11. دترمینان

11−1) تعریف دترمینان

به هر ماتریس مربع A عددی حقیقی به نام دترمینان آن ماتریس، نسبت داده می شود و به صورت $|A|$ نشان می دهیم.

حالت اول) دترمینان هر ماتریس مربع $A=[a]_{1\times1}$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$if \quad A=[a]_{1\times1} \Rightarrow |A|=|a| \Rightarrow |A|=a$$

حالت دوم) دترمینان هر ماتریس مربع $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times2}$ به صورت زیر محاسبه می شود.

$$if \quad A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \Rightarrow |A|=(ad-bc)$$

مثال:

دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A|=(1)(5)-(-2)(4)=5+8=13$$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|B|=(2)(5)-(1)(10)=10-10=0$$

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|I|=(1)(1)-(0)(0)=1$$

حالت سوم) دترمینان هر ماتریس مربع $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}_{3\times 3}$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = a(ei-fh) - b(di-fg) + c(dh-eg)$$

(روش ساروس)

برای محاسبه فقط دترمینانهای ماتریسهای مرتبه 3 می توان از روش ساروس به شرح زیر استفاده کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = ?$$

$$\Rightarrow |A| = \left|\begin{array}{ccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 \\ & \searrow & & \searrow & \\ b_1 & & b_2 & & b_3 \\ & & & \searrow & \\ c_1 & & c_2 & & c_3 \end{array}\right| \begin{array}{c} \\ \swarrow \\ \\ \searrow \\ \\ \end{array} \left|\begin{array}{ccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ b_1 & & b_2 & & b_3 \\ & \swarrow & & & \\ c_1 & & c_2 & & c_3 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow |A| = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1)$$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \left|\begin{array}{ccccc} 3 & & 1 & & 1 \\ & \searrow & & \searrow & \\ 1 & & 3 & & 1 \\ & & & \searrow & \\ 1 & & 1 & & 3 \end{array}\right| \begin{array}{c} \\ \swarrow \\ \\ \searrow \\ \\ \end{array} \left|\begin{array}{ccccc} 3 & & 1 & & 1 \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ 1 & & 3 & & 1 \\ & \swarrow & & & \\ 1 & & 1 & & 3 \end{array}\right| = (27+1+1)-(3+3+3) = 20$$

حالت چهارم) برای محاسبه دترمینان هر ماتریس مربع از مرتبه n دترمینان را بر حسب یک سطر یا یک ستون بسط می دهیم و علامت هر عضو دترمینان از دستور $(-1)^{i+j}$ قابل محاسبه است.

دترمینان ماتریس مربع $A=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}_{4\times 4}$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} \Rightarrow |A|=(-1)^{1+1}a\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}c\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix}+(-1)^{1+4}d\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

نکات-

1) هرگاه دترمینان ماتریس A مساوی صفر باشد ، ماتریس A را (منفرد) و اگر دترمینان ماتریس A مخالف صفر باشد ، ماتریس A را (غیر منفرد) گویند.

2) دترمینان هر ماتریس قطری ، بالا مثلثی ، پایین مثلثی برابر حاصل ضرب درایه های واقع بر قطر اصلی آن است.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = adf \qquad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{vmatrix} = adf$$

3)

اگر A ماتریس اسکالر $n \times n$ باشد آنگاه $|A| = k^n$

اگر A ماتریس همانی $n \times n$ باشد آنگاه $|A| = 1$

$$\begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = k \times k \times k = k^3 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

4) دترمینان هر ماتریس پادمتقارن از مرتبه فرد صفر است و از مرتبه زوج عددی است که مربع کامل است.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = a^2$$

5) هرگاه در یک دترمینان از مرتبه 3 تمام عضوهای لااقل یک طرف قطر فرعی همگی صفر باشند ، مقدار دترمینان از ضرب عضوهای روی قطر فرعی در هم با تغییر علامت حاصل می شود (قرینه حاصل ضرب عضوهای روی قطر فرعی)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(abc) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(cef) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = -(abd)$$

6) هرگاه B و A دو ماتریس مربع هم مرتبه باشند.

$$|AB| = |A||B|$$

توجه شود که رابطه $|A+B| = |A| + |B|$ همواره برقرار نیست.

