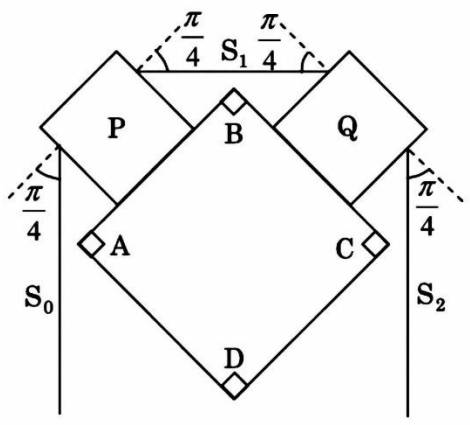
I) ماشین اتوودی را مطابق شکل ۱ در نظر بگیرید. این ماشین از یک مکعب ساکن تشکیل شده است. محورِ مرکزیِ وجهِ روبه‌رویِ این معکب $ABCD$ افقی و عمود بر صفحه‌ی کاغذ می‌باشد. همچنین وجه AB آن با خط عمود زاویه‌ی $\frac{\pi}{۴}$ می‌سازد. بر روی دو وجه AB و BC این مکعب به ترتیب دو جسم بدون‌جرم P و Q قرار داده شده است. همانطور که در شکل ۱ مشخص است، P و Q توسط یک ریسمان بدون‌جرم ناکشسان $S_۱$ به یکدیگر متصل شده‌اند. همچنین ریسمان‌های مشابه $S.$ و $S_۲$ به‌ترتیب از P و Q آویزان شده‌اند. دقت کنید که ریسمان $S_۱$ افقی و دو ریسمان $S.$ و $S_۲$ عمودی می‌باشند. حال فرض می‌کنیم که بین جسم P و سطح AB و همچنین بین جسم Q و سطح BC اصطکاک ایستایی با ضریب $\mu.$ وجود دارد. همچنین فرض می‌کنیم که جسم‌های P و Q همواره با سطح زیرینشان در تماس هستند. در طول حل مسئله شتاب گرانش زمین را g در نظر بگیرید.



شکل ۱

الف) فرض کنید کشش ریسمان $S_۱$ برابر $T_۱$ باشد. حداقل کشش ریسمان $S.$ را به گونه‌ای بیابید که جسم P ساکن باشد. (۲ نمره)

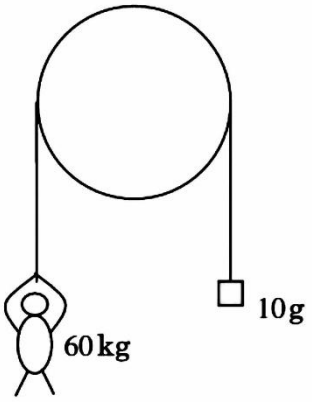
م) جسمی به جرم $m.$ را از انتهای ریسمان $S.$ آویزان می‌کنیم. حداقل جرم جسمی که باید از ریسمان $S_۲$ آویزان کنیم ($m_۲$) تا همچنان P و Q در حالت سکون بمانند را بیابید. (۲ نمره)

II) حال مکعب قسمت قبل را با یک منشور که قائده‌ی آن یک $۲n$ ضلعی منتظم ($n = ۲,۳, \dots$) می‌باشد، جایگزین می‌کنیم و n جسم بدون‌جرم را بر روی وجوه بالایی این منشور قرار می‌دهیم. این جسم‌ها را توسط ریسمان‌هایی مشابه ریسمان‌های قسمت قبل به هم متصل می‌کنیم. تمام ریسمان‌ها کشیده شده هستند. زاویه‌ی

بین هر وجه منشور و ریسمان متناظر با آن $\frac{\pi}{۲n}$ می‌باشد. همچنین فرض می‌کنیم که ضریب اصطکاک ایستایی بین هر جسم و سطح متناظر با آن، همانند قسمت قبل، برابر μ. می‌باشد.

ی) جسمی به جرم M را از چپ‌ترین جسم و جسمی دیگر به جرم m را از راست‌ترین جسم می‌آویزیم. حداقل مقدار m را به گونه‌ای بیابید که تمام جسم‌ها در حال سکون باشند. (۳ نمره)

III) حال قرقره‌ای در نظر بگیرید که محور مرکزی آن افقی و عمود بر صفحه‌ی کاغذ باشد. یک ریسمان بدون‌جرم را بر روی آن قرار می‌دهیم. ضریب اصطکاک ایستایی بین ریسمان و سطح قرقره را برابر واحد در نظر بگیرید.



شکل ۲

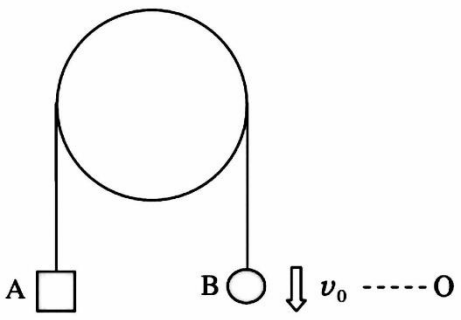
د) اگر جسم کوچکی به جرم $۱۰g$ را از انتهای سمت راست ریسمان آویزان کنیم و انتهای سمت چپ ریسمان را هم یک انسان به جرم $۶۰kg$ در دست بگیرد، چند دور باید ریسمان را به دور قرقره چرخاند تا مجموعه در حالت تعادل و بدون حرکت باقی بماند؟ (۵ نمره)

راهنمایی: زمانی که $|x| \ll ۱$ باشد، می‌توانید از تقریب‌های زیر استفاده کنید.

$$\cos x \approx ۱ \qquad \sin x \approx x \qquad \frac{۱}{۱-x} \approx ۱ + x$$

همچنین زمانی که h به سمت بی‌نهایت میل کند، داریم: $\left(۱ + \frac{۱}{h}\right)^h = e = ۲.۷۱۸\ldots$

IV) حال همان قرقره‌ی قسمت قبل را در نظر بگیرید. این بار یک ریسمان بدون‌جرم را روی آن قرار می‌دهیم. (بدون پیچاندن به دور قرقره!) سپس مطابق شکل ۳، جسم A به جرم M_A را به انتهای سمت چپ ریسمان و جسم B به جرم M_B را به انتهای سمت راست ریسمان می‌آویزیم. ($M_B < M_A$) حال زمانی که جسم B در نقطه‌ی O قرار دارد، به آن سرعت اولیه‌ی ثابتی به مقدار v_0 و به سمت پایین می‌دهیم. حرکت این جسم به نحوی است که در طول حرکت خود، در یک نقطه متوقف می‌شود و از آن به بعد حرکت خود را به سمت بالا ادامه می‌دهد و از نقطه‌ی O می‌گذرد. ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین ریسمان و سطح قرقره را به ترتیب برابر واحد و μ در نظر بگیرید. ($\mu < 1$)



شکل ۳

ظ) کم‌ترین مقدار نسبت جرمی $\frac{M_A}{M_B}$ را به گونه‌ای بیابید که جسم B پس از رسیدن به پایین‌ترین نقطه، تغییر جهت دهد. (۳ نمره)

ر) رابطه‌ای برای سرعت جسم B وقتی که به نقطه‌ی O بازمی‌گردد v_1 بیابید. (۵ نمره)