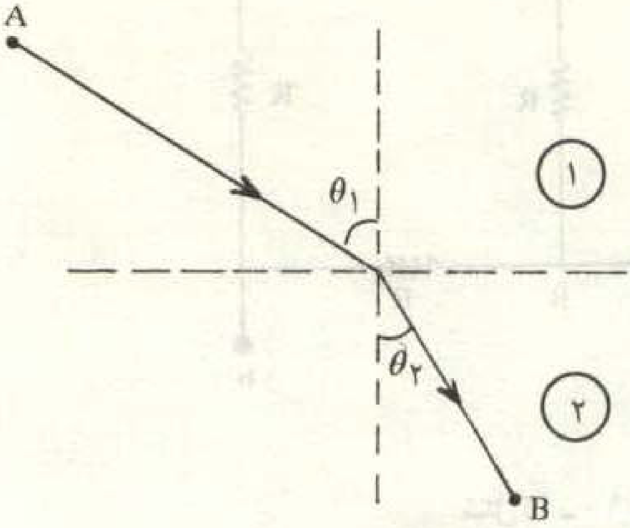
پاسخ مسئله‌ها

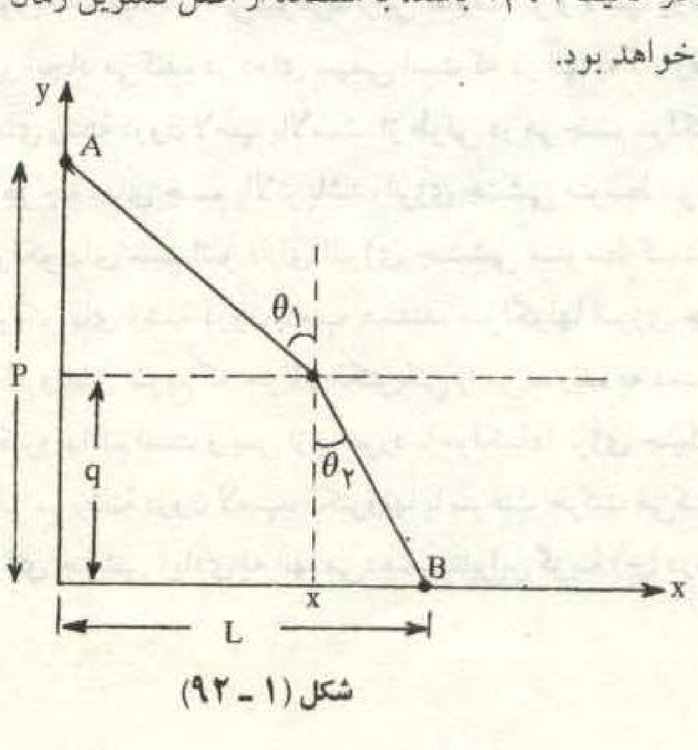


شکل (۱ ـ ۹۱)

۱ ـ اگر مطابق شکل (۱ ـ ۹۱) یک پرتو نور از نقطهٔ A در محیط ۱ به نقطه B در محیط ۲ برود، طبق قانون شکست نور داریم:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

در این رابطه v_1 و v_2 به ترتیب سرعت نور در محیط ۱ و ۲ است. طبق اصل کمترین زمان فرما، نور برای رسیدن از نقطهٔ ۱ به نقطهٔ ۲ کمترین زمان در راه خواهد بود. اکنون اگر یک اتومبیل از نقطهٔ A در همان مسیر مشخص شده در شکل (۱ ـ ۹۱) به نقطهٔ B برود و سرعتش در محیط ۱، v_1 و در محیط ۲، v_2 باشد، با استفاده از اصل کمترین زمان فرما، اتومبیل کمترین مدت در راه خواهد بود.



