تصویر شدن المان مساحت دونات به روی صفحه xy و رابطه بخش قبل، رابطه‌ای انتگرالی برای بدست آوردن مساحت دونات بنویسید. (به‌صورت انتگرال دوگانه روی x و y)

ه) با تغییر دستگاه مختصات از دکارتی به قطبی مساحت این دونات را محاسبه کنید.

$$x = Rcos(\phi) \quad , y = Rsin(\phi)$$

و) حجم دوناتی که از دوران دایره‌ای با شعاع R با فاصله r از محور z بدست می‌آید، را محاسبه کنید.

ز) با توجه به نتیجه قسمت‌های قبلی تعداد برخورد با ستاره‌های در فاصله b تا $b + db$ در مدت Δt را محاسبه کنید. تفاوت تعداد برخوردها در مدت Δt در المان دوناتی و المان استوانه‌ای چقدر است؟



سوال ۳) $\boldsymbol{NFW}$ (۱۲۰ نمره)

مدل NFW به شکل زیر است:

$$\rho_{NFW}(r) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s}\right)\left(۱ + \frac{r}{r_s}\right)^۲}$$

الف) سعی کنید(!!!) تابعیت چگالی سطحی را بدست آورید.

در قسمت الف برای محاسبه تابعیت چگالی سطحی به یک انتگرال رسیدید که محاسبه آن کاری بس دشوار است؛ اما برای محاسبه جرمی که درون حلقه ای که ما مشاهده می کنیم راه دیگری نیز وجود دارد.

ب) یک دستگاه مختصات کروی در مرکز کهکشان قرار دهید، جرمی که مشاهده می کنیم جرم درون یک سیلندر به شعاع R و ارتفاع بی نهایت می باشد، جرم درون این سیلندر از انتگرال گیری بدست آوریم، اما انتگرالی متفاوت، المان حجم خود را در دستگاه کروی بنویسید و با محاسبه انتگرال سه گانه رابطه زیر را اثبات کنید. (در حدگذاری ها دقت کنید.)

$$M_{۲D}(R) = \int_{۰}^{۱} M_{۳D}\left(\frac{R}{\sqrt{۱ - u^۲}}\right) du$$

که $M_{۳D}\left(\frac{R}{\sqrt{۱-u^۲}}\right)$ جرم محصور در کره ای به شعاع $\frac{R}{\sqrt{۱-u^۲}}$ است که $u = \cos\theta$ و R شعاع تصویر شده می‌باشد.

د) جرم درون کره ای به شعاع r را بدست آورده و سپس با استفاده از نتیجه قسمت قبل نشان دهید جرم درون حلقه ای به شعاع R به صورت زیر است :

$$M_{۲D}(R) = ۴\pi r_s^۳ \rho_s \left(\ln\frac{R}{۲r_s} + F_{NFW}\left(\frac{R}{r_s}\right)\right)$$

$$F_{NFW}(x) = \begin{cases} \frac{۱}{\sqrt{x^۲ - ۱}} \arctan\sqrt{x^۲ - ۱} \ ; x > ۱ \\ ۱ \ ; \ x = ۱ \\ \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}} \operatorname{arctanh}\sqrt{۱ - x^۲} \ ; x < ۱ \end{cases}$$

ه) اکنون تابعیت چگالی سطحی را بدست آورید.

سوال ۴) اختلال + نیروی‌لورنتز (۱۲۰ نمره)

مشاهدات و بررسی های انجام شده در کهکشان های مارپیچ نشان می دهند که میدان مغناطیسی ای با منشا نامعلوم در این کهکشان ها وجود دارد؛ در این سوال قصد داریم به تاثیر این نیرو در حرکت ابر های هیدروژنی غیر خنثی بپردازیم.

یک ابر هیدروژنی غیر خنثی با جرم m و بار Q در نظر بگیرید؛ در ابتدا این ابر در یک مدار دایروی به شعاع $R.$ منطبق بر صفحه کهکشان در حال حرکت با سرعت زاویه ای $\Omega.$ بوده است، فرم پتانسیل کهکشان به صورت زیر می باشد :

$$\phi(R) = v_c^{۲} \ln(R^{۲} + R_c^{۲} + \frac{z^{۲}}{q^{۲}})$$

که R_c و q و v_c ثابت هستند و R و z مولفه های دستگاه استوانه ای هستند. اگر کهکشان یک میدان مغناطیسی یکنواخت به صورت $\vec{B} = B.\ \hat{z}$ داشته باشد، علاوه بر نیروی گرانش نیروی لورنتز به فرم $\vec{F}_L = Q\ \vec{v} \times \vec{B}$ نیز روی ابر تاثیر می گذارد.

الف) سرعت زاویه ای حرکت دایره ای $\Omega.$ را بدست آورید.

ب) نشان دهید در صورت اعمال یک اختلال شعاعی به ابر، حرکت نوسانی انجام خواهد داد؛ فرکانس این نوسان را بیابید.

ج) فرض کنید همانطور که ابر در حال حرکت دایره ای بود ناگهان متوقف شود، سرعت سقوط آن را برحسب فاصله از مرکز $v_{ff}(R)$ بدست آورید.

سوال ۵) $Galactic\ Cannibalism$ (۱۲۰ نمره)

در این سوال می‌خواهیم بلعیده شدن یک کهکشان کوتوله توسط کهکشان میزبان به‌دلیل اصطکاک دینامیکی را بررسی کنیم. به‌دلیل نیروهای کشندی ناشی از کهکشان میزبان ستاره‌های کهکشان کوتوله از آن کنده می‌شوند و از قید گرانش آن می‌گریزند، پس جرم کهکشان کوتوله با گذشت زمان تغییر می‌کند. می‌توان به‌جای ازدست رفتن جرم فرض کرد که چگالی کهکشان کوتوله ثابت است، و شعاع آن تغییر می‌کند. شعاع کهکشان کوتوله را مساوی با شعاع ژاکوبی (شعاع روچ) آن درنظر می‌گیریم.

الف) دو جرم نقطه‌ای m و M را درنظر بگیرید، که حول مرکز جرم‌شان در مدار دایروی حرکت می‌کنند. فاصله این دو جرم از یکدیگر برابر d است. فرض کنید جرم بسیار کوچک μ که اثری بر روی مدار m و M نمی‌گذارد، در فاصله x از m بر روی خط واصل m و M قرار گرفته است. معادله‌ای به شکل $f(x,d,m,M) = ۰$ بنویسید، به‌طوری که اگر برقرار باشد، μ بر روی خط واصل m و M باقی بماند.

ب) بافرض این‌که $\frac{m}{M} \ll ۱$ و $\frac{x}{d} \ll ۱$ باشد، معادله بخش قبل را تا مرتبه اول نسبت به $\frac{m}{M}$ و $\frac{x}{d}$ ساده کنید و نشان‌دهید شعاع ژاکوبی جرم m از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$r_{j,m} = \left(\frac{m}{۳M}\right)^{\frac{۱}{۳}} d$$

فرض کنید نیروی اصطکاک دینامیکی وارد بر جرم M هنگام حرکت در توزیعی با چگالی ρ به‌شکل:

$$\vec{f}_d = -\frac{۴\pi \ln(\Lambda)\, G^۲ M^۲ \rho}{v_M^۲}\left(\mathrm{erf}(X) - \frac{۲}{\sqrt{\pi}} X e^{-X^۲}\right)\hat{v}_M$$

باشد. Λ یک ثابت مربوط به سیستم و $X \equiv \frac{v_M}{\sqrt{۲}\sigma}$ است، که در آن $\sqrt{۲}\sigma$ سرعت حرکت در مدار دایروی در پتانسیل ناشی از توزیع ρ می‌باشد. $\mathrm{erf}(X)$ تابع خطا (پاسخ یک انتگرال غیرقابل حل) است.

ج) طبق نتایج رصدی، کهکشان‌ها منحنی سرعت حرکت دایره‌ای تخت شده دارند. باتوجه به این، رابطه‌ای برای تابعیت چگالی کهکشان کوتوله و میزبان به‌دست آورید. ضمنا برای کهکشان کوتوله تعریف کنید: $\sigma_{sat} \equiv \frac{v_c}{\sqrt{۲}}$ و کهکشان میزبان: $\sigma_{GLX} \equiv \frac{v_c'}{\sqrt{۲}}$ که v_c سرعت حرکت در مدار دایروی در کهکشان کوتوله و v_c' سرعت حرکت در مدار دایروی در کهکشان میزبان است.

در ادامه حل سوال فرض کنید: ۱) کهکشان کوتوله به صورت یک جرم نقطه‌ای با جرم متغیر رفتار می‌کند. ۲) کهکشان کوتوله در هر لحظه در مداری دایروی در پتانسیل ناشی از کهکشان میزبان حرکت می‌کند. فاصله کهکشان کوتوله از مرکز کهکشان میزبان را r تعریف کنید.

د) رابطه‌ای برای گشتاور وارد بر کهکشان کوتوله ناشی از اصطکاک دینامیکی بدست آورید.

ه) رابطه‌ای برای جرم کهکشان کوتوله برحسب r بدست آورید.

و) باتوجه به نتایج قسمت قبل، رابطه‌ای برای مدت زمان سقوط کهکشان کوتوله به‌دست آورید.

ز) اگر $\Lambda \approx \frac{R_{GLX} v_M^۲}{۲GM}$ باشد، مدت زمان سقوط LMC را تخمین بزنید. ($\sigma_{GLX} = ۱۵۰\ \frac{km}{s}$, $\sigma_{sat} = ۳۰۰\ \frac{km}{s}$)

سوال ۶) زاویه انحراف (۱۲۰ نمره)

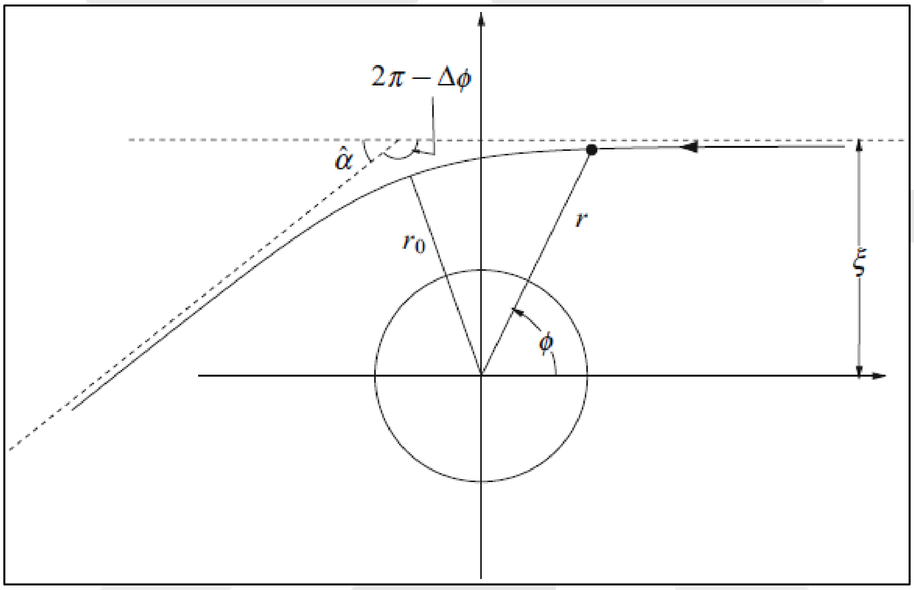
فضا زمان در نزدیکی اجرام سنگین به وسیله متریک شوارتزشیلد توصیف می شود :

$$ds^۲ = \left(۱ - \frac{۲GM}{c^۲r}\right)c^۲dt^۲ - \left(۱ - \frac{۲GM}{c^۲r}\right)^{-۱} dr^۲ - r^۲(d\theta^۲ + \sin^۲(\theta)\, d\phi^۲)$$

نظریه نسبیت عام نشان می دهد که پتانسیل موثر یک جسم در نزدیکی جرم M به شکل زیر است :

$$\Phi_{eff} = -\frac{GML^۲}{c^۲r^۳} + \frac{L^۲}{۲r^۲} - \frac{GM}{r}$$

اما برای نور این رابطه متفاوت است، یکی از دلایل این تفاوت آن است که ناظر در مجاورت جرم سنگین تجربه متفاوتی از زمان خواهد داشت که به این زمان، زمان ارجح گفته می شود اما یک ذره بی جرم (مانند فوتون) درکی از زمان ارجح نخواهد داشت.



