به نام خدا

راه حل سوال اول – پایه سوم

فرض کنید چنین اتفاقی نمی‌افتد.
هر ستونی را در نظر بگیرید که حداقل یک مهره‌ی رنگی دارد اما تمام خانه‌های آن دارای مهره‌ی رنگی نیست. بالاترین مهره‌ی رنگی که در خانه‌ی مجاور و پایین آن مهره‌ی رنگی قرار ندارد را در نظر بگیرید. با توجه به فرض خانه‌ی پایین این مهره باید خالی باشد. پس در این ستون خانه‌ی خالی‌ای وجود دارد که خانه‌ی بالای آن دارای مهره‌ی رنگی است.
به همین ترتیب ثابت می‌شود به ازای هر ستونی که حداقل یک مهره‌ی سفید دارد اما تمام خانه‌های آن دارای مهره‌ی سفید نیست یک خانه‌ی خالی داریم که خانه‌ی بالای آن دارای مهره‌ی سفید است.

هر سطری را در نظر بگیرید که حداقل یک مهره‌ی رنگی دارد اما تمام خانه‌های آن دارای مهره‌ی رنگی نیست. چپ‌ترین مهره‌ی رنگی که در خانه‌ی سمت راست و مجاور ان مهره‌ی رنگی قرار ندارد را در نظر بگیرید. با توجه به فرض خانه‌ی سمت راست این خانه باید خالی باشد. پس در این سطر خانه‌ی خالی‌ای وجود دارد که خانه‌ی سمت چپ ان دارای مهره‌ی رنگی است
به همین ترتیب ثابت می‌شود در هر سطر شامل حداقل یک مهره‌ی سفید که تمام خانه‌های آن دارای مهره‌ی سفید نیست یک خانه ی خالی داریم که خانه‌ی سمت چپ آن دارای مهره‌ی سفید است.

جدول را بعد از ۴۵مین رنگ آمیزی در نظر بگیرید.
اگر سطری باشد که در تمام خانه‌های آن مهره‌ی رنگی قرار داشته باشد پس در تمامی ستون‌ها حداقل یک مهره‌ی رنگی وجود دارد. پس حداقل شش ستون داریم که در آن حداقل یک مهره‌ی رنگی وجود دارد اما تمام خانه های آن دارای مهره‌ی رنگی نیست. در هر یک از این ستون‌ها خانه‌ای خالی وجود دارد که خانه‌ی بالای آن دارای مهره‌ی رنگی است. همچنین چون هر ستون حداقل یک مهره‌ی رنگی دارد هیچ ستونی وجود ندارد که تمام خانه‌های آن دارای مهره‌ی سفید باشد. پس چون حداقل ۵ ستون هستند که حداقل یک مهره‌ی سفید دارند حداقل ۵ خانه‌ی خالی وجود دارند که خانه‌ی بالای آن‌ها دارای مهره‌ی سفید است. این پنج خانه با شش خانه‌ی قبل متفاوتند. زیرا مهره‌ی درون خانه‌ی بالای این پنج خانه رنگ متفاوتی با رنگ مهره‌ی درون خانه‌ی بالای شش خانه‌ی قبل دارد. پس یازده خانه‌ی خالی در جدول وجود دارد. درحالی که در تمامی مراحل ۹ خانه‌ی خالی داریم.
به همین ترتیب اگر سطری باشد که در تمام خانه‌های آن مهره‌ی سفید قرار داشته باشد به تناقض می‌رسیم.

پس فرض کنید هیچ سطری نیست که در تمام خانه های آن مهره‌ی رنگی قرار داشته باشد. و همچنین فرض کنید هیچ سطری نیست که در تمام خانه‌های آن مهره‌ی سفید قرار داشته باشد. چون حداقل پنج سطر شامل مهره‌ی رنگی داریم پس پنج خانه‌ی خالی داریم که خانه‌ی سمت چپ آن‌ها دارای مهره‌ی رنگی است. همچنین حداقل پنج سطر شامل

مهره‌ی سفید داریم پس پنج خانه‌ی خالی داریم که خانه‌ی سمت چپ آن‌ها دارای مهره‌ی سفید است و چون رنگ مهره‌ی خانه ی سمت چپ این پنج خانه با پنج خانه‌ی قبل متفاوتند پس خود این پنج خانه نیز با پنج خانه‌ی قبل متفاوتند. پس در جدول حداقل ده خانه‌ی خالی وجود دارد. که این نیز تناقض است.
پس حتما چنین اتفاقی می افتد.