شکل (۱ ـ ۹۲)

در این قسمت با استفاده از اصل کمترین زمان فرما، قانون شکست نور را اثبات می‌کنیم. فرض کنید قرار است مطابق شکل(۱ـ ۹۲)، نور از نقطهٔ A در محیط (۱)، به نقطهٔ B در محیط (۲) برسد. طبق اصل فرما، نور مسیری را می‌پیماید که در کمترین زمان، از نقطهٔ A

به نقطهٔ B برسد. فرض کنید محل فرود نور به مرز دو محیط، نقطه‌ای به مختصات x باشد. مدت زمانی که نور در راه است، چنین است:

$$t = \frac{\sqrt{x^۲ + (p - q)^۲}}{v_۱} + \frac{\sqrt{(L - x)^۲ + q^۲}}{v_۲} \qquad (۱ - ۳۹)$$

از رابطهٔ (۱ ـ ۳۹) پیداست که مدت زمان به t مقدار x یعنی محل فرود نور به مرز دو محیط بستگی دارد. طبق اصل کمترین زمان فرما، باید x چنان باشد که t کمترین مقدار را داشته باشد. برای یافتن این زمان، از t نسبت به x مشتق می‌گیریم. داریم:

$$t' = \frac{x}{v_۱\sqrt{x^۲ + (p - q)^۲}} + \frac{-x}{v_۲\sqrt{(L - x)^۲ + q^۲}} = ۰$$

با توجه به شکل (۱ ـ ۹۱) داریم:

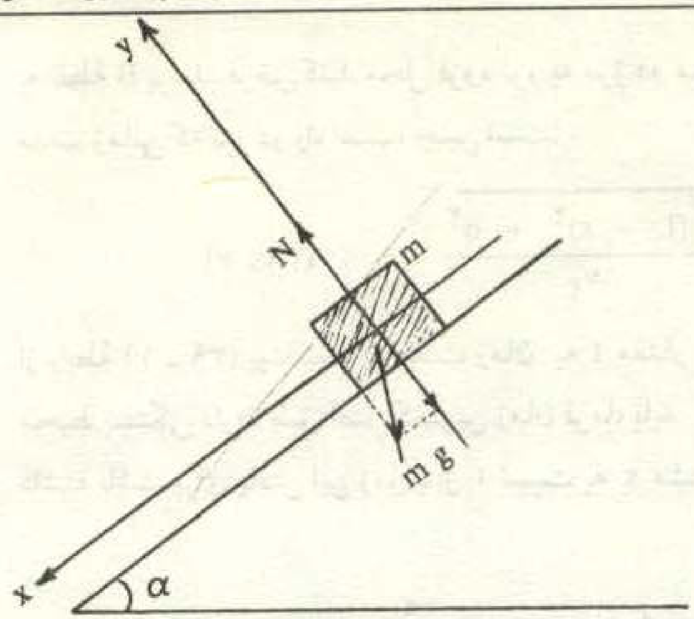
$$\frac{x}{\sqrt{x^۲ + (p - q)^۲}} = \operatorname{Sin}\theta_۱$$

$$\frac{x}{\sqrt{(L - x)^۲ + q^۲}} = \operatorname{Sin}\theta_۲$$

$$\frac{\operatorname{Sin}\theta_۲}{v_۱} = \frac{\operatorname{Sin}\theta_۲}{v_۲} \rightarrow \frac{\operatorname{Sin}\theta_۱}{\operatorname{Sin}\theta_۲} = \frac{v_۲}{v_۱}$$

به این ترتیب با پذیرفتن اصل کمترین زمان فرما، می‌توان قانون شکست نور را اثبات کرد.

۲ ـ ابتدا جسمی به جرم m را روی سطح شیبدار به زاویهٔ α در نظر می‌گیریم. اگر جسم m با سطح شیبدار اصطکاک نداشته باشد، دو نیروی وزن و نیروی عمودی سطح بر آن وارد می‌شود. مطابق شکل (۱ ـ ۹۳)، دو محور مختصات عمود بر هم x و y مماس بر سطح شیبدار و عمود بر آن در نظر می‌گیریم و نیروها را روی آنها تجزیه می‌کنیم. همان‌طور که از شکل (۱ ـ ۹۳) پیداست، روی محور y، دو نیروی N در جهت مثبت و نیروی $m\,g\,\operatorname{Cos}\alpha$ رو به پایین، و روی محور x تنها نیروی $m\,g\,\operatorname{Sin}\alpha$ وجود دارد. چون جسم مقید است که روی سطح شیبدار حرکت کند پس در راستای محور y حرکتی ندارد. در نتیجه



شکل (۱ - ۹۳)

شتاب جسم در راستای محور y صفر است و باید برآیند نیروهای وارد بر آن در راستای محور y صفر باشد. داریم:

$$N = m\,g\,\cos\alpha$$

شتاب جسم در راستای محور x، یعنی شتاب آن روی سطح شیبدار چنین است.