این معادلات برای نور به صورت زیر خواهند بود :

$$\dot{r}^۲ = \frac{\epsilon^۲}{c^۲} - \frac{L^۲}{r^۲}\left(۱ - \frac{R_s}{r}\right)$$

$$\Phi_{eff} = -\frac{GML^۲}{c^۲r^۳} + \frac{L^۲}{۲r^۲}$$

همانطور که ملاحظه می کنید در رابطه پتانسیل موثر برای فوتون جمله مربوط به مکانیک نیوتونی حذف شده است.

اکنون با توجه به توضیحات داده شده و با استفاده از پایستگی تکانه زاویه ای، زاویه انحراف $\hat{\alpha}$ را به دست آورید.

راهنمایی : برای محاسبه انتگرال از بسط تیلور استفاده کنید.

پیوست: تابع خطا ($error\ function$)

تعریف تابع خطا ($error\ function$):

$$\mathrm{erf}(X) \equiv \frac{۲}{\sqrt{\pi}} \int_{۰}^{X} e^{-x^{۲}} dx$$

اما این انتگرال حل تحلیلی ندارد. در ادامه پاسخ آن برای مقادیر مختلف X نوشته شده‌است.

$\mathbf{erf}(X)$	X	$\mathbf{erf}(X)$	X	$\mathbf{erf}(X)$	X
۰	۰	۰.۶۷۷۸	۰.۷	۰.۹۸۹۱	۱.۸
۰.۰۲۲۶	۰.۰۲	۰.۷۴۲۱	۰.۸	۰.۹۹۲۸	۱.۹
۰.۰۴۵۱	۰.۰۴	۰.۷۹۶۹	۰.۹	۰.۹۹۵۳	۲
۰.۰۶۷۶	۰.۰۶	۰.۸۴۲۷	۱	۰.۹۹۷	۲.۱
۰.۰۹۰۱	۰.۰۸	۰.۸۸۰۲	۱.۱	۰.۹۹۸۱	۲.۲
۰.۱۱۲۵	۰.۱	۰.۹۱۰۳	۱.۲	۰.۹۹۸۹	۲.۳
۰.۲۲۲۷	۰.۲	۰.۹۳۴	۱.۳	۰.۹۹۹۳	۲.۴
۰.۳۲۸۶	۰.۳	۰.۹۵۲۳	۱.۴	۰.۹۹۹۶	۲.۵
۰.۴۲۸۴	۰.۴	۰.۹۶۶۱	۱.۵	۱	۳
۰.۵۲۰۵	۰.۵	۰.۹۷۶۳	۱.۶	۱	۳.۵
۰.۶۰۳۹	۰.۶	۰.۹۸۳۸	۱.۷	۱	∞

با آرزوی موفقیت

چهاردهمین تیم ملی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

به نام او که تنها او حق است و باقی همه جوب!

پاسخنامه دومین آزمون آزمایشی

المپیاد نجوم و اخترفیزیک

کسری حاجیان

پرشان جوانرود

سوال ۱) توزیع ستارگان در کهکشان [پرشان جوانرود]

با توجه به فرم چگالی تعداد، چگالی جرمی و چگالی درخشندگی اینگونه بدست می آیند :

$$n(S,z,R) = n(S,\cdot,\cdot)e^{-\frac{z}{h_z}}e^{-\frac{R}{h_R}}$$

$$\rho(S,z,R) = M_S n(S,\cdot,\cdot)e^{-\frac{z}{h_z}}e^{-\frac{R}{h_R}}$$

$$j(S,z,R) = L_S n(S,\cdot,\cdot)e^{-\frac{z}{h_z}}e^{-\frac{R}{h_R}}$$

چگالی سطحی به صورت زیر محاسبه می شود :

$$\Sigma(S,R) = ۲\int_{\cdot}^{+\infty}\rho(S,z,R)dz = ۲M_S n(S,\cdot,\cdot)e^{-\frac{R}{h_R}}\int_{\cdot}^{+\infty} e^{-\frac{z}{h_z}}\,dz$$

$$\int_{\cdot}^{+\infty} e^{-x}dx = ۱$$

$$\Rightarrow \Sigma(S,R) = ۲M_S h_z n(S,\cdot,\cdot)e^{-\frac{R}{h_R}}$$

با توجه به نمودار برای ستارگان نوع A یک ضابطه می تواند تابع را توصیف کند، اما برای ستارگان G,K به منظور افزایش دقت بهتر است که تابع را دو ضابطه ای کنیم :

در صورتی که چگالی تعداد همانند ستارگان نوع G,K دو ضابطه ای باشد داریم :

$$n(S,z,R) = \begin{cases} n_۱(S,\cdot,\cdot)e^{-\frac{R}{h_R}}e^{-\frac{z}{h_{z_۱}}};\ \cdot < z < z_t \\ n_۲(S,\cdot,\cdot)e^{-\frac{R}{h_R}}e^{-\frac{z}{h_{z_۲}}};\ z_t < z \end{cases}$$

$$\Sigma(S,R) = ۲M_S e^{-\frac{R}{h_R}}[n_۱(S,\cdot,\cdot)\int_{\cdot}^{z_t} e^{-\frac{z}{h_{z_۱}}}\,dz + n_۲(S,\cdot,\cdot)\int_{z_t}^{+\infty} e^{-\frac{z}{h_{z_۲}}}\,dz]$$

$$\int_{X_۱}^{X_۲} e^{-x}dx = -(e^{-x})_{X_۱}^{X_۲} = e^{-X_۱} - e^{-X_۲}$$

$$\Sigma(S,R) = ۲M_S e^{-\frac{R}{h_R}}[n_۱(S,\cdot,\cdot)h_{z_۱}(۱ - e^{-\frac{z_t}{h_{z_۱}}}) + n_۲(S,\cdot,\cdot)h_{z_۲}e^{-\frac{z_t}{h_{z_۲}}}]$$

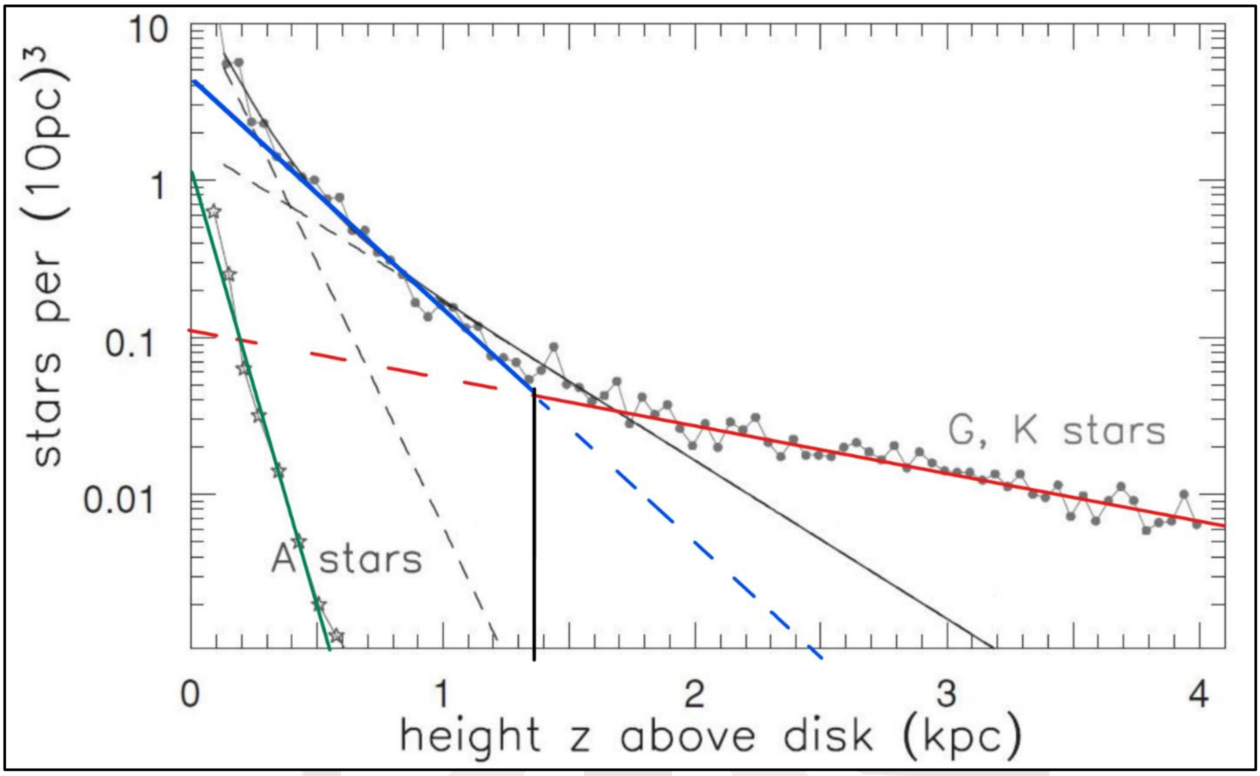
محاسبه روشنایی سطحی همانند چگالی سطحی است اما بجای جرم هر ستاره درخشندگی هر یک را ضرب می کنیم :

$$I(S,R) = ۲L_S h_z n(S,\cdot,\cdot)e^{-\frac{R}{h_R}}$$

$$I(S,R) = ۲L_S e^{-\frac{R}{h_R}}[n_۱(S,\cdot,\cdot)h_{z_۱}(۱ - e^{-\frac{z_t}{h_{z_۱}}}) + n_۲(S,\cdot,\cdot)h_{z_۲}e^{-\frac{z_t}{h_{z_۲}}}]$$