به نام خدا

راه حل سوال دوم – پایه سوم

به استقرا روی n ثابت می‌کنیم در هر گراف n راسی با حداقل $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 2$ یال مانند G دو مثلث وجود دارند که در دقیقا یک راس مشترکند. در هر دو بخش پایه و گام فرض می کنیم G دقیقا $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 2$ یال دارد و حکم را ثابت می‌کنیم. در این صورت اگر گرافی با بیشتر از این تعداد یال داشته باشیم به دلخواه یال‌های آن را حذف می‌کنیم تا به گرافی با دقیقا همین تعداد یال تبدیل شود.

پایه: $n = 5$: در این گراف دقیقا ۸ یال داریم. پس حتما در آن راسی با درجه‌ی ۴ وجود دارد. آن راس را u بنامید. در بین سایر رئوس اگر دو یال مانند ab و cd باشد که در هیچ یک از دو سرشان اشتراکی با یکدیگر نداشته باشند دو مثلث uab و ucd در شرایط مسئله صدق می‌کنند. پس فرض کنید هر دو یالی در حداقل یک راس با هم مشترک باشند. پس حداکثر ۳ یال در بین ۴ راس دیگر وجود دارد. که درنتیجه در گراف حداکثر ۷ یال وجود دارد که تناقض است. پس این حالت رخ نمی‌دهد و حکم برقرار است.

گام: اگر $\delta_G \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$: در این صورت با کندن رأس با درجه‌ی کمینه حداکثر $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ یال حذف می‌شوند. می‌دانیم:(برای اثبات می‌توان روی زوجیت n حالت‌بندی کرد)

$$\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor - \lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \tag{1}$$

پس درنتیجه با حذف یال‌های متصل به رأس با درجه‌ی کمینه تعداد یال‌های گراف باقی‌مانده حداقل $\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor$ هست. پس در شرط استقرا صدق می‌کند. پس حکم ثابت می‌شود. در غیر این‌صورت پس $G\delta_G \ge \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ حداقل $\frac{n*\delta_G}{2}$ یال دارد. می‌دانیم:

$$\frac{n*\delta_G}{2} \ge \frac{n*(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)}{2} = \frac{n*\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} + \frac{n}{2} \tag{2}$$

به ازای $n = 6$ و $n \ge 8$ این عبارت اکیدا بیشتر از $\frac{n^2}{4} + 2$ است(برای اثبات می‌توان روی زوجیت n حالت‌بندی کرد) که با فرض برابری تعداد یال‌ها با این مقدار متناقض است. پس چنین حالتی رخ نداده و حکم برقرار است.
برای $n = 7$ در این صورت چون $\delta_G \ge 4$ و گراف ۱۴ یالی است گراف ۴ منتظم است. یک یال دلخواه uv را در نظر بگیرید. حکم را با حالت‌بندی روی تعداد همسایه‌های مشترک u و v ثابت می‌کنیم. u و v حتما همسایه‌ی مشترک دارند زیرا در غیر این‌صورت هریک حداقل ۳ همسایه‌ی دیگر دارند که درنتیجه گراف باید حداقل ۸ راسی باشد. همچنین درجه‌ی هرکدام ۴ است و چون هر یک همسایه‌ی دیگری است پس حداکثر ۳ همسایه‌ی مشترک دارند.

- اگر دقیقا یک همسایه‌ی مشترک داشته باشند: این همسایه‌ی مشترک را a بنامید. دو همسایه‌ی دیگر u را b و c و دو همسایه‌ی دیگر v را d و e بنامید. اگر یال bc و یا de وجود داشته باشد دو مثلث auv و vde یا ubc در شرایط

مسئله صدق می‌کنند. پس فرض کنید این یال‌ها وجود ندارند. پس b و d باید به a وصل باشند. پس دو مثلث adv و abu در شرایط مسئله صدق می‌کنند.(علت وجود یال‌های ab و ad چهار منتظم بودن گراف است)