$$m\,g\,\sin\alpha = m\,a_x$$

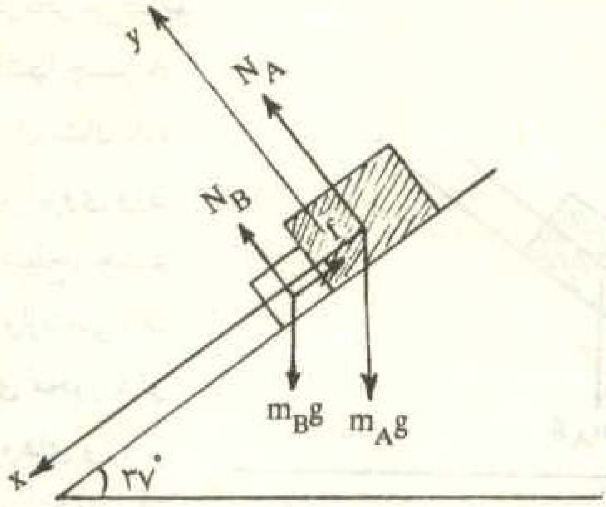
$$\rightarrow a_x = g\,\sin\alpha$$

بنابراین جسمی که روی سطح شیبدار بدون اصطکاک قرار دارد، با شتاب $g\sin\alpha$ پایین می‌آید.

اگر جسم m با سطح شیبدار اصطکاک داشته باشد، در حالتی که جسم روی سطح شیبدار لغزیده و پایین بیاید، چون نیروی اصطکاک خلاف جهت حرکت جسم است، نیروی اصطکاک به سمت بالا بوده و شتاب جسم از $g\,\sin\alpha$ کمتر خواهد بود.

اگر جسم B نیز مانند جسم A، با سطح شیبدار اصطکاک نداشت، هر دو جسم با شتاب $g\,\sin\alpha$ پایین می‌آمدند و در نتیجه با گذشت زمان سرعت هر دو به یک اندازه اضافه می‌شد. اما چون جسم B با سطح شیبدار اصطکاک دارد، شتابش از $g\,\sin\alpha$ کمتر خواهد بود. در نتیجه جسم B نمی‌تواند تندتر از جسم A پایین بیاید و دو جسم از هم فاصله بگیرند. به این ترتیب هر دو جسم با شتاب یکسانی پائین خواهند آمد. در شکل (۱ - ۹۴) نیروهای وارد بر دو جسم نشان داده شده است. همان‌طور که پیشتر توضیح داده شد، برآیند نیروهای وارد بر جسم در راستای y صفر است و داریم:

$$N_B + N_A = m_A\,g\,\cos\alpha + m_B\,g\,\cos\alpha$$



شکل (۱ ـ ۹۴)

و در راستای x داریم:

$$m_B\, g\, \mathrm{Sin}\ \alpha + m_A\, g\, \mathrm{Sin}\ \alpha - f = (m_B + m_A)\, a_x \qquad (۴۰ ـ ۱)$$

جسم A و B در محل تماس بر هم نیرو وارد می‌کنند و آشکار است که این نیرو در راستای محور x است. بنابراین در راستای y به جز دو نیروی N_B ، $m_B\, g\, \mathrm{Cos}\ \alpha$ نیروی دیگری بر جسم B وارد نمی‌شود و چون جسم B نیز مقید به حرکت بر روی سطح شیبدار است، پس برای جسم B به تنهایی نیز رابطهٔ زیر وجود دارد.

$$N_B = m_B\, g\, \mathrm{Cos}\ \alpha$$

اکنون می‌توان نیروی f را حساب کرد. داریم:

$$f = \mu\, m_B\, g\, \mathrm{Cos}\ \alpha \qquad (۴۱ ـ ۱)$$

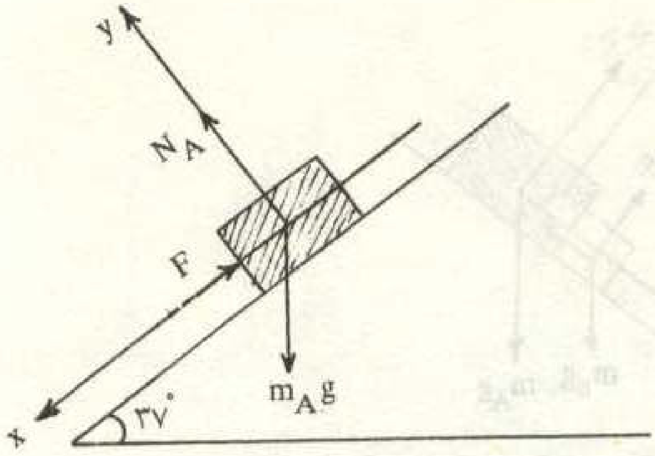
از رابطهٔ (۱ ـ ۴۰) و (۱ ـ ۴۱) داریم:

$$a_x = \frac{m_B\, g \sin\alpha + m_A\, g \sin\alpha - \mu\, m_B\, g \cos\alpha}{m_B + m_A}$$

$$a_x = \frac{۲ \times ۰/۶ + ۵ \times ۰/۶ - ۰/۲ \times ۲ \times ۰/۸}{۲ + ۵} \times ۱۰ = ۵/۴۵\ \mathrm{m/s}^۲$$

برای یافتن نیرویی که دو جسم A و B در محل تماس به هم وارد می‌کنند، حرکت دو

جسم را جداگانه در نظر می‌گیریم.
در شکل (۱ ـ ۹۵) تنها جسم A و نیروهای وارد بر آن نشان داده شده است. علاوه‌بر نیروی وزن و نیروی عمودی سطح، جسم B نیز بر آن نیرو وارد می‌کند. این نیرو در راستای محور x و رو به بالاست. نیروهای وارد بر جسم در راستای x و شتاب آن با رابطهٔ زیر به هم مربوط‌اند.



شکل (۱ ـ ۹۵)

$$m_A g \sin \alpha - F = m_A a_x \qquad (۴۲ ـ ۱)$$

$$F = m_A (g \sin \alpha - a_x) = ۵ (۱۰ \times ۰/۶ - ۵/۵۴) = ۲/۳ \text{ N}$$

در اینجا جهت نیروی F را از قبل پیش‌بینی و آن را رو به بالا فرض کرده‌ایم. پیش بینی جهت نیرو ضرورتی ندارد و می‌توان از حل معادله نیز آن را به دست آورد. فرض کنید بدون توجه، نیروی F را رو به پایین فرض می‌کردیم. در این صورت رابطهٔ (۱ ـ ۴۲) به صورت زیر در می‌آمد:

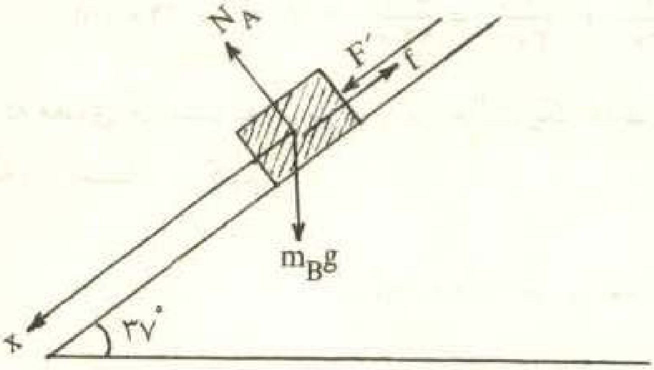
$$m_A g \sin \alpha + F = m_B a_x \qquad (۴۳ ـ ۱)$$

از رابطهٔ (۱ ـ ۴۳) برای F مقدار ۲/۳ N - به دست می‌آید. علامت منفی برای نیرویی که جهت مشخص را برای آن در نظر گرفته‌ایم، به معنی وارونه بودن جهت در نظر گرفته شده است. ملاحظه می‌شود که از حل معادله می‌توان جهت صحیح را به دست آورد.
این نیرو را می‌توان از بررسی حرکت جسم B نیز به دست آورد. نیروهای وارد بر جسم B در شکل (۱ ـ ۹۶) نشان داده و نیروی 'F از طرف جسم A بر جسم B وارد شده است. ملاحظه می‌شود که از حل معادله می‌توان جهت صحیح را به دست آورد.
نیروهای وارد بر جسم B در راستای سطح شیبدار و شتاب آن چنین است.

$$m_B g \sin \alpha + F - f = m_B a_x$$

$$F = m_B a_x + \mu m_B g \cos \alpha - m_B g \sin \alpha$$

$$F = ۲ \times ۵/۵۴ + ۰/۲ \times ۲ \times ۱۰ \times ۰/۸ - ۲ \times ۱۰ \times ۰/۶ = ۲/۲۸ N$$



شکل (۱ - ۹۶)

تفاوت دو عدد به دست آمده به علت گرد کردن شتاب a_x است. ملاحظه می‌شود که نیرویی که جسم A بر جسم B وارد می‌کند با نیرویی که جسم B بر جسم A وارد می‌کند اندازهٔ یکسانی دارد ولی در دو جهت مخالف هم هستند. دلیل آن این است که این دو نیرو کنش و واکنش (عمل و عکس‌العمل) هستند.