اکنون با استفاده از نمودار و برازش تقریبی خطوط بدست می آوریم :

$$\ln n(S,z,\cdot) = \ln n(S,\cdot,\cdot) - \frac{z}{h_z}$$



$$\Rightarrow type\ A: \begin{cases} n(S,\cdot,\cdot) \approx ۱.۱۴ \frac{۱}{(۱\cdot pc)^۳} \\ h_z \approx \cdot.۱۸\ kpc \end{cases}$$

$$\Rightarrow type\ G,K: \begin{cases} n_۱(G,K,\cdot,\cdot) \approx ۴.۲۶ \frac{۱}{(۱\cdot pc)^۳} \\ h_{z_۱} \approx \cdot.۶۸\ kpc \\ \cdot < z < ۱.۳۶\ kpc \end{cases}, \begin{cases} n_۲(G,K,\cdot,\cdot) \approx \cdot.۱۱ \frac{۱}{(۱\cdot pc)^۳} \\ h_{z_۲} \approx ۳.۳\cdot\ kpc \\ z > ۱.۳۶\ kpc \end{cases}$$

با توجه به راهنمایی و با فرض اینکه تعداد ستارگان هر نوع تابعی از جرم و درخشندگی آن نیست، جرم و درخشندگی میانگین ستارگان را برای هر نوع بدست می آوریم :

$$type\ A: \ \cdot.۷ < M_V < ۲.۵ \Rightarrow ۴\cdot.۵۵ > \frac{L}{L_\odot} > ۷.۷۳\ , ۳.۴۴ > \frac{M}{M_\odot} > ۱.۹۸ \Rightarrow \begin{cases} \overline{M}_A = ۲.۷۱\ M_\odot \\ \overline{L}_A = ۲۴.۱۴\ L_\odot \end{cases}$$

$$type\ K\ and\ G\ stars: ۵ < M_V < ۶ \Rightarrow \cdot.۷۷ > \frac{L}{L_\odot} > \cdot.۳۱, \cdot.۹۲ > \frac{M}{M_\odot} > \cdot.۶۸$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{M}_{G,K} = \cdot.۸\cdot\ M_\odot \\ \overline{L}_{G,K} = \cdot.۵۴\ L_\odot \end{cases}$$

همانطور که پیش تر مشاهده کردیم چگالی سطحی و روشنایی سطحی بدین صورت است :

$$\Sigma(S,R) = \Sigma_.(S)e^{-\frac{R}{h_R}}$$

$$I(S,R) = I_.(S)e^{-\frac{R}{h_R}}$$

$$type\ A: \begin{cases} \Sigma_.(A) = ۲\bar{M}_A n(A,۰,۰)h_z = ۱۱۱.۷۵\dfrac{M_\odot}{(۱۰pc)^۲} \\ I_.(A) = ۲\bar{L}_A n(A,۰,۰) = ۹۹۶.۷۶\dfrac{L_\odot}{(۱۰pc)^۲} \end{cases}$$

$$type\ G,K:$$

$$\begin{cases} \Sigma_.(G,K) = ۲\bar{M}_{G,K}\left[n_۱(G,K,۰,۰)h_{z_۱}\left(۱-e^{-\frac{z_t}{h_{z_۱}}}\right)+n_۲(G,K,۰,۰)h_{z_۲}e^{-\frac{z_t}{h_{z_۲}}}\right] = ۴۳۶.۸۷\dfrac{M_\odot}{(۱۰pc)^۲} \\ I_.(G,K) = ۲\bar{L}_{G,K}\left[n_۱(G,K,۰,۰)h_{z_۱}\left(۱-e^{-\frac{z_t}{h_{z_۱}}}\right)+n_۲(G,K,۰,۰)h_{z_۲}e^{-\frac{z_t}{h_{z_۲}}}\right] = ۲۹۶.۳۳\dfrac{L_\odot}{(۱۰pc)^۲} \end{cases}$$

اکنون با انتگرال گیری مجدد جرم و درخشندگی کل را بدست می آوریم :

$$\Sigma_{tot}(R) = \Sigma(A,R)+\Sigma(G,K,R) = (\Sigma_.(A)+\Sigma_.(G,K))e^{-\frac{R}{h_R}}$$

$$I_{tot}(R) = I(A,R)+I(G,K,R) = (I_.(G,K)+I_.(A)e^{-\frac{R}{h_R}}$$

$$M_{tot} = \int_.^\infty ۲\pi R\Sigma_{tot}(R)\,dR = ۲\pi(\Sigma_.(A)+\Sigma_.(G,K))\int_.^\infty Re^{-\frac{R}{h_R}}\,dR$$

$$L_{tot} = \int_.^\infty ۲\pi RI_{tot}(R)\,dR = ۲\pi(I_.(A)+I_.(G,K))\int_.^\infty Re^{-\frac{R}{h_R}}\,dR$$

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x}+\int e^{-x}dx = -e^{-x}(x+۱) \Rightarrow \int_.^\infty xe^{-x}dx = ۱$$

$$M_{tot} = ۲\pi\big(\Sigma_.(A)+\Sigma_.(G,K)\big)h_R^۲$$

$$L_{tot} = ۲\pi(I_.(A)+I_.(G,K))h_R^۲$$

$$\Rightarrow M_{tot} = ۵.۵۲\times ۱۰^۸ M_\odot\ , L_{tot} = ۱.۳۰\times ۱۰^۹ L_\odot$$

و نسبت جرم درخشندگی بدین صورت خواهد بود :

$$Y = \frac{M_{tot}}{L_{tot}} = ۰.۴۲$$

سوال ۲) دونات خودمه! [کسری حاجیان]

الف) با توجه به دیفرانسیلی بودن db:

$$dV = S\,db$$

$$dN = n\,dV = \boxed{n\,S\,db}$$

ب) معادله دایره‌ای با مرکز برروی صفحه xy وصفحه دایره عمود بر آن و فاصله r_C از مرکز:

$$\boxed{\left(\sqrt{x^۲ + y^۲} - r_C\right)^۲ + z^۲ = b^۲}$$

ج) می‌دانیم گرادیان تابع یک سطح در هر نقطه عمود برآن سطح است:

$$f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^۲ + y^۲} - r_C\right)^۲ + z^۲ - b^۲ = ۰$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

$$\Rightarrow \nabla f = \frac{۲\left(\sqrt{x^۲ + y^۲} - r_C\right)x}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}\hat{\imath} + \frac{۲\left(\sqrt{x^۲ + y^۲} - r_C\right)y}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}\hat{\jmath} + ۲z\,\hat{k}$$

بردار یکه عمود برسطح بردار یکه جهت گرادیان است:

$$|\nabla f| = \sqrt{\nabla f \cdot \nabla f} = \sqrt{\left(\frac{۲\left(\sqrt{x^۲ + y^۲} - r_C\right)x}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}\right)^۲ + \left(\frac{۲\left(\sqrt{x^۲ + y^۲} - r_C\right)y}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}\right)^۲ + (۲z)^۲}$$

$$|\nabla f| = \sqrt{\frac{۴\left(\sqrt{x^۲ + y^۲} - r_C\right)^۲}{(x^۲ + y^۲)}(x^۲ + y^۲) + ۴z^۲}$$

همچنین با توجه به معادله دونات:

$$\Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{۴\left(\left(\sqrt{x^۲ + y^۲} - r_C\right)^۲ + z^۲\right)} = \sqrt{۴b^۲} = ۲b$$

پس بردار یکه:

$$\hat{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \boxed{\frac{\left(\sqrt{x^۲ + y^۲} - r_C\right)}{b\sqrt{x^۲ + y^۲}}(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) + \frac{z}{b}\hat{k}}$$

د) اگر dS المان سطح روی دونات باشد و dA المان مساحت در دستگاه دکارتی:

$$dA = dxdy\,\hat{k}$$

$$dA = dS\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \hat{n}\cdot\hat{k} = \frac{z}{b}$$

$$S = \int dS = \int \frac{dA}{\cos(\theta)} = \iint \frac{dxdy}{{}^{z}\!/_{b}}$$

طبق معادله دونات:

$$z = \pm\sqrt{b^{۲} - \left(\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} - r_C\right)^{۲}}$$

چون به ازای هر المان مساحت dA دو المان dS یکی در پایین و یکی در بالای dA وجود دارد. $\cos(\theta)$ چون برای یکی منفی می‌شود، پس از انتگرال‌گیری جواب انتگرال صفر می‌شود، برای جلوگیری از این اتفاق و به‌دلیل تقارن مسئله انتگرال را فقط برای مقدار مثبت z می‌نویسیم و در آن ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \boxed{S = ۲\int_{y=-(r_C+b)}^{y=+(r_C+b)}\int_{x=-(r_C+b)}^{x=+(r_C+b)} \frac{۱}{\sqrt{۱ - \frac{\left(\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} - r_C\right)^{۲}}{b^{۲}}}}\,dxdy}$$

ه) باتوجه به راهنمایی سوال طبق تبدیل دستگاه دکارتی به قطبی داریم:

$$dxdy = RdR\,d\phi \qquad ,\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} = R$$

$$\Rightarrow S = ۲\int_{\phi=۰}^{\phi=۲\times\pi}\int_{R=(r_C-b)}^{R=(r_C+b)} \frac{RdR\,d\phi}{\sqrt{۱ - \frac{(R-r_C)^{۲}}{b^{۲}}}}$$

$$\Rightarrow S = ۴\pi\int_{(r_C-b)}^{(r_C+b)} \frac{RdR}{\sqrt{۱ - \frac{(R-r_C)^{۲}}{b^{۲}}}}$$

حال از تغییرمتغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{R - r_C}{b} = u \Rightarrow dR = bdu$$

$$\Rightarrow S = ۴\pi\int_{-۱}^{+۱} \frac{(r_C + bu)\,b\,du}{\sqrt{۱ - u^{۲}}}$$

$$\Rightarrow S = ۴\pi\left(\int_{-۱}^{+۱}\frac{r_C b\, du}{\sqrt{۱-u^۲}} + \int_{-۱}^{+۱}\frac{b^۲\, udu}{\sqrt{۱-u^۲}}\right)$$

و اما جواب انتگرال اول:

$$r_C b\int_{-۱}^{+۱}\frac{du}{\sqrt{۱-u^۲}} = r_C b\ \sin^{-۱}(u) = r_C b\ \left(\frac{\pi}{۲}-\left(-\frac{\pi}{۲}\right)\right) = \pi r_C b$$

و انتگرال دوم:

$$۱-u^۲ = x \Rightarrow udu = \frac{dx}{۲}$$

$$\Rightarrow \int_{-۱}^{+۱}\frac{b^۲\, udu}{\sqrt{۱-u^۲}} = \frac{b^۲}{۲}\int_{۰}^{۰} x^{-\frac{۱}{۲}}\, dx = ۰$$

پس مساحت دونات:

$$\Rightarrow S = ۴\pi(\pi r_C b + ۰)$$

$$\Rightarrow \boxed{S = ۴\pi^۲ r_C b = (۲\pi r_C)(۲\pi b)}$$

به رابطه «محیط دایره مرکز دایره دوران یافته» ضربدر «محیط دایره دوران یافته» رسیدیم.