- اگر دقیقا دو همسایه‌ی مشترک داشته باشند: دو همسایه‌ی مشترک را a و b بنامید و همسایه‌ی دیگر u را c بنامید. c به حداقل یکی از a یا b وصل است. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض کنید به a وصل باشد. پس دو مثلث uac و uvb در شرایط خواسته شده صدق می‌کنند

- اگر دقیقا سه همسایه‌ی مشترک داشته باشند: سه همسایه‌ی مشترک را a, b و c بنامید. فرض کنید یالی در بین این سه راس وجود دارد و بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید این یال یال ab است. پس دو مثلث uab و vuc در شرط مسئله صدق می‌کنند. پس فرض کنید چنین یالی وجود ندارد. پس هر یک از این رئوس به هر دو رأس باقیمانده یال دارند.

  دو راس دیگر گراف حتما باید به هم وصل باشند. این دو رأس را d و e بنامید. دو مثلث uav و ade در شرط مسئله صدق می‌کنند.

پس حکم اثبات می‌شود.

هر یک از نقاط را معادل یک راس در گراف و هر خط را معادل یک یال در آن گراف در نظر بگیرید. در این‌صورت اثبات بالا معادل اثبات حکم مسئله است.

به نام خدا

راه حل سوال سوم - پایه سوم

ثابت می‌کنیم این کار امکان‌پذیر است اگر و تنها اگر n زوج باشد و $n \geq ۴$.

اگر n زوج باشد و $n \geq ۴$: به استقرا روی n اثبات می کنیم که می‌توانیم سکه‌ی تقلبی را شناسایی کرده و مشخص کنیم سنگین‌تر از سکه‌ي اصل است یا سبک‌تر.
پایه: $n = ۴$: سکه ها را به دو دسته‌ی دوتایی تقسیم می‌کنیم. وزن دو دسته با هم برابر نیست. دو سکه‌ی درون دو دسته‌ی سنگین‌تر را با هم مقایسه می‌کنیم. اگر با هم برابر نباشند سکه‌ی سنگین‌تر سکه‌ی تقلبی است. وگرنه دو سکه‌ی درون دسته‌ی دیگر را مقایسه می‌کنیم و سکه‌ی سبک‌تر سکه‌ی تقلبی است.
گام: دو سکه‌ی دلخواه را انتخاب کرده و هر یک را در یکی از دو کفه‌ی ترازو می‌گذاریم. اگر وزن این دو سکه با هم برابر باشد آن دو سکه حتما اصل هستند. آن‌ها را کنار می‌گذاریم. طبق استقرا در بین $n - ۲$ سکه‌ی دیگر می‌توان به هدف مورد نظر رسید. درغیراین‌صورت حتما یکی از این دو سکه تقلبی هستند. سکه‌ی سنگین‌تر را با یکی از $n - ۲$ سکه‌ی دیگر مقایسه می‌کنیم. اگر وزنشان برابر بود سکه‌ی دیگر تقلبی است و وزن آن سبک‌تر از سکه‌های اصل است. درغیراین‌صوررت این سکه تقلبی است و وزن آن سنگین‌تر از سکه‌های اصل است.

اگر $n = ۲$: دراین‌صورت نمی‌توان تشخیص داد کدام سکه تقلبی و کدام اصل است. پس کار خواسته‌شده ممکن نیست.

اگر n فرد باشد یا: وزن سکه‌ی اصل را با $w۱$ و وزن سکه‌ی تقلبی را با $w۲$ نشان می‌دهیم. دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

۱. $w۱ = ۱۰۰۰, w۲ = ۱۰۰۱$

۲. $w۱ = ۱۰۰۰, w۲ = ۹۹۹$

فرض کنید وزن سکه‌ها یکی از این دوحالت باشد. به استقرا روی n ثابت می‌کنیم که اگر n فرد باشد نمی‌توان تشخیص داد کدام‌یک از این دو حالت مطابق با وزن سکه‌ها هستند.
پایه: $n = ۱$ چون سکه‌ی اصلی وجود ندارد نمی‌توان فهمید سکه‌ی تقلبی سبک‌تر است یا سنگین‌تر.
گام: فرض کنید بتوان کار گفته شده را انجام داد. پس اگر وزن سکه‌ها مطابق با یکی از دوحالت بالا باشد می‌توان آن حالت را تشخیص داد. همچنین در هر یک از این دو حالت می‌توان سکه‌ی تقلبی را نیز مشخص کرد. پس اگر وزن سکه‌ها مطابق با یکی از دو حالت بالا باشد می‌توان از $۲n$ وضعیت ممکن(حالت وزن سکه‌ها و محل سکه‌ی تقلبی) وضعیت فعلی را تشخیص داد. اگر تعداد سکه‌ها در دو طرف کفه‌ی ترازو برابر نباشد در هیچ یک از دو حالت بالا نتیجه