7) اگر یک سطر یا یک ستون دترمینان را در عدد k ضرب کنیم ،مقدار دترمینان در k ضرب می گردد:

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad , \quad k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ kd & ke & kf \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & kc \\ d & e & kf \\ g & h & ki \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

8) اگر ماتریس از مرتبه n بوده و تمام عضوهای آن را در عدد k ضرب کنیم مقدار دترمینان در k^n ضرب می گردد:

$$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2}=\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}_{2\times 2}\Rightarrow\begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix}=k^2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$k\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}_{3\times 3}=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix}_{3\times 3}\Rightarrow\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{vmatrix}=k^3\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

به طور کلی اگر A ماتریس $n\times n$ و k یک عدد حقیقی باشد آنگاه :

$$|k\,A|=(k)^n\,|A|$$
$$|-A|=(-1)^n\,|A|$$

9) اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد آنگاه برای هر عدد طبیعی k داریم:

$$\left|A^k\right|=|A|^k$$

اثبات به روش استقراء :

$p(1):\ n=1\Rightarrow\left|A^1\right|=|A|^1$

فرض استقراء : $p(k):\ n=k\Rightarrow\left|A^k\right|=|A|^k$

حکم استقراء : $p(k+1):\ n=k+1\Rightarrow\left|A^{k+1}\right|=|A|^{k+1}$

$$\begin{aligned}\left|A^{k+1}\right|&=\left|A.A^k\right|\\&=|A|\left|A^k\right|\ ;\ \left|A^k\right|=|A|^k\\&=|A||A|^k\\&=|A|^{k+1}\end{aligned}$$

مثال:

اگر $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix} = A + x\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ مقدار A کدام است؟

بر حسب ستون اول بسط دهیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix} = A + x\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow (1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (x)\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = A + x\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow -3 - 2(-3) = A$$

$$\Rightarrow A = 3$$

مثال:

هرگاه A ماتریس مربع و k عددی طبیعی فرد و $A^k = I$ باشد ثابت کنید $|A| = 1$ است.

$$A^k = I \Rightarrow |A^k| = |I|$$

$$\Rightarrow |A|^k = 1$$

$$\Rightarrow |A| = \sqrt[k]{1}$$

$$\Rightarrow |A| = 1$$

مثال:

هرگاه $A^2 = A$ (A ماتریس است) ثابت کنید $|A| = 0$, $|A| \neq 1$.

$A^2 = A \ , \ |A| \neq 1$

$$A^2 = A \Rightarrow |A^2| = |A|$$

$$\Rightarrow |A|^2 = |A|$$

$$\Rightarrow |A|^2 - |A| = 0$$

$$\Rightarrow |A|(|A| - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| - 1 = 0 \xrightarrow{|A| \neq 1} |A| \neq 1 \end{cases}$$

مثال:

هرگاه دترمینان ماتریس A از مرتبه 3 ، $|A|=2$ باشد حاصل عبارت $B=\left|\left|\left|A\right|A\right|A\right|$ چقدر است؟

$$\left|\left|A\right|A\right|=\left|2A\right|=2^3\left|A\right|=2^3\times 2=2^4$$
$$B=\left|\left|\left|A\right|A\right|A\right|=\left|2^4A\right|=\left(2^4\right)^3\left|A\right|=2^{12}\times 2=2^{13}$$

مثال:

هرگاه B و A دو ماتریس مربع مرتبه 3 باشد و $AB=-BA$ باشد ، ثابت کنید دترمینان $|A|=0$ یا $|B|=0$ است.

