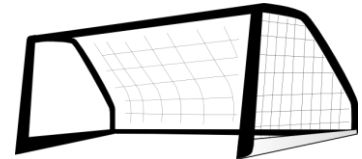


۱- یک توپ فوتبال که ۳۰ متر با دروازه فاصله دارد شوت می‌شود. این توپ وقتی به زمین برخورد می‌کند کمی انرژی از دست می‌دهد ولی همچنان از زمین بلند می‌شود تا دوباره به زمین برخورد کند. فاصله دو نقطه‌ی متوالی برخورد، ۵ برابر فاصله تا نقطه‌ی برخورد بعدی است. اولین برخورد تا محل شوت ۲۴ متر طول دارد: (۳ نمره)

الف) اگر a_n برابر با n امین فاصله‌ی دو نقطه‌ی متوالی برخورد باشد، a_1 را محاسبه کنید.

ب) فرض کنید $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ باشد، حاصل $S - \frac{1}{5} \times S$ برابر با چند است؟

ج) آیا توپ گل می‌شود؟



۲- در ادامه، اثبات گنگ بودن عدد e را می‌بینید. به «چرا»های زیر پاسخ دهید. (۴ نمره)

عدد e نپر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots$$

فرض کنید e عددی گویا است. بنابراین دو عدد صحیح a و b وجود دارند که $e = \frac{a}{b}$ و می‌توان فرض کرد که $b < n$ است (الف-چرا؟). طرفین تساوی بالا را در $n!$ ضرب می‌کنیم. بنابراین $e \times n!$ عددی صحیح است (ب-چرا؟):

$$e \times n! = n! + \underbrace{\frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \dots + \frac{n!}{n!}}_Z + \frac{n!}{(n+1)!} + \dots$$

می‌دانیم $e \times n! - Z$ عددی صحیح است (ج-چرا؟). پس باید عبارت زیر عددی صحیح باشد (د-چرا؟):

$$S = \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+3)!} + \dots$$

اما $S < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots$ (چرا؟) و می‌دانیم که:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots = \frac{1}{n} \quad (\text{و چرا؟})$$

پس $S < \frac{1}{n}$ ولی این با صحیح بودن S در تناقض است (ز- چرا؟).

۳- اگر f و g دو تابع صعودی باشند، در مورد صعودی یا نزولی بودن توابع زیر چه می‌توان گفت؟ (۴ نمره)

(الف) $f + g$ (ب) $f \circ g$

۴- فرض کنید $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow A$. در هر مورد با ذکر دلیل مشخص کنید حکم داده شده درست است یا نادرست: (۳ نمره)

(الف) اگر به ازای هر $y \in B$ ، $f(g(y)) = y$ آنگاه f یک به یک است.

(ب) اگر به ازای هر $x \in A$ ، $g(f(x)) = x$ آنگاه به ازای هر $y \in B$ ، $f(g(y)) = y$.

۵- اگر f وارون پذیر باشد، آیا $f \circ f$ لزوماً وارون پذیر است؟ (۲ نمره)

۶- نمودار تابع $f(x) = |\log_2(1-x)|$ را رسم کنید. (۲ نمره)

۷- آیا تابع $f(x) = \log x^2$ با تابع $g(x) = 2 \log x$ برابر است؟ (۱ نمره)

۸- اگر $2a + 3b > 0$ و $4a^2 + 9b^2 = 13ab$ ، ثابت کنید: (۱ نمره)

$$\log \frac{2a+3b}{5} = \frac{\log a + \log b}{2}$$