و) المان حجم مساوی سطح دونات با شعاع دایره داخلی x در ضخامت ناچیز dx است:

$$dV = S(x)\, dx = ۴\pi^۲ r\, xdx$$

$$V = \int_{۰}^{R} ۴\pi^۲ r\, xdx$$

$$\Rightarrow \boxed{V = ۲\pi^۲ r R^۲ = (۲\pi r)(\pi R^۲)}$$

به رابطه «مساحت دایره مرکز دایره دوران یافته» ضربدر «محیط دایره دوران یافته» رسیدیم.

ز) با توجه به زاویه طی شده توسط ستاره:

$$dN = n\, dV \quad , dV = S\, db$$

$$S_{donut} = \Delta\phi\ ۲\pi b r_C \quad , \Delta\phi = \frac{v\Delta t}{r_C}$$

$$\Rightarrow \boxed{dN_{donut} = n\ v\Delta t\ ۲\pi b\ db}$$

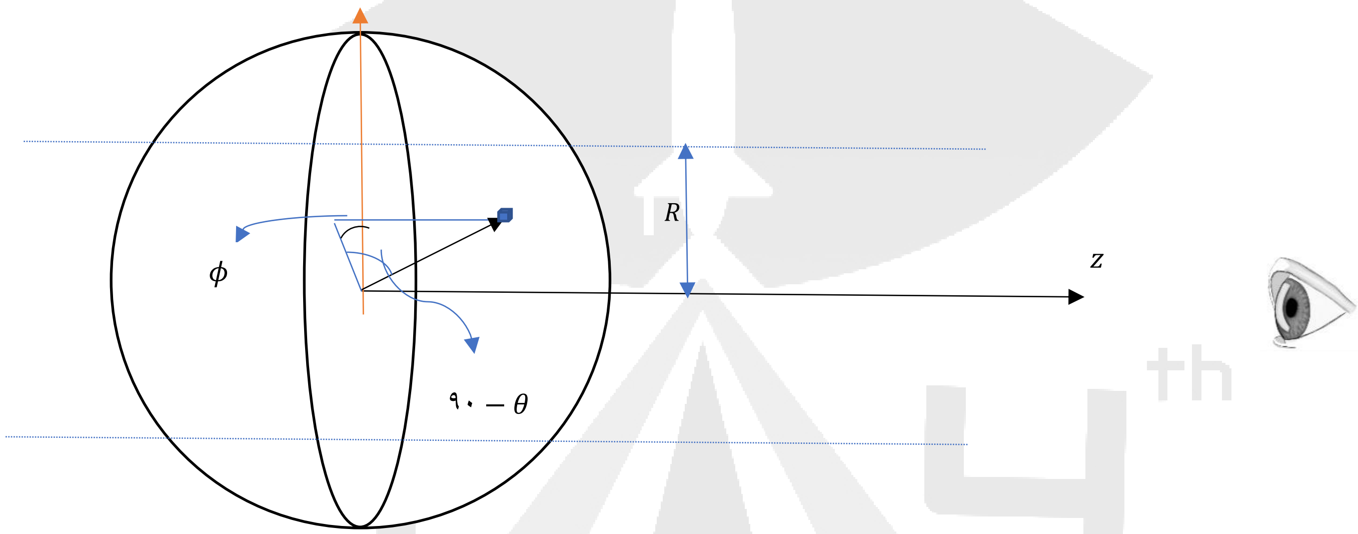
که این دقیقا برابر تعداد برخورد به‌دست آمده با درنظر گرفتن المان استوانه‌ای است. در واقع چون مساحت دوناتی با شعاع دایره داخلی R و فاصله از مرکز r برابر مساحت استوانه‌ای با شعاع قاعده R و ارتفاع $۲\pi r$ می‌باشد، هیچ تفاوتی میان این دو المان وجود ندارد.

سوال ۳) $\boldsymbol{NFW}$ [پرشان جوانرود]

تلاش می کنیم تا تابعیت چگالی سطحی را بدست آوریم :

$$\Sigma(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_s}{\left(\frac{\sqrt{R^۲+z^۲}}{r_s}\right)\left(۱+\frac{\sqrt{R^۲+z^۲}}{r_s}\right)^۲} dz$$

محاسبه انتگرال بالا بسیار دشوار است به همین دلیل از روش مطرح شده در قسمت ب استفاده می کنیم.



$$M_{۲D} = \int \rho(\vec{r})\, d^۳r = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{+\frac{\pi}{۲}} \int_۰^{\frac{R}{\sin\theta}} \int_۰^{۲\pi} \rho(r) r^۲ \sin\theta\, d\phi\, dr\, d\theta$$

$$M_{۲D} = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{+\frac{\pi}{۲}} \int_۰^{\frac{R}{\sin\theta}} ۲\pi r^۲ \rho(r) dr \sin\theta\, d\theta$$

$$\int_۰^{\frac{R}{\cos\theta}} ۲\pi r^۲ \rho(r) dr = \frac{۱}{۲}\int_۰^{\frac{R}{\sin\theta}} ۴\pi r^۲ \rho(r) dr = \frac{۱}{۲} M_{۳D}\left(\frac{R}{\sin\theta}\right)$$

$$\Rightarrow M_{۲D} = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{+\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{۲} M_{۳D}\left(\frac{R}{\sin\theta}\right) \sin\theta\, d\theta = \int_۰^{+\frac{\pi}{۲}} M_{۳D}\left(\frac{R}{\sin\theta}\right) \sin\theta\, d\theta$$

$$u = \cos\theta \Rightarrow du = \sin\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \int_۰^{+\frac{\pi}{۲}} M_{۳D}\left(\frac{R}{\sin\theta}\right) \sin\theta\, d\theta = -\int_۱^۰ M_{۳D}\left(\frac{R}{\sqrt{۱-u^۲}}\right) du$$

$$\boldsymbol{M_{2D} = \int_0^1 M_{3D}\left(\frac{R}{\sqrt{1-u^2}}\right) du}$$

$$M_{۳D}(r) = \int_۰^r ۴\pi r^۲ \rho(r')dr' \xrightarrow{x\equiv\frac{r'}{r_s}} = ۴\pi r_s^۳ \rho_s \int_۰^X \frac{x}{(۱+x)^۲}dx$$

$$\frac{x}{(۱+x)^۲} = \frac{۱+x}{(۱+x)^۲} - \frac{۱}{(۱+x)^۲} = \frac{۱}{۱+x} - \frac{۱}{(۱+x)^۲}$$

$$\Rightarrow \int_۰^X \frac{x}{(۱+x)^۲}dx = \int_۰^X \frac{dx}{۱+x} - \int_۰^X \frac{dx}{(۱+x)^۲} = \ln(۱+X) - \left(۱ - \frac{۱}{۱+X}\right)$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow M_{3D}(r) = 4\pi r_s^3 \rho_s \left[\ln\left(1+\frac{r}{r_s}\right) - \frac{\frac{r}{r_s}}{1+\frac{r}{r_s}}\right]}$$

اکنون باید در عبارت بالا به جای r بگذاریم $\frac{R}{\sqrt{۱-u^۲}}$ و سپس روی u از ۰ تا ۱ انتگرال بگیریم.

$$M_{۲D} = ۴\pi r_s^۳ \rho_s \int_۰^۱ [\ln(۱+\frac{\frac{R}{r_s}}{\sqrt{۱-u^۲}}) - \frac{\frac{\frac{R}{r_s}}{\sqrt{۱-u^۲}}}{۱+\frac{\frac{R}{r_s}}{\sqrt{۱-u^۲}}}]du$$

$$\frac{R}{r_s} \equiv a\,, A \equiv \int [\ln\left(۱+\frac{a}{\sqrt{۱-u^۲}}\right) - \frac{\frac{a}{\sqrt{۱-u^۲}}}{۱+\frac{a}{\sqrt{۱-u^۲}}}]du$$

$$B = \int \ln\left(۱+\frac{a}{\sqrt{۱-u^۲}}\right)du \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} = u\ln\left(۱+\frac{a}{\sqrt{۱-u^۲}}\right) - \int u\, d\left(\ln\left(۱+\frac{a}{\sqrt{۱-u^۲}}\right)\right)$$

$$\frac{d}{du}\left(\ln\left(۱+\frac{a}{\sqrt{۱-u^۲}}\right)\right) = \frac{au}{(۱-u^۲)\left(\sqrt{۱-u^۲}+a\right)}$$

$$\Rightarrow B = u\ln\left(۱+\frac{a}{\sqrt{۱-u^۲}}\right) - \int \frac{au^۲}{(۱-u^۲)\left(\sqrt{۱-u^۲}+a\right)}du$$

$$\Rightarrow A = u\ln\left(۱+\frac{a}{\sqrt{۱-u^۲}}\right) - \int \frac{au^۲}{(۱-u^۲)\left(\sqrt{۱-u^۲}+a\right)}du - \int \frac{a}{\sqrt{۱-u^۲}+a}du$$

از ترکیب دو جمله پایانی بدست می آوریم :

$$-\int \frac{au^۲}{(۱-u^۲)\left(\sqrt{۱-u^۲}+a\right)}du - \int \frac{a}{\sqrt{۱-u^۲}+a}du = -\int \frac{a}{\sqrt{۱-u^۲}+a}\left(۱+\frac{u^۲}{۱-u^۲}\right)du$$

$$= -\int \frac{a}{(1-u^2)\left(\sqrt{1-u^2}+a\right)}du$$

$$\Rightarrow A = u\ln\left(1+\frac{a}{\sqrt{1-u^2}}\right) - \int \frac{a}{(1-u^2)\left(\sqrt{1-u^2}+a\right)}du$$

اکنون انتگرال جمله دوم را در دو مرحله محاسبه می کنیم :

$$C = \int \frac{a}{(1-u^2)\left(\sqrt{1-u^2}+a\right)}du \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} u = \tanh y \;, du = \frac{dy}{\cosh^2 y} \;, 1-u^2 = \frac{1}{\cosh^2 y}$$

$$C = a\int \frac{\frac{dy}{\cosh^2 y}}{\frac{1}{\cosh^2 y}\left(\frac{1}{\cosh y} - a\right)} = \int \frac{\mathrm{a}\cosh y}{1+a\cosh y}dy$$

$$\frac{\mathrm{a}\cosh y}{1+a\cosh y} = \frac{1+a\cosh y}{1+a\cosh y} - \frac{1}{1+a\cosh y} = 1 - \frac{1}{1+a\cosh y}$$

$$\Rightarrow C = \int (1 - \frac{1}{1+a\cosh y})dy = y - \int \frac{dy}{1+a\cosh y}$$

$$D = \int \frac{dy}{1+a\cosh y}$$

حال از یک اتحاد برای توابع هایپربولیکی استفاده می کنیم :

$$\cosh(t+z) = \cosh t \cosh z + \sinh t \sinh z$$

$$\Rightarrow \cosh y = \cosh^2\frac{y}{2} + \sinh^2\frac{y}{2} = 2\cosh^2\frac{y}{2} - 1$$

$$\cosh^2\frac{y}{2} = \frac{1}{1-\tanh^2\frac{y}{2}} \Rightarrow \cosh y = \frac{1+\tanh^2\frac{y}{2}}{1-\tanh^2\frac{y}{2}}$$