هنگامی که جسم B پایین می‌آید، نیروی اصطکاک کار انجام می‌دهد و کار آن به گرما تبدیل می‌شود. اندازهٔ کار نیروی اصطکاک چنین است.

$$W_f = f\ell = ۰/۲ \times ۲ \times ۱۰ \times ۰/۸ \times ۵۰ = ۱۶۰ J = ۳۲/۳ \text{ cal}$$

۳ـ فاصلهٔ کانونی یک عدسی از رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$\frac{1}{f} = (n - ۱)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (۴۴ - ۱)$$

در رابطهٔ (۱ - ۴۴)، f فاصلهٔ کانونی، n ضریب شکست عدسی نسبت به محیط اطراف و R_1 و R_2 شعاعهای انحنای دو طرف عدسی است. برای سطحهای برآمده شعاع انحنا مثبت و برای سطحهای گود منفی خواهد بود. اولاً فاصله کانونی عدسی در هوا چنین است:

$$\frac{1}{f_a} = (۱/۵ - ۱)\left(\frac{1}{۳۰} + \frac{1}{۳۰}\right) = \frac{1}{۳۰} \rightarrow f_a = ۳۰ \text{ cm}$$

ثانیاً ـ هنگامی که عدسی را در مایعی به ضریب شکست ۱/۶ قرار می‌دهیم، ضریب شکست

عدسی نسبت به مایع چنین است: $n = \frac{n_g}{n_\ell} = \frac{۱/۵}{۱/۶}$

فاصلهٔ کانونی عدسی در مایع چنین است:

$$\frac{۱}{f_\ell} = (\frac{۱/۵}{۱/۶} - ۱)(\frac{۱}{۳۰} + \frac{۱}{۳۰}) = \frac{-۱}{۲۴۰} \rightarrow f = -۲۴۰ \text{ cm}$$

علامت منفی به معنای آن است که عدسی در این حالت یک عدسی واگراست. برای یافتن تصویر از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم. $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = \frac{۱}{f}$

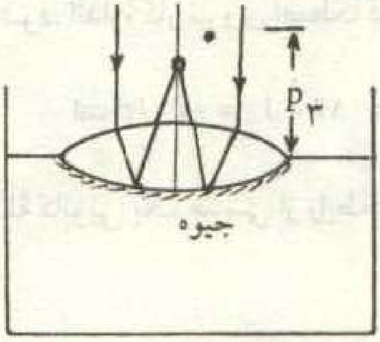
$$\frac{۱}{q} = \frac{۱}{-۲۴۰} - \frac{۱}{۶۰} \rightarrow q = -۴۸ \text{ cm}$$

علامت منفی به معنی آن است که تصویر مجازی است. اندازهٔ تصویر چنین است.

$$\frac{i}{o} = \frac{q}{p} \rightarrow i = \frac{-۴۸}{۶۰} \times ۱۰ = -۸ \text{ cm}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که تصویر مستقیم است.

ثانیاً ـ در شکل (۱ ـ ۹۷) عدسی روی سطح آزاد جیوه نشان داده شده است. برای یافتن همگرایی عدسی، یک دسته نور موازی با محور عدسی به آن می‌تابانیم و محل نهایی تصویر را به دست می‌آوریم.



