

به نام خدا

آزمون تئوری نخست

چهارشنبه ۱۹ شهریور ۹۳ - زمان ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه

توجه: آزمون ۱۶۰ نمره است و قطعاً انتظار ندارم به همه‌ی سؤالات پاسخ بدید. پس سؤال درست رو انتخاب کنید و روش فکر کنید.

الگوریتم :

صفر - الگوریتمی از $O(n^3)$ ارائه کنید که تعداد راه‌های افراز کردن مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, n\}$ به دو زیرمجموعه با مجموع اعضای برابر را به دست آورد. [۱۰ نمره]

یک - الگوریتمی ارائه دهید که تعداد رشته‌های به طول n از حروف a و b به طوری که اختلاف تعداد a و b ها در هر زیررشته‌ی متوالی آن‌ها حداکثر k باشد را محاسبه کند. [۲۰ نمره]
مثال : به ازای $n = 3$ و $k = 1$ رشته‌های aba ، bab مطلوب‌اند.

دو - در ورودی به شما n بازه روی محور X داده می‌شود. (بازه‌ها به صورت زوج مرتب‌های (a, b) داده می‌شود و خود a و b هم در بازه هستند.) می‌خواهیم با کمترین تعداد رنگ ممکن بازه‌ها را رنگ کنیم به طوری که هیچ دو بازه‌ای که اشتراک آن‌ها ناتهی است هم‌رنگ نباشند. الگوریتمی از $O(n \lg n)$ ارائه کنید و ثابت کنید درست کار می‌کند. [۱۵ نمره]

گراف :

صفر - در یک گراف ۳۶ راسی درجه‌ی هر راس حداقل ۳۴ است. ثابت کنید می‌توانیم رئوس گراف را به سه دسته‌ی ۱۲ تایی تقسیم کنیم به طوری که هر دسته یک زیرگراف کامل باشد. (به یک زیرگراف کامل خوشه یا **Clique** هم می‌گویند.) [۱۵ نمره]

یک - یک گراف را n -رنگ‌پذیر می‌نامیم اگر برای رنگ کردن رأس‌هایش به طوری که هیچ دو رأس مجاور هم‌رنگ نباشند حداقل n رنگ لازم باشد. ثابت کنید به ازای هر n یک گراف بدون مثلث داریم که n -رنگ‌پذیر است. [۱۵ نمره]

دو - یک گراف $2n$ راسی با $n^2 + 1$ یال داریم. ثابت کنید زیرگرافی به شکل یک گراف کامل ۴ راسی که یک یالش حذف شده دارد. [۱۵ نمره]

ترکیبیات :

صفر - n تا ماشین دور دایره داریم، سرعت همه ماشین‌ها ثابت و برابر است. در ابتدا تعدادی از ماشین‌ها در جهت ساعت‌گرد هستند و تعدادی در جهت پادساعت‌گرد. هر بار که دو ماشین به هم برخورد کنند، جهت هر دو برعکس می‌شود و در جهت جدید بدون وقفه حرکت خود را ادامه می‌دهند. ثابت کنید مستقل از آرایش اولیه ماشین‌ها، لحظه‌ای می‌رسد که ماشین‌ها به آرایش اولیه خود برمی‌گردند. (یعنی لحظه‌ای فرا می‌رسد که دقیقاً در مکان‌هایی که در ابتدای کار ماشین وجود داشت ماشین وجود دارد. ماشین‌ها با هم تفاوتی ندارند و کاملاً مشابه فرض می‌شوند) [۱۵ نمره]

یک - هر روز صبح یکی از اهالی شهر فردی را پیدا می کند که حداقل ۲۰۰۰ تومان کم تر از او پول داشته باشد و ۱۰۰۰ تومان به او پول می دهد. اگر تنها از همین روش پول ها جابه جا شود ثابت کنید بعد از مدتی دیگر کسی به کسی پول نمی دهد. [۱۰ نمره]

دو - ثابت کنید برای هر n طبیعی عدد فیبوناچی ای وجود دارد که به n صفر ختم شود. [۲۰ نمره]

سه - در یک جدول $n \times 2$ تعدادی مهره قرار دادیم. در هر مرحله می توانیم از یک خانه دو مهره برداریم و در عوض یک مهره در بالا یا در سمت راست آن قرار دهیم. با فرض اینکه در ابتدا دست کم 2^n مهره داریم، ثابت کنید می توان مهره های در خانه ی بالا راست قرار داد. [۱۰ نمره]

چهار - S را مجموعه ی اعداد $a + b \times \sqrt{2}$ به ازای هر a و b صحیح در نظر بگیرید. ثابت کنید روی محور اعداد حقیقی S چگال است. یعنی به ازای هر X و ε داده شده به طوری که $\varepsilon > 0$ ، نقطه ای مانند p عضو S وجود دارد به طوری که $|X - p| < \varepsilon$ [۲۰ نمره]

سربلند باشید.