نتایج بدست آمده را در انتگرال جاگذاری و ساده سازی انجام میدهیم :

$$D = \int \frac{\left(1-\tanh^2\frac{y}{2}\right)dy}{1-\tanh^2\frac{y}{2} + a + a\tanh^2\frac{y}{2}} = \int \frac{\mathrm{sech}^2\frac{y}{2}dy}{(1+a)-(1-a)\tanh^2\frac{y}{2}}$$

محاسبه انتگرال بالا برای مقادیر مختلف a متفاوت است :

$$a < 1 : D = \int \frac{\mathrm{sech}^2\frac{y}{2}dy}{(1+a)-(1-a)\tanh^2\frac{y}{2}} = \frac{1}{1+a}\int \frac{\mathrm{sech}^2\frac{y}{2}dy}{1-\frac{(1-a)}{(1+a)}\tanh^2\frac{y}{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \sqrt{\frac{(۱-a)}{(۱+a)}}\tanh\frac{y}{۲} = r\,,dr = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{(۱-a)}{(۱+a)}}\operatorname{sech}^{۲}\frac{y}{۲}dy$$

$$\Rightarrow D = \frac{۲}{\sqrt{۱-a^{۲}}}\int\frac{dr}{۱-r^{۲}}$$

$$\int\frac{dr}{۱-r^{۲}} = \operatorname{arctanh} r \Rightarrow \boldsymbol{D = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\ \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{(1-a)}{(1+a)}}\tanh\left(\frac{\operatorname{arctanh} u}{2}\right)\right)\ \{a<1\}}$$

$$a>۱ : D = \int\frac{\operatorname{sech}^{۲}\frac{y}{۲}dy}{(۱+a)+(a-۱)\tanh^{۲}\frac{y}{۲}} = \frac{۱}{۱+a}\int\frac{\operatorname{sech}^{۲}\frac{y}{۲}dy}{۱+\frac{(a-۱)}{(۱+a)}\tanh^{۲}\frac{y}{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \sqrt{\frac{(a-۱)}{(۱+a)}}\tanh\frac{y}{۲} = r\,,dr = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{(a-۱)}{(۱+a)}}\operatorname{sech}^{۲}\frac{y}{۲}dy$$

$$\Rightarrow D = \frac{۲}{\sqrt{۱-a^{۲}}}\int\frac{dr}{۱+r^{۲}}$$

$$\int\frac{dr}{۱-r^{۲}} = \arctan r \Rightarrow \boldsymbol{D = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\ \arctan\left(\sqrt{\frac{(a-1)}{(1+a)}}\tanh\left(\frac{\operatorname{arctanh} u}{2}\right)\right)\ \{a>1\}}$$

$$a=۱ : D = \frac{۱}{۲}\int\operatorname{sech}^{۲}\frac{y}{۲}dy = \tanh\frac{y}{۲}\ \Rightarrow \boldsymbol{D = \tanh\left(\frac{\operatorname{arctanh} u}{2}\right)\ \{a=1\}}$$

نتایج بدست آمده را در انتگرال اصلی جاگذاری می کنیم :

$$\Rightarrow A = u\ln\left(۱+\frac{a}{\sqrt{۱-u^{۲}}}\right) - \operatorname{arctanh} u + D$$

هنگامی که میخواهیم حد ها را اعمال کنیم به یک مشکل بر می خوریم، در $u = ۱$ دو جمله اول و دوم عبارت بی نهایت می شوند، به همین منظور باید حد بگیریم، برای حد گرفتن عبارت فرم آن را با استفاده از یک اتحاد اندکی تغییر می دهیم :

* اثبات کنید :

$$\operatorname{arctanh} t = \frac{۱}{۲}\ln\frac{۱+t}{۱-t}$$

راه حل :

$$z = \operatorname{arctanh} t \Rightarrow\ t = \tanh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}} = \frac{e^{۲z}-۱}{e^{۲z}+۱} \Rightarrow t + te^{۲z} = e^{۲z} - ۱$$

$$\Rightarrow e^{۲z} = \frac{۱+t}{۱-t} \Rightarrow z = \frac{۱}{۲}\ln\frac{۱+t}{۱-t}$$

$$-\operatorname{arctanh} u = -\frac{١}{٢}\ln\frac{١ + u}{١ - u} = \ln\left(\frac{١ - u}{١ + u}\right)^{\frac{١}{٢}}$$

$$\Rightarrow u\ln\left(١ + \frac{a}{\sqrt{١ - u^{٢}}}\right) - \operatorname{arctanh} u = \ln[\frac{\left(\sqrt{١ - u^{٢}} + a\right)^{u}}{(١ - u)^{\frac{u}{٢}}(١ + u)^{\frac{u}{٢}}}\left(\frac{١ - u}{١ + u}\right)^{\frac{١}{٢}}]$$

$$= \ln[\left(\sqrt{١ - u^{٢}} + a\right)^{u}\frac{(١ - u)^{\frac{١-u}{٢}}}{(١ + u)^{\frac{١+u}{٢}}}]$$

$$A = \ln[\left(\sqrt{١ - u^{٢}} + a\right)^{u}\frac{(١ - u)^{\frac{١-u}{٢}}}{(١ + u)^{\frac{١+u}{٢}}}] + D$$

$u = ٠:$

$$\ln[\left(\sqrt{١ - u^{٢}} + a\right)^{u}\frac{(١ - u)^{\frac{١-u}{٢}}}{(١ + u)^{\frac{١+u}{٢}}}](u = ٠) = ٠$$

$$D_{a<١}(u = ٠) = ٠$$

$$D_{a>١}(u = ٠) = ٠$$

$$D_{a=١}(u = ٠) = ٠$$

$u = ١:$

$$\lim_{u\to ٠}(١ - u)^{\frac{١-u}{٢}} = ١ \Rightarrow \ln[\left(\sqrt{١ - u^{٢}} + a\right)^{u}\frac{(١ - u)^{\frac{١-u}{٢}}}{(١ + u)^{\frac{١+u}{٢}}}](u = ١) = \ln\frac{a}{٢}$$

$$\operatorname{arctanh} ١ = \infty \Rightarrow D_{a<١}(u = ١) = \frac{٢}{\sqrt{١ - a^{٢}}}\ \operatorname{arctanh}(\sqrt{\frac{(١ - a)}{(١ + a)}})$$

$$D_{a>١}(u = ١) = \frac{٢}{\sqrt{١ - a^{٢}}}\ \arctan(\sqrt{\frac{(a - ١)}{(١ + a)}})$$

$$D_{a=١}(u = ١) = ١$$

$$\Rightarrow A(۱)-A(۰)=\ln\frac{a}{۲}+\begin{cases}\dfrac{۲}{\sqrt{۱-a^{۲}}}\ \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\dfrac{(۱-a)}{(۱+a)}}\right);a<۱\\ \dfrac{۲}{\sqrt{۱-a^{۲}}}\ \arctan\left(\sqrt{\dfrac{(a-۱)}{(۱+a)}}\ ;a>۱\\ ۱\,;a=۱\end{cases}$$

اکنون قصد داریم تا عبارت های جمله دوم را مقداری ساده تر کنیم، به این منظور از اتحادی که اثبات کردیم استفاده می کنیم :

$$۲\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{(۱-a)}{(۱+a)}}\right)=\ln\frac{\sqrt{\frac{(۱-a)}{(۱+a)}}+۱}{۱-\sqrt{\frac{(۱-a)}{(۱+a)}}}=\ln\frac{\sqrt{۱+a}+\sqrt{۱-a}}{\sqrt{۱+a}-\sqrt{۱-a}}=\frac{۱}{۲}\ln\frac{۲+۲\sqrt{۱-a^{۲}}}{۲-۲\sqrt{۱-a^{۲}}}$$

$$\Rightarrow ۲\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{(۱-a)}{(۱+a)}}\right)=\frac{۱}{۲}\ln\frac{۱+\sqrt{۱-a^{۲}}}{۱-\sqrt{۱-a^{۲}}}=\operatorname{arctanh}\sqrt{۱-a^{۲}}$$

$$\Rightarrow\frac{۲}{\sqrt{۱-a^{۲}}}\ \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{(۱-a)}{(۱+a)}}\right)=\frac{۱}{\sqrt{۱-a^{۲}}}\operatorname{arctanh}\sqrt{۱-a^{۲}}$$

می توان با استفاده از عبارت بالا و با اعمال مقداری تغییر جمله مربوط به $a>۱$ را نیز اندکی ساده تر کرد.

* ثابت کنید :

$$\operatorname{arctanh}t'=i\arctan t'\ \left(i=\sqrt{-۱}\right)$$

راه حل :

$$z=\operatorname{arctanh}t\Rightarrow t=\tanh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}$$

$$z=ix\Rightarrow t=\tanh ix=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}$$

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x\Rightarrow e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}e^{ix}-e^{-ix}=۲i\sin x\\ e^{ix}+e^{-ix}=۲\cos x\end{cases}\Rightarrow t=i\tan x=\tanh z\Rightarrow x=-\arctan it=-iz=-i\operatorname{arctanh}t$$

$$\Rightarrow\arctan it=i\operatorname{arctanh}t$$

$$t=it'\Rightarrow-\arctan t'=i\operatorname{arctanh}it'\Rightarrow\boldsymbol{\operatorname{arctanh}it'=i\arctan t'}$$

برای ساده سازی عبارت مربوط به $a > ۱$ ابتدا نشان می دهیم :

$$\frac{۲}{\sqrt{۱-a^{۲}}}\ \text{arctanh}\left(\sqrt{\frac{(۱-a)}{(۱+a)}}\right)=\frac{۲}{\sqrt{a^{۲}-۱}}\text{arctan}\left(\sqrt{\frac{(۱-a)}{(۱+a)}}\right)$$

و سپس $\frac{۱}{\sqrt{۱-a^{۲}}}\text{arctanh}\sqrt{۱-a^{۲}}$ را تبدیل می کنیم.