شکل (۱ ـ ۹۷)

سطح جیوه‌ای که با عدسی در تماس است. مانند یک آینهٔ مقعر به شعاع ۳۰ cm عمل می‌کند. بنابراین دستگاه نوری از یک عدسی به فاصلهٔ کانونی ۳۰ cm و یک آینهٔ مقعر به فاصلهٔ کانونی ۱۵cm تشکیل شده است. برای پیدا کردن تصویر نهایی، ابتدا محل تصویر را در عدسی به دست می‌آوریم. اگر آینهٔ مقعروجود نداشت، دسته نوری موازی، در کانون عدسی به هم می‌رسید و یک نقطهٔ نورانی و به فاصلهٔ ۳۰ cm از عدسی به‌عنوان تصویر داشتیم که آن را تصویر شماره ۱ می‌نامیم. اما وجود آینهٔ مقعر مانع از تشکیل این تصویر می‌شود. تصویر شماره ۱ به عنوان جسم مجازی برای آینه به کار می‌رود و در آن تصویری می‌دهد که آن را با شماره ۲ مشخص می‌کنیم. محل این تصویر از رابطهٔ زیر به

دست می‌آید.

$$\frac{1}{-30} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{15} \rightarrow p_2 = 10 \text{ cm}$$

در رابطهٔ بالا چون جسم مجازی بوده است، فاصلهٔ آن تا آینه را با علامت منفی گذارده‌ایم. علامت مثبت برای p_2 نشان می‌دهد که تصویر حقیقی است، یعنی جلوی آینه تشکیل می‌شود، اما وجود عدسی در برابر آینه، مانع از تشکیل تصویر در این محل می‌شود. تصویر شماره ۲ برای عدسی به‌عنوان جسم مجازی به کار می‌رود و عدسی از آن تصویری به دست می‌دهد که آن را شماره ۳ می‌نامیم. فاصلهٔ تصویر شمارهٔ ۳ از عدسی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\frac{1}{-10} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{30} \rightarrow p_3 = 7/5 \text{ cm} = 7/5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

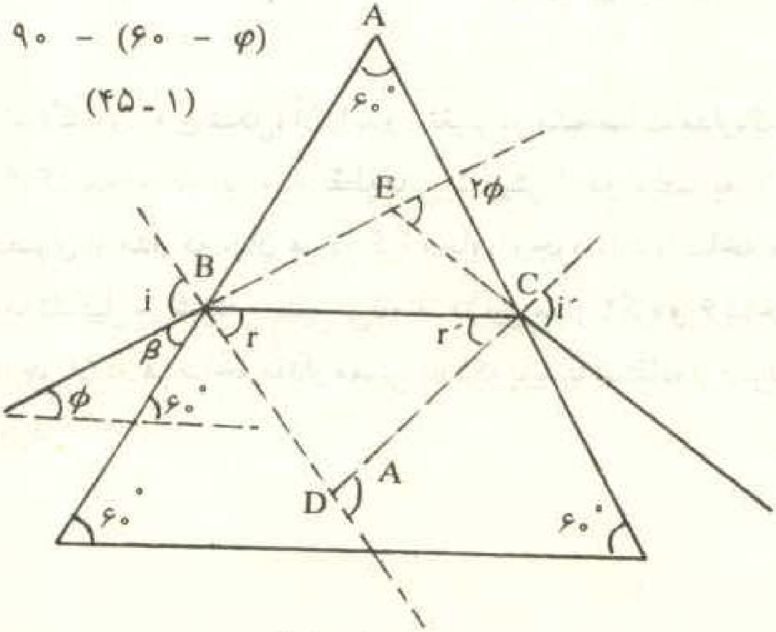
بنابراین یک دسته نور موازی که به عدسی بتابد، نهایتاً در نقطه‌ای به فاصلهٔ $7/5$ cm از آن جمع می‌شود که به منزله کانون عدسی است. برای همگرایی این عدسی داریم:

$$C = \frac{1}{f'} = \frac{1}{7/5 \times 10^{-2}} = 13/3 \quad \text{دیوپتر}$$

۴ـ از شکل (۱ ـ ۹۸) پیداست که $60 = \beta + \varphi$ و چون زاویهٔ تابش i متمم زاویهٔ β است، داریم:

$$i = 90 - \beta = 90 - (60 - \varphi)$$

$$i = \varphi + 30 \qquad (45-1)$$



شکل (۱ ـ ۹۸)