به سکه‌ها بستگی ندارد بلکه همواره کفه‌ی با سکه‌ی بیشتر وزن بیشتری دارد پس هیچ یک از وضعیت‌ها را از مجموعه‌ی وضعیت‌های ممکن حذف نمی‌کند.

اولین باری که تعداد سکه‌ها در دو کفه‌ی ترازو برابر است را در نظر بگیرید و فرض کنید وزن دو کفه برابر باشد. در این صورت همه‌ی این سکه‌ها اصل هستند. پس از این به بعد هیچ‌یک از این سکه‌ها روی کفه‌ی ترازو قرار نمی‌گیرد. پس اگر در هر کفه k سکه باشد مسئله معادل با تشخیص وضعیت فعلی از بین $۲(n - ۲k)$ وضعیت ممکن برای $n - ۲k$ سکه‌ی باقیمانده است که طبق استقرا ممکن نیست. پس این‌کار برای n سکه نیز ممکن نیست.

به نام خدا

راه حل سوال چهارم - پایه سوم

الف) فرض کنید جمله‌های دنباله را با شروع از صفر شماره‌گذاری می‌کنیم. یعنی جمله‌ی شماره‌ی صفر دنباله صفر و جمله‌های شماره‌ی یک و دوی دنباله یک هستند.
فرض کنید $f(n)$ جمله‌ی شماره‌ی n دنباله باشد. ثابت می‌کنیم اگر در نمایش دودویی n فرد یک وجود داشته باشد $f(n)$ یک است و در غیر این صورت $f(n)$ برابر صفر است. به عبارت دیگر اگر تعداد رقم‌های یک در نمایش دودویی عدد n را با $g(n)$ نمایش دهیم $f(n)$ برابر با باقیمانده‌ی $g(n)$ بر ۲ است.
حکم را به استقرا روی n ثابت می کنیم.
پایه: $n = ۰$ در نمایش دودویی عدد صفر، صفر عدد یک وجود دارد. پس تعداد یک ها درنمایش دودویی عدد صفر زوج است و $f(۰) = ۰$ پس حکم برقرار است.
گام: فرض k بزرگترین عدد طبیعی باشد که به ازای آن $n \leq ۲^k$. در این صورت جمله‌ی شماره‌ی n دنباله برابر مکمل جمله‌ی شماره‌ی $n - ۲^k$ است. زیرا جملات شماره‌ی ۲^k الی $۲^{k+۱} - ۱$ دنباله مکمل جملات شماره ی صفر الی $۲^k - ۱$ هستند. پس می‌توان نوشت:

$$f(n) = ۱ - f(n - ۲^k) \tag{۱}$$

$$g(n) = g(n - ۲^k) + ۱ \tag{۲}$$

درنتیجه:

$$g(n) \equiv ۱ - g(n - ۲^k) \pmod{۲} \tag{۳}$$

پس حکم برقرار است.

ب) فرض کنید دنباله متناوب باشد و دوره تناوبی به طول $x > ۰$ داشته باشد. در این صورت پس $f(a + x) = f(a)$
پس $f(۰) = f(x) = ۰$
از طرفی اگر k بزرگترین عدد طبیعی باشد که $x =< ۲^k$ پس

$$f(۲^k + x) = f(۲^k) = ۱ \tag{۴}$$

از طرفی می دانیم:

$$۲^k + x = ۲^k + (۲^k + (x - ۲^k)) = ۲^{k+۱} + (x - ۲^k) \tag{۵}$$

پس تعداد رقم های یک x و $x + ۲^k$ با هم برابرند. پس $f(۲^k + x) = f(x) = ۱$. درحالی که ثابت کردیم $f(x) = ۰$.
این تناقض عدم درستی فرض خلف را نتیجه می‌دهد. پس چنین xی وجود ندارد.