$$\Rightarrow \sqrt{۱-a}=i\sqrt{a-۱}\,,\sqrt{۱-a^{۲}}=i\sqrt{a^{۲}-۱}$$

$$\frac{۲}{\sqrt{۱-a^{۲}}}\ \text{arctanh}\left(\sqrt{\frac{(۱-a)}{(۱+a)}}\right)=\frac{۲}{i\sqrt{a^{۲}-۱}}\text{arctanh}\left(i\sqrt{\frac{(۱-a)}{(۱+a)}}\right)=\frac{۲}{\sqrt{a^{۲}-۱}}\text{arctan}\left(\sqrt{\frac{(۱-a)}{(۱+a)}}\right)$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۱-a^{۲}}}\text{arctanh}\sqrt{۱-a^{۲}}=\frac{۱}{i\sqrt{a^{۲}-۱}}\text{arctanh}\,i\sqrt{a^{۲}-۱}=\frac{۱}{\sqrt{a^{۲}-۱}}\text{arctan}\sqrt{a^{۲}-۱}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{\sqrt{a^{۲}-۱}}\text{arctan}\left(\sqrt{\frac{(۱-a)}{(۱+a)}}\right)=\frac{۱}{\sqrt{a^{۲}-۱}}\text{arctan}\sqrt{a^{۲}-۱}$$

$$M_{۲D}(R)=۴\pi r_s^{۳}\rho_s\left(\ln\frac{R}{۲r_s}+F_{NFW}\left(\frac{R}{r_s}\right)\right)$$

$$F_{NFW}(x)=\begin{cases}\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}}\text{arctan}\sqrt{x^{۲}-۱}\ ;|x|>۱\\ ۱\ ;\ |x|=۱\\ \frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}\text{arctanh}\sqrt{۱-x^{۲}}\ ;|x|<۱\end{cases}$$

$$\Sigma(R)=\frac{dM_{۲D}}{dA}=\frac{۱}{۲\pi R}\frac{dM_{۲D}}{dR}$$

$$a\equiv\left(\frac{R}{r_s}\right)\Rightarrow\frac{dM_{۲D}}{dR}=\frac{dM_{۲D}}{da}\frac{۱}{r_s}$$

$$\frac{d}{da}\left(\ln\left(\frac{a}{۲}\right)\right)=\frac{۱}{a}$$

$a > ۱$:

$$\frac{d}{da}\left(\frac{۱}{\sqrt{a^{۲}-۱}}\text{arctan}\sqrt{a^{۲}-۱}\right)=-\frac{a}{a^{۲}-۱}F_{NFW}(a)+\frac{۱}{a\,(a^{۲}-۱)}$$

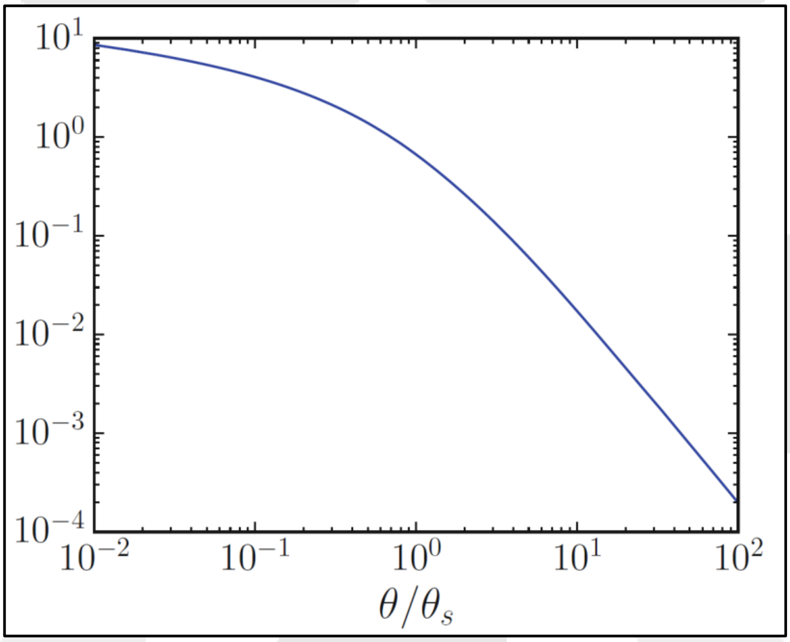
$$\Rightarrow \Sigma(R) = ۲\rho_s r_s \frac{۱ - F_{NFW}(\frac{R}{r_s})}{\left(\frac{R}{r_s}\right)^۲ - ۱}$$

$a < ۱$:

$$\frac{d}{da}\left(\frac{۱}{\sqrt{۱ - a^۲}} \operatorname{arctanh}\sqrt{۱ - a^۲}\right) = \frac{a}{۱ - a^۲} F_{NFW}(a) - \frac{۱}{a(۱ - a^۲)}$$

در حالت کلی $\Rightarrow \Sigma(R) = ۲\rho_s r_s \frac{۱ - F_{NFW}(\frac{R}{r_s})}{\left(\frac{R}{r_s}\right)^۲ - ۱}$

نمودار $\frac{\Sigma}{\rho_s r_s}$:



سوال ۴) اختلال + نیروی‌لورنتز [پرشان جوانرود]

نیروی لورنتز برای یک ذره باردار که روی صفحه کهکشان حرکت می کند را بدست می آوریم :

$$\vec{F}_L = Q\,\vec{v}\times\vec{B} = Q\begin{bmatrix}\hat{R} & \hat{\theta} & \hat{z}\\ \dot{R} & R\dot{\theta} & \cdot\\ \cdot & \cdot & B_{\cdot}\end{bmatrix} = QB_{\cdot}R\dot{\theta}\hat{R} - QB_{\cdot}\dot{R}\hat{\theta}$$

قانون دوم نیوتون را می نویسیم و شروط مدار دایروی را اعمال می کنیم :

$$\vec{a} = \vec{g} + \frac{\vec{F}_L}{m} = \left(g(R) + \frac{QB_{\cdot}}{m}R\dot{\theta}\right)\hat{R} + \left(-\frac{QB_{\cdot}}{m}\dot{R}\right)\hat{\theta}$$

$$R = R_{\cdot}\ ,\dot{\theta} = \Omega_{\cdot},\ddot{R} = \cdot \Rightarrow g(R_{\cdot}) + \frac{QB_{\cdot}}{m}R_{\cdot}\Omega_{\cdot} = -R_{\cdot}\Omega_{\cdot}^{۲}$$

$$\Rightarrow \Omega_{\cdot}^{۲} + \frac{QB_{\cdot}}{m}\Omega_{\cdot} + \frac{g(R_{\cdot})}{R_{\cdot}} = \cdot$$

معادله درجه دو را حل می کنیم و سرعت زاویه ای مدار دایروی را بدست می آوریم :

$$\Omega_{\cdot} = -\frac{QB_{\cdot}}{۲m} \pm \sqrt{\left(\frac{QB_{\cdot}}{۲m}\right)^{۲} - \frac{g(R_{\cdot})}{R_{\cdot}}} \quad \text{(الف)}$$

برای سادخ نویسی دو تعریف زیر را ارائه می دهیم :

$$\frac{QB_{\cdot}}{۲m} \equiv \omega_L\,, \sqrt{\left(\frac{QB_{\cdot}}{۲m}\right)^{۲} - \frac{g(R_{\cdot})}{R_{\cdot}}} \equiv \omega_{\cdot}$$

$$\Rightarrow \Omega_{\cdot} = \omega_{\cdot} - \omega_L$$

شتاب را در راستای مماسی می نویسیم و شرایط اولیه را اعمال می کنیم :

$$a_\theta = ۲\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta} = \frac{۱}{R}\frac{d}{dt}\left(R^{۲}\dot{\theta}\right) = -\frac{QB_{\cdot}}{m}\frac{dR}{dt}$$

$$\Rightarrow \int d\left(R^{۲}\dot{\theta}\right) = -\int \frac{QB_{\cdot}}{m}RdR \Rightarrow R^{۲}\dot{\theta} = -\frac{QB_{\cdot}}{۲m}R^{۲} + C$$

$$\Rightarrow R^{۲}\left(\dot{\theta} + \omega_L\right) = C$$

$$t = \cdot:\ \dot{\theta} = \Omega_{\cdot} \Rightarrow C = R_{\cdot}^{۲}(\Omega_{\cdot} + \omega_L) = R_{\cdot}^{۲}\omega_{\cdot}$$

اختلال شعاعی تا مرتبه اول :

$$R = R_{\cdot} + \delta R$$

$$\Rightarrow R^2(\dot\theta+\omega_L) = R_0^2\omega_0 \Rightarrow \dot\theta+\omega_L = \frac{R_0^2}{R^2}\omega_0 \approx \left(1-2\frac{\delta R}{R_0}\right)\omega_0 \Rightarrow \dot\theta = (\omega_0-\omega_L) - 2\omega_0\frac{\delta R}{R_0}$$

$$\Rightarrow \dot\theta = \Omega_0\left(1-2\frac{\omega_0}{\Omega_0}\frac{\delta R}{R_0}\right)$$

$$a_R = \ddot R - R\dot\theta^2 \approx \delta\ddot R - R_0\Omega_0^2\left(1+\frac{\delta R}{R_0}\right)\left(1-2\frac{\omega_0}{\Omega_0}\frac{\delta R}{R_0}\right)^2 = \delta\ddot R - R_0\Omega_0^2\left(1+\left(1-4\frac{\omega_0}{\Omega_0}\right)\frac{\delta R}{R_0}\right)$$

$$a_R = g(R)+\frac{QB_0}{m}R\dot\theta \approx g(R_0)+g'(R_0)\delta R + 2R_0\omega_L\Omega_0\left(1+\frac{\delta R}{R_0}\right)\left(1-2\frac{\omega_0}{\Omega_0}\frac{\delta R}{R_0}\right)$$

$$\approx g(R_0)+g'(R_0)\delta R+2R_0\omega_L\Omega_0\left(1+\left(1-2\frac{\omega_0}{\Omega_0}\right)\frac{\delta R}{R_0}\right)$$

از شرایط مدار دایروی داریم :

$$-R_0\Omega_0^2 = g(R_0)+2R_0\omega_L\Omega_0$$

$$\Rightarrow \delta\ddot R \approx R_0\Omega_0^2\left(1-4\frac{\omega_0}{\Omega_0}\right)\frac{\delta R}{R_0} + g'(R_0)\delta R + 2R_0\omega_L\Omega_0\left(1-2\frac{\omega_0}{\Omega_0}\right)\frac{\delta R}{R_0} = \kappa^2\delta R$$

$$\kappa^2 = \Omega_0^2 - 4\omega_0\Omega_0 + g'(R_0) + 2\omega_L\Omega_0 - 4\omega_0\omega_L$$

$$\Omega_0 = \omega_0-\omega_L \Rightarrow \kappa^2 = \omega_0^2+\omega_L^2-2\omega_0\omega_L-4\omega_0(\Omega_0+\omega_L)+g'(R_0)+2\omega_L(\omega_0-\omega_L)$$

$$\Rightarrow \delta\ddot R + (3\omega_0^2 - g'(R_0)+\omega_L^2)\delta R = 0$$

با توجه به تابع پتانسیل داده شده داریم :

$$\vec g = -\vec\nabla\Phi = -2\frac{v_c^2}{R^2+R_c^2}\left(R\hat R+\frac{z}{q^2}\hat z\right)$$

$$z=0 \Rightarrow g(R) = -2\frac{v_c^2}{R^2+R_c^2}R$$

$$g' = -2v_c^2\left(\frac{1}{R^2+R_c^2}-\frac{2R^2}{(R^2+R_c^2)^2}\right) = \frac{2v_c^2}{(R^2+R_c^2)^2}(R^2-R_c^2)$$

$$\omega_0^2 = \omega_L^2 - \frac{g(R_0)}{R_0} = \omega_L^2+\frac{2v_c^2}{R_0^2+R_c^2}$$

$$\kappa^2 = 3\omega_L^2 + \frac{2v_c^2}{(R_0^2+R_c^2)^2}(3R_0^2+3R_c^2) - \frac{2v_c^2}{(R^2+R_c^2)^2}(R^2-R_c^2)+\omega_L^2$$

$$\Rightarrow \kappa^2 = 4\omega_L^2+\frac{4v_c^2}{(R_0^2+R_c^2)^2}(2R_0^2+4R_c^2)$$ (ب

بدین صورت نوسان شعاعی را محاسبه کردیم، همانطور که مشاهده کردید نیروی لورنتز باعث نوسان سریعتر در این راستا شد.