$$\begin{aligned}AB=-BA&\Rightarrow\left|AB\right|=\left|-BA\right|\\&\Rightarrow\left|AB\right|=-\left|BA\right|\\&\Rightarrow\left|A\right|\left|B\right|=-\left|B\right|\left|A\right|\\&\Rightarrow\left|A\right|\left|B\right|+\left|B\right|\left|A\right|=0\\&\Rightarrow 2\left|A\right|\left|B\right|=0\\&\Rightarrow\begin{cases}\left|A\right|=0\\\left|B\right|=0\end{cases}\end{aligned}$$

مثال:

کدامیک از گزاره های زیر نادرست است؟

1) $|AB|=|BA|$

2) $|A'B|=|AB|$

3) $|AB'|=|AB|$

4) $|A+B|=|A|+|B|$

گزینه (4) صحیح است.

$$|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$$
$$|A'B|=|A'||B|=|A||B|$$
$$|AB'|=|A||B'|=|A||B|=|AB|$$

مثال:

فرض کنید A ماتریسی از مرتبه فرد باشد و $A'=-A$ (یعنی A پادمتقارن) ثابت کنید دترمینان A مساوی صفر است.

فرض کنید مرتبه A عدد فرد n است:

$$\begin{aligned}
A'=-A \Rightarrow |A'| &= |-A| \\
&\Rightarrow |A| = (-1)^n |A| \quad ; \quad n=2k+1 \\
&\Rightarrow |A| = -|A| \\
&\Rightarrow |A|+|A| = 0 \\
&\Rightarrow 2|A| = 0 \\
&\Rightarrow |A| = 0
\end{aligned}$$

مثال:

اگر $|A|=5$ و A ماتریسی از مرتبه 3 باشد $|-2A^2|$ کدام است؟

100(1 -100(2   200(3 -200(4

گزینه (4) صحیح است.

یادآوری : $|\lambda A| = \lambda^n |A|$

$$\begin{aligned}
|-2A^2| &= (-2)^3 |A^2| \\
&= -8|A|^2 \\
&= -8(5)^2 \\
&= -200
\end{aligned}$$

مثال:

اگر A ماتریسی 3×3 باشد در این صورت حاصل $\left||A|A\right|$ کدام است؟

1) $|A|^2$ 2) $|A|^3$ 3) $|A|^4$ 4) $|A|^5$

گزینه (3) صحیح است.

فرض: $|A| = \lambda$

$$\begin{aligned} \left||A|A\right| &= |\lambda A| \\ &= \lambda^3 |A| \\ &= |A|^3 |A| \\ &= |A|^4 \end{aligned}$$

مثال:

اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ در این صورت $|A+B| + |A-B|$ کدام است؟

1) $2|A|$ 2) 2 3) 0 4) $-2|B|$

گزینه (3) صحیح است.

$$\left.\begin{cases} A+B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow |A+B| = -8 \\ A-B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A-B| = 8 \end{cases}\right\rangle |A+B| + |A-B| = 0$$

مثال:

اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ باشد، در صورتی که $|aA|=-28$, a کدام است؟

$$\begin{aligned}|aA|=-28 &\Rightarrow a^2|A|=-28\\ &\Rightarrow a^2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-28\\ &\Rightarrow -7a^2=-28\\ &\Rightarrow a^2=4\\ &\Rightarrow a=\pm 2\end{aligned}$$

مثال:

A,B دو ماتریس $n\times n$ می باشند،کدام همواره صحیح است؟

1) $|AB|=0\Rightarrow |A|=0\ ,\ |B|=0$

2) $AB=I_n\Rightarrow |A|\neq 0\ ,\ |B|\neq 0$

3) ممکن است $|A|=0$ اما $|AB|\neq 0$

4) $|(KA)(KB)|=K^2|A||B|$

گزینه (2) صحیح است.

$$\begin{aligned}AB=I_n &\Rightarrow |AB|=|I_n|\\ &\Rightarrow |A||B|=1\\ &\Rightarrow |A|\neq 0\ ,\ |B|\neq 0\end{aligned}$$