از مثلث BCE برای زاویهٔ انحراف داریم:

$$۲\varphi = (i - r)\ (i' + - r') = i + i' - r + r'$$

از مثلث BCD با توجه به اینکه زاویهٔ خارجی D با زاویهٔ رأس منشور برابر است (اضلاع آنها بر هم عمودند) داریم:

$$r + r' = A = ۶۰ \qquad (۱ - ۴۶)$$

پس

$$۲\varphi = i + i' - A \qquad (۱ - ۴۷)$$

اگر رابطه‌های (۱ - ۴۵) و (۱ - ۴۶) را در رابطهٔ (۱ - ۴۷) بگذاریم داریم:

$$۲\varphi = \varphi + ۳۰ + i' - ۶۰ \rightarrow i' = \varphi + ۳۰$$

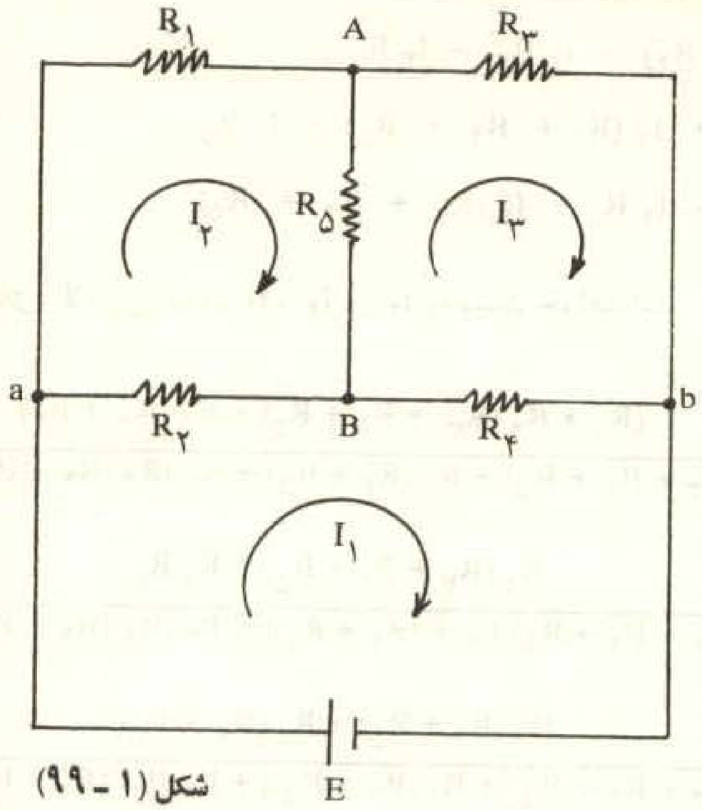
پس زاویهٔ تابش و زاویهٔ خروجی با هم برابرند و در نتیجه داریم:

$$r = r' = \frac{A}{۲} = ۳۰^{\circ}$$

$$\sin i = n \sin r \rightarrow \sin(\varphi + ۳۰) = \sqrt{۳}\ \sin ۳۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\varphi + ۳۰ = ۶۰^{\circ} \rightarrow \varphi = ۳۰^{\circ}$$

۵ - برای سهولت در نمادگذاری روی شکل، آن را بدون تغییر در مشخصات مدار، کمی متفاوت در شکل (۱ - ۹۹) کشیده‌ایم. در این مدار نقطه‌هائی که بیش از دو عنصر به آن وصل شده باشد را گره و عنصری از مدار که میان هر دو گرهٔ مجاور وجود دارد را شاخه و یک مسیر بسته که از شاخه‌ها تشکیل می‌شود را حلقه می‌نامند. در این مدار ۴ گره و ۶ شاخه و تعدادی حلقه وجود دارد. جریان در هر شاخه مقدار معینی دارد که باید با استفاده از قانونهای مربوط آنها را به دست آورد.



شکل (۱ ـ ۹۹)

برای به دست آوردن جریان در هر شاخه، نمادگذاری متفاوتی را به کار می‌بریم. به این ترتیب که در هر حلقه یک جریان که همهٔ حلقه را دور می‌زند فرض می‌کنیم. جهت این جریان کاملاً اختیاری است. این جریانها در شکل با I_1، I_2 و I_3 مشخص شده است. جریان در شاخه‌ای که میان دو حلقه مشترک است، جمع جبری جریان دو حلقهٔ مجاور خواهد بود. از روی شکل پیداست که با در دست داشتن جریانهای I_1، I_2، I_3، جریان تمام شاخه‌ها قابل محاسبه است. برای به دست آوردن این سه جریان، باید سه معادله نوشت. برای نوشتن معادله‌ها از یک نقطهٔ یک حلقه، آن را دور می‌زنیم و مجموع اختلاف پتانسیل‌ها را با استفاده از دو قاعده‌ای که پیشتر گفته شد می‌نویسیم و این کار را برای هر سه حلقه انجام می‌دهم. اگر حلقه‌ها را در جهت عقربه‌های ساعت دور بزنیم داریم:

$$E = R_2 (I_1 - I_2) + R_4 (I_1 - I_3)$$

$$0 = R_1 I_2 + R_5 (I_2 - I_3) + R_2 (I_2 - I_1)$$

$$0 = R_3 I_3 + R_4 (I_3 - I_1) + R_5 (I_3 - I_2)$$

در معادله‌های بالا در طرف چپ اختلاف پتانسیل‌های مثبت و در طرف راست مجموع اختلاف پتانسیل‌های منفی را نوشته‌ایم. اگر معادله‌ها را ساده کنیم، داریم:

$$E = I_1 (R_2 + R_4) - I_2 R_2 - I_3 R_4$$

$$0 = -I_1 R_2 + I_2 (R_1 + R_2 + R_5) - I_3 R_5$$

$$0 = -I_1 R_4 - I_2 R_5 + I_3 (R_3 + R_4 + R_5)$$

با حل معادله‌های بالا، جریانهای I_1، I_2 و I_3 به دست خواهد آمد.

$$I_1 = \frac{(R_1 + R_2 (R_3 + R_4 + R_5) + R_5 (R_3 + R_4)}{R_1 [R_2 (R_3 + R_4 + R_5) + R_4 (R_3 + R_5) + R_3 [R_2 (R_4 + R_5) + R_4 R_5]} E$$

$$I_2 = \frac{R_2 (R_3 + R_4 + R_5) + R_4 R_5}{R_1 [R_2 (R_3 + R_4 + R_5) R_4 + (R_3 + R_5)] + R_3 [R_2 (R_4 + R_5) + R_4 R_5]} E$$

$$I_3 = \frac{R_4 (R_1 + R_5) + R_2 (R_4 + R_5)}{R_1 [R_2 (R_3 + R_4 + R_5) + R_4 (R_3 + R_5)] + R_3 [R_2 (R_4 + R_5) + R_4 R_5]} E$$

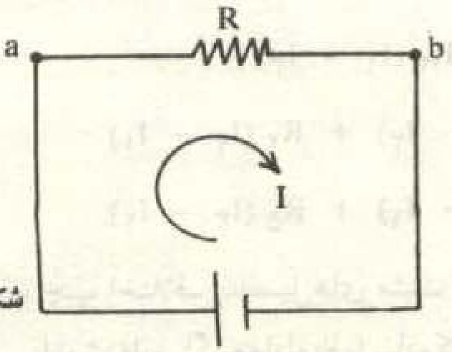
جریانی که از مقاومت R_5 می‌گذرد، تفاضل دو جریان I_2 و I_3 است، یعنی:

$$i_5 = I_2 - I_3$$

$$i_5 = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_1 [R_2 (R_3 + R_4 + R_5) + R_4 (R_3 + R_5)] + R_3 [R_2 (R_4 + R_5) + R_4 R_5]} E$$

منظور از مقاومت معادل مدار، مقاومتی‌است که اگر آن را میان دو نقطهٔ a و b ببندیم، همان جریانی که در مدار اصلی از باتری می‌گذرد، در مدار معادل هم همان جریان از باتری بگذرد. مدار معادل در شکل (۱ ـ ۱۰۰) رسم شده است. در مدار معادل جریانی که از باتری می‌گذرد، چنین است:

$$I = \frac{E}{R}$$



شکل (۱ ـ ۱۰۰)

با برابر قراردادن جریان باتری در دو حالت داریم:

$$I = I_1$$

$$R = \frac{R_1\,[R_2\,(R_3 + R_4 + R_5) + R_4\,(R_3 + R_5)] + R_3\,[R_2\,(R_4 + R_5 +)\,R_4\,R_5]}{(R_1 + R_2)\,(R_3\,R + _4 + R_5) + R_5\,(R_3 + R_4)}$$

در حالتی که اختلاف پتانسیل دو سر مقاومتهای R_3 و R_4 برابر باشد، پتانسیل نقاط A و B یکسان است. به عبارت دیگر اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_5 صفر است و جریانی که از آن می‌گذرد، صفر خواهد بود.

$$i_5 = \rightarrow R_1\,R_4 - R_2\,R_3 = 0$$

$$R_1\,R_4 = R_2\,R_3$$