بار دیگر شتاب را در راستای مماسی می نویسیم، اما این بار شرایط اولیه متفاوت است؛ هنگامی ک جسم در $R_{\cdot}$ قرار داشته است متوقف شده :

$$a_\theta = ۲\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta} = \frac{۱}{R}\frac{d}{dt}\left(R^{۲}\dot{\theta}\right) = -\frac{QB_{\cdot}}{m}\frac{dR}{dt}$$

$$\Rightarrow \int d\left(R^{۲}\dot{\theta}\right) = -\int \frac{QB_{\cdot}}{m} R dR \Rightarrow R^{۲}\dot{\theta} = -\frac{QB_{\cdot}}{۲m}R^{۲} + C$$

$$\Rightarrow R^{۲}\left(\dot{\theta} + \omega_L\right) = C$$

$$t = \cdot : \ \dot{\theta} = \cdot \Rightarrow C = R_{\cdot}^{۲}\omega_L$$

$$\Rightarrow R^{۲}\left(\dot{\theta} + \omega_L\right) = R_{\cdot}^{۲}\omega_L \Rightarrow \dot{\theta} = \omega_L\left(\frac{R_{\cdot}^{۲}}{R^{۲}} - ۱\right)$$

شتاب راستای شعاعی را می نویسیم و با انتگرال گیری سرعت را بدست می آوریم :

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^{۲} = g(R) + \frac{QB_{\cdot}}{m}R\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{R} = \omega_L^{۲}\left(۲\frac{(R_{\cdot}^{۲} - R^{۲})}{R} + \frac{(R_{\cdot}^{۲} - R^{۲})^{۲}}{R^{۳}}\right) + g(R)$$

$$\ddot{R} = \dot{R}\frac{d\dot{R}}{dR} = \omega_L^{۲}\left(۲\frac{(R_{\cdot}^{۲} - R^{۲})}{R} + \frac{(R_{\cdot}^{۲} - R^{۲})^{۲}}{R^{۳}}\right) + g(R)$$

$$\Rightarrow \int \dot{R}\, d\dot{R} = \omega_L^{۲}\int\left(۲\frac{(R_{\cdot}^{۲} - R^{۲})}{R} + \frac{(R_{\cdot}^{۲} - R^{۲})^{۲}}{R^{۳}}\right)dR + \int g(R)\, dR + C$$

$$۲\frac{(R_{\cdot}^{۲} - R^{۲})}{R} + \frac{(R_{\cdot}^{۲} - R^{۲})^{۲}}{R^{۳}} = \frac{۲R_{\cdot}^{۲}}{R} - ۲R + \frac{R_{\cdot}^{۴}}{R^{۳}} + R - \frac{۲R_{\cdot}^{۲}}{R} = \frac{R_{\cdot}^{۴}}{R^{۳}} - R$$

$$\Rightarrow \int\left(۲\frac{(R_{\cdot}^{۲} - R^{۲})}{R} + \frac{(R_{\cdot}^{۲} - R^{۲})^{۲}}{R^{۳}}\right)dR = \int (\frac{R_{\cdot}^{۴}}{R^{۳}} - R)dR = -\frac{۱}{۲}\frac{R_{\cdot}^{۴}}{R^{۲}} - \frac{۱}{۲}R^{۲} = -\frac{R_{\cdot}^{۴} - R^{۴}}{۲R^{۲}}$$

$$\int g(R)\, dR = -\Phi(R)$$

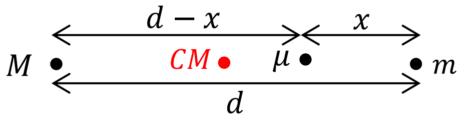
$$\Rightarrow \frac{\dot{R}^{۲}}{۲} \equiv \frac{v_{ff}^{۲}(R)}{۲} = -\omega_L^{۲}\frac{R_{\cdot}^{۴} - R^{۴}}{۲R^{۲}} - \Phi(R) + C$$

$$R = R_{\cdot} \Rightarrow \dot{R}(R_{\cdot}) = -\Phi(R_{\cdot}) + C = \cdot$$

$$\Rightarrow v_{ff}^{۲}(R) = ۲v_c^{۲}\ln\frac{R^{۲} + R_c^{۲}}{R_{\cdot}^{\ ۲} + R_c^{۲}} - \omega_L^{۲}\frac{R_{\cdot}^{۴} - R^{۴}}{۲R^{۲}} \text{ (ج}$$

سوال ۵) ***Galactic Cannibalism*** [کسری حاجیان]

الف) باتوجه به شکل زیر معادلات دینامیکی μ را می‌نویسیم. همچنین می‌دانیم سرعت زاویه‌ای چرخش این سیستم برابر:



$$\Omega = \sqrt{\frac{G(M+m)}{d^۳}}$$

$$a_\mu = -\frac{GM}{(d-x)^۲} + \frac{Gm}{x^۲}$$

برای این‌که μ همواره برروی این خط باقی بماند، باید در مداری دایروی حول مرکزجرم m و M با سرعت زاویه‌ای Ω بچرخد. از دید مرکزجرم:

$$m\vec{r}_m + M\vec{r}_M = ۰ \quad , |\vec{r}_M - \vec{r}_m| = d$$

$$\vec{r}_m = -\frac{M}{m}\vec{r}_M \Rightarrow \left|\vec{r}_M + \frac{M}{m}\vec{r}_M\right| = d$$

$$\Rightarrow r_M = d\frac{m}{m+M}$$

$$r_\mu = (d-x) - r_M = (d-x) - d\frac{m}{m+M}$$

$$r_\mu = \left(d\frac{M}{m+M} - x\right)$$

برای حرکت در مدار دایره‌ای:

$$a_\mu = -r_\mu\Omega^۲ = -\left(d\frac{M}{m+M} - x\right)\frac{G(M+m)}{d^۳}$$

با جایگذاری در معادله نیرو:

$$\Rightarrow -\frac{GM}{(d-x)^۲} + \frac{Gm}{x^۲} = -\left(d\frac{M}{m+M} - x\right)\frac{G(M+m)}{d^۳}$$

با ضرب هر دو طرف در $\frac{d^۲}{GM}$ و کمی ساده‌سازی:

$$\Rightarrow f(x,d,m,M) = -\left(۱-\frac{x}{d}\right)^{-۲} + \left(\frac{m}{M}\right)\left(\frac{x}{d}\right)^{-۲} + \left(\left(۱+\frac{m}{M}\right)^{-۱} - \frac{x}{d}\right)\left(۱+\frac{m}{M}\right) = ۰$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,d,m,M) = ۱ - \left(\frac{x}{d}\right)\left(۱+\frac{m}{M}\right) + \left(\frac{m}{M}\right)\left(\frac{x}{d}\right)^{-۲} - \left(۱-\frac{x}{d}\right)^{-۲} = ۰}$$

ب) شعاع ژاکوبی طبق تعریف فاصله‌ای از جرم m است، که جرم کوچکی که در آن نقطه قرار دارد، در آستانه فرار از قید گرانشی m باشد. این شعاع دقیقا همان x است. ار تقریب $(۱+x)^{\alpha} \approx ۱+\alpha x$ برای بسط تا مرتبه اول استفاده می‌کنیم:

$$f(x,d,m,M) \approx ۱ - \left(\frac{x}{d}\right) + \left(\frac{m}{M}\right)\left(\frac{x}{d}\right)^{-۲} - \left(۱ + ۲\frac{x}{d}\right) = ۰$$

$$\Rightarrow ۳\frac{x}{d} = \left(\frac{m}{M}\right)\left(\frac{x}{d}\right)^{-۲}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{j,m} = x = \left(\frac{m}{۳M}\right)^{\frac{۱}{۳}} d}$$

ج) باتوجه به تخت شدن سرعت حرکت مدار دایروی در توزیع کروی داریم:

$$-\frac{v^۲}{r} = -\frac{GM(r)}{r^۲} \Rightarrow M(r) = \frac{v^۲ r}{G}$$

$$\rho(r) = \frac{dM}{dr}\frac{۱}{۴\pi r^۲} = \frac{v^۲}{G}\frac{۱}{۴\pi r^۲}$$

که r از مرکز هر کهکشان برای یافتن چگالی آن کهکشان سنجیده شده‌است. با توجه به تعریف σ برای چگالی کهکشان کوتوله داریم:

$$\boxed{\rho_{sat} = \frac{\sigma_{sat}^۲}{۲\pi G r^۲}}$$

و کهکشان میزبان:

$$\boxed{\rho_{GLX} = \frac{\sigma_{GLX}^۲}{۲\pi G r^۲}}$$

د) با فرض این‌که کهکشان کوتوله در هر لحظه در مدار دایروی باشد:

$$v_{c,m} = \sqrt{۲}\sigma_{GLX} \Rightarrow X = \frac{v_{c,m}}{\sqrt{۲}\sigma_{GLX}} = ۱$$

پس با توجه به جواب تابع خطا و جایگذاری سرعت کهکشان کوتوله و تابعیت چگالی میزبان داریم: (جرم کهکشان کوتوله m درنظر گرفته شده است.)

$$\tau = \left|\vec{r} \times \vec{F}_d\right| = r \times -\frac{۴\pi \ln(\Lambda)\, G^۲ m^۲ \rho}{v_M^۲}\left(\mathrm{erf}(X) - \frac{۲}{\sqrt{\pi}} X e^{-X^۲}\right)$$

$$\Rightarrow \tau = -\frac{۴\pi \ln(\Lambda)\, G^۲ m^۲ \rho}{۲\sigma_{GLX}^۲} r \left(\mathrm{erf}(۱) - \frac{۲}{\sqrt{\pi}} e^{-۱}\right)$$

$$\Rightarrow \tau = -۰.۴۲۸ \times \frac{۴\pi \ln(\Lambda)\, G^{۲} m^{۲}}{۲\sigma_{GLX}^{۲}} r \times \frac{\sigma_{GLX}^{۲}}{۲\pi G r^{۲}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = -۰.۴۲۸ \ln(\Lambda) \frac{G m^{۲}}{r}}$$

ه) باتوجه به نتیجه بخش ب و ج داریم: (r فاصله مرکز کوتوله از میزبان و R شعاع کهکشان کوتوله است.)

$$R = \left(\frac{m}{۳M}\right)^{\frac{۱}{۳}} r \ \ , m = \frac{۲\sigma_{sat}^{۲} R}{G}$$

$$\Rightarrow m = \frac{۲\sigma_{sat}^{۲}}{G} \left(\frac{m}{۳M}\right)^{\frac{۱}{۳}} r$$

همچنین M جرم کهکشان میزبان تا شعاع r است.

$$\Rightarrow m^{\frac{۲}{۳}} = \frac{۲\sigma_{sat}^{۲}}{G} \left(\frac{۱}{۳\left(\frac{۲\sigma_{GLX}^{۲} r}{G}\right)}\right)^{\frac{۱}{۳}} r$$

$$\Rightarrow m^{\frac{۲}{۳}} = \frac{۲\sigma_{sat}^{۲}}{G^{\frac{۲}{۳}} (۶\sigma_{GLX}^{۲})^{\frac{۱}{۳}}} r^{\frac{۲}{۳}}$$

$$\Rightarrow m = \frac{\sqrt{۸}\sigma_{sat}^{۳}}{\sqrt{۶} G \sigma_{GLX}} r$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \sqrt{\frac{۴}{۳} \frac{\sigma_{sat}^{۳} r}{G \sigma_{GLX}}}}$$

و) رابطه تکانه زاویه‌ای و گشتاور وارد بر کهکشان کوتوله را می‌نویسیم و سرعت برابر سرعت حرکت در مدار دایروی در کهکشان میزبان است و جرم آن را ازقسمت قبل جایگذاری می‌کنیم:

$$L = mrv = \sqrt{\frac{۴}{۳} \frac{\sigma_{sat}^{۳} r}{G \sigma_{GLX}}} \times r \times \sqrt{۲} \sigma_{GLX}$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{\frac{۸}{۳} \frac{\sigma_{sat}^{۳} r^{۲}}{G}} \Rightarrow \dot{L} = ۲\sqrt{\frac{۸}{۳} \frac{\sigma_{sat}^{۳}}{G}} r \dot{r}$$

$$\tau = -۰.۴۲۸ \ln(\Lambda) \frac{G m^{۲}}{r} = -۰.۴۲۸ \ln(\Lambda) \frac{G}{r} \frac{۴}{۳} \frac{\sigma_{sat}^{۶} r^{۲}}{G^{۲} \sigma_{GLX}^{۲}}$$

$$\dot{L} = \tau \Rightarrow ۲\sqrt{\frac{۸}{۳}\frac{\sigma_{sat}^{۳}}{G}}\, r\dot{r} = -۰.۴۲۸\ln(\Lambda)\frac{۴}{۳}\frac{\sigma_{sat}^{۶} r}{G\sigma_{GLX}^{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = -۰.۱۷۵\ln(\Lambda)\frac{\sigma_{sat}^{۳}}{\sigma_{GLX}^{۲}}$$

از عبارت بالا انتگرال می‌گیریم. فرض می‌کنیم فاصله اولیه کهکشان کوتوله r_i بوده‌است.

$$\Rightarrow \int_{r_i}^{۰} dr = \int_{۰}^{t^*} -۰.۱۷۵\ln(\Lambda)\frac{\sigma_{sat}^{۳}}{\sigma_{GLX}^{۲}}\, dt$$

$$\Rightarrow \boxed{t^* = \frac{\sigma_{GLX}^{۲}}{۰.۱۷۵\ln(\Lambda)\,\sigma_{sat}^{۳}} r_i}$$

ز) ابتدا لاندا را باتوجه به رابطه صورت سوال محاسبه می‌کنیم:

$$\Lambda = \frac{R_{GLX} v_M^{۲}}{۲GM} = \frac{R_{GLX}\sigma_{GLX}^{۲}}{GM}$$

همچنین $R_{GLX} \approx ۱۵\ kpc$ و $M = ۱۰^{۱۰}\ M_{sun}$ پس:

$$\Lambda = ۷.۸۶$$

همچنین $r_i \approx ۴۵\ kpc$:

$$\boxed{t_{LMC}^* = ۴.۸۹\ Gyr}$$

سوال ۶) زاویه انحراف [پرشان جوانرود]

ابتدا با استفاده از رابطه $\dot{r}$ ، $\dot{\phi}$ را به دست آورده و سپس از آن روی کل مسیر انتگرال می گیریم.

$$L = r^{2}\dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{r^{2}}$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} = \pm L[r^{2}\sqrt{\frac{\epsilon^{2}}{c^{2}} - \frac{L^{2}}{r^{2}}\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}]^{-1}$$

علامت $\pm$ در رابطه بالا به این دلیل ظاهر شد که $\dot{r}$ ابتدا از ∞ تا r_0 منفی و سپس از r_0 تا ∞ مثبت خواهد بود.

$$\Rightarrow \Delta\phi = -\int_{\infty}^{r_0} \frac{\dot{\phi}}{|\dot{r}|} dr + \int_{r_0}^{\infty} \frac{\dot{\phi}}{|\dot{r}|} dr = 2\int_{r_0}^{\infty} \frac{\dot{\phi}}{|\dot{r}|} dr$$

برای محاسبه مقدار بالا به ϵ نیاز داریم و باید که آن را به دست آوریم.

$$\dot{r}^{2} = \frac{\epsilon^{2}}{c^{2}} - \frac{L^{2}}{r^{2}}\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)$$

اگر مقدار r کمینه باشد عبارت بالا باید برابر صفر باشد :

$$\frac{\epsilon^{2}}{c^{2}} - \frac{L^{2}}{r_0^{2}}\left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right) = 0$$

اگر جرم مرکزی را به صفر میل دهیم($M \to 0$) آنگاه R_s نیز برابر صفر خواهد بود و نور بدون خم شدن روی خط راست حرکت می کند و کمترین فاصله از مبدا برابر ξ خواهد بود :

$$\frac{\epsilon^{2}}{c^{2}} - \frac{L^{2}}{\xi^{2}} = 0 \Rightarrow \epsilon = \frac{cL}{\xi}$$

$$\frac{L^{2}}{\xi^{2}} - \frac{L^{2}}{r_0^{2}}\left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\epsilon^{2}}{c^{2}} = \frac{L^{2}}{\xi^{2}} = \frac{L^{2}}{r_0^{2}}\left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = 2\int_{r_0}^{\infty} L[r^{2}\sqrt{\frac{L^{2}}{\xi^{2}} - \frac{L^{2}}{r^{2}}\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}]^{-1} dr = 2\int_{r_0}^{\infty} r^{-2}[\sqrt{\frac{1}{r_0^{2}}\left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right) - \frac{1}{r^{2}}\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}]^{-1} dr$$

انتگرال بالا را با اعمال یک تغییر متغیر مقداری ساده تر می کنیم :

$$u = \frac{r_0}{r} \Rightarrow r = \frac{r_0}{u} \Rightarrow dr = -\frac{r_0 du}{u^{2}}$$

$$\frac{r^{4}}{r_0^{2}} - r^{2} + R_s\left(r - \frac{r^{4}}{r_0^{3}}\right) = \frac{r_0^{2}}{u^{4}} - \frac{r_0^{2}}{u^{2}} + R_s\left(\frac{r_0}{u} - \frac{r_0}{u^{4}}\right) = \frac{r_0^{2}}{u^{4}}\left((1 - u^{2}) - \frac{R_s}{r_0}(1 - u^{3})\right)$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = 2\int_{0}^{1} [(1 - u^{2}) - \frac{R_s}{r_0}(1 - u^{3})]^{-\frac{1}{2}} du = 2\int_{0}^{1} (1 - u^{2})^{-\frac{1}{2}}(1 - \frac{R_s}{r_0}\frac{1 - u^{3}}{1 - u^{2}})^{-\frac{1}{2}} du$$

فرض می کنیم که جرم M فقط اندکی فضا زمان را خم کرده است، به این ترتیب رابطه بالا را بسط می دهیم :

$$\left(1-\frac{R_s}{r_0}\frac{1-u^3}{1-u^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{R_s}{2r_0}\frac{1-u^3}{1-u^2}+a_2(u)\left(\frac{R_s}{r_0}\right)^2+a_3(u)\left(\frac{R_s}{r_0}\right)^3+\cdots$$

در تابعیت بالا $a_n(u)$ تابعی از u است.

$$\Rightarrow \Delta\phi = 2\int_0^1\left(\frac{1}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{R_s}{2r_0}\frac{1-u^3}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}+a_2{}'(u)\left(\frac{R_s}{r_0}\right)^2+a_3{}'(u)\left(\frac{R_s}{r_0}\right)^3+\cdots\right)du$$

برای محاسبه انتگرال بالا یک تغییر متغیر جدید اعمال می کنیم :

$$u=sin\theta \Rightarrow du=cos\theta\, d\theta \Rightarrow \begin{cases} u=0 \Rightarrow \theta=0 \\ u=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\Delta\phi = 2\left(\theta+\frac{R_s}{2r_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}sec^2\theta\, d\theta-\frac{R_s}{2r_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^3\theta\, sec^2\theta\, d\theta\right)+A_2\left(\frac{R_s}{r_0}\right)^2+A_3\left(\frac{R_s}{r_0}\right)^3+\cdots$$

$$\int sec^2\theta\, d\theta = tan\theta$$

$$\int sin^3\theta\, sec^2\theta\, d\theta \xRightarrow{sin^3\theta=(1-cos^2\theta)sin\theta} \int\frac{sin\theta}{cos^2\theta}d\theta - \int sin\theta\, d\theta = sec\theta+cos\theta$$

$$\Rightarrow \int sec^2\theta\, d\theta - \int sin^3\theta\, sec^2\theta\, d\theta = tan\theta - sec\theta - cos\theta = \frac{sin\theta-1}{cos\theta}-cos\theta$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = \pi+\frac{R_s}{r_0}\left[\frac{sin\theta-1}{cos\theta}-cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+A_2\left(\frac{R_s}{r_0}\right)^2+A_3\left(\frac{R_s}{r_0}\right)^3+\cdots$$

جمله $\frac{sin\theta-1}{cos\theta}$ در $\frac{\pi}{2}$ صورت و مخرج برابر صفر می شوند، اکنون باید از قائده هوپیتال برای محاسبه حد این عبارت در $\frac{\pi}{2}$ استفاده کنیم :

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{sin\theta-1}{cos\theta}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}-\frac{cos\theta}{sin\theta}=0$$

$$\Rightarrow \Delta\phi=\pi+\frac{2R_s}{r_0}+A_2\left(\frac{R_s}{r_0}\right)^2+A_3\left(\frac{R_s}{r_0}\right)^3+\cdots$$

با توجه به شکل رابطه α و $\Delta\phi$ را به دست می آوریم :

$$\hat{\alpha}=\pi-(2\pi-\Delta\phi)=\frac{2R_s}{r_0}+A_2\left(\frac{R_s}{r_0}\right)^2+A_3\left(\frac{R_s}{r_0}\right)^3+\cdots$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{\hat{\alpha}\approx\frac{4GM}{r_0c^2}}$$

سلامت باشید!