کنترل خطی

جلسه پنجم

استاد : اصفهانیان

رشته :کارشناسی ارشد مکاترونیک

دانشگاه : آزاد واحد کاشان

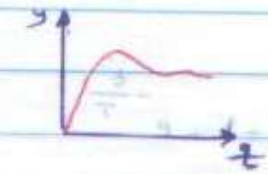
تهیه وتنظیم : ابراهیم شهنازی

سرفصل مطالب

تحلیل پاسخ حالت گذرا و حالت ماندگار:

سیستم

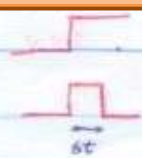
$$U(s) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow y(s)$$



$$y(s) = G(s) \times U(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

ورودیهای استاندارد :

۱) ورودی پله :



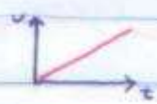
$$U(s) = \frac{1}{s}$$

۲) ورودی ضربه :

$$\delta(t) = \frac{d\,u(t)}{dt}$$

۳) ورودی شیب : (سرعت)

$$u(t) = t$$



$$U(s) = \frac{1}{s^2}$$

۴) ورودی سهموی: (شتاب)

$$u(t) = t^2$$

$$U(s) = \frac{2}{s^3}$$

سیستم مرتبه اول : (حالت ورودی پله)

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

ثابت زمانی

در اینجا ورودی پله واحد را به سیستم اعمال می‌کنیم و پاسخ را بدست می‌آوریم.

$$U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow y(s) = \frac{1}{Ts+1} \times \frac{1}{s}$$

به روش تجزیه تفکیک می‌کنیم.

$$= \frac{a_1}{Ts+1} + \frac{a_2}{s} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} \rightarrow \frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

T فاکتور از

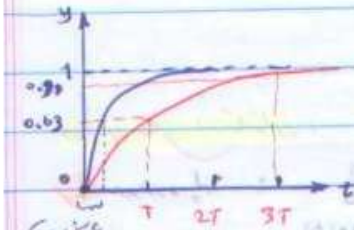
$$a_1 = \frac{1}{s}\Big|_{s=-\frac{1}{T}} = \boxed{-T}$$

$$a_2 = \frac{1}{Ts+1}\Big|_{s=0} = \boxed{1}$$

به s مقدار ریشه مخرج a را قرار دادیم

$$U(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-\frac{1}{T}}$$

$$\xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$



شرایط اولیه و نهایی آن بررسی می‌شود

$t=0 \rightarrow y = 1-1 = 0$

$t=\infty \rightarrow y = 1-0 = 1$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 1 \qquad T>0$$

سیستم پایدار

اگر در این سیستم $T<0$ باشد حالت ناپایدار به وجود می‌آید

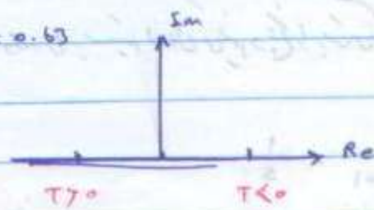
مفهوم پایداری :

سیستمی پایدار خواهد بود که هرگاه t به سمت ∞ میل کند و y آن محدود باشد

ریشه های مخرج را بنویسیم $\rightarrow s = \frac{-1}{T}$

یک سیستم زمانی پایدار است که ریشه های مخرج تابع تبدیل آن در سمت چپ محور موهومی قرار بگیرد.

$$y(t) = 1 - e^{-1} = 0.63$$



هرچه T↓ باشد سرعت پاسخ سیستم بیشتر است.

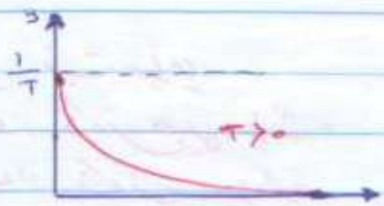
$y(t) = y_{tr}(t) + y_{ss}(t)$

$y_{ss}(t) = \lim_{t \to \infty} y(t)$

سیستم مرتبه اول : (حالت ورودی ضربه)

$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$

$U(s) = 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{Ts+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$



$t \to 0 \Rightarrow y = \frac{1}{T} \times 1 = \frac{1}{T}$

$t \to \infty \Rightarrow y = \frac{1}{T} \times 0 = 0 \quad \Leftarrow T > 0$

سیستم مرتبه اول : (حالت ورودی شیب)

$G(s) = \boxed{\frac{1}{Ts+1}}$

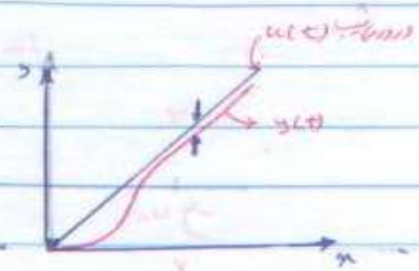
$U(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{Ts+1} \times \frac{1}{s^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} ?$

$\Rightarrow \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1}$

$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t - T + T e^{-\frac{t}{T}}$

$e(t) = u(t) - y(t)$

خطای سیستم



$$e(t) = u(t) - y(t) = t - \left[t - T + Te^{-\frac{t}{T}}\right] = T - Te^{-\frac{t}{T}}$$

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = T$$

[illegible]

سیستم مرتبه دوم :

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ζ : نسبت میرایی

ω_n : فرکانس طبیعی میرا نشده

ω_d : فرکانس میرا شده

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

الف) حالت ورودی پله

۱) دو ریشه مختلط داشته باشیم :

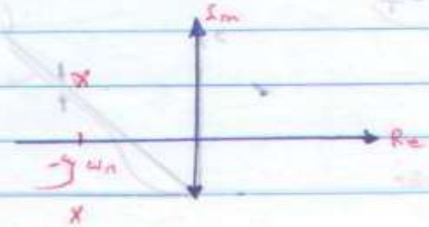
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2 = 4\omega_n^2(\zeta^2 - 1)$$

$$\boxed{0 < \zeta < 1}$$

$$\zeta^2 - 1 < 0 \Rightarrow \zeta^2 < 1$$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm 2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}{2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$



$$y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \times \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} - \boxed{\frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}$$

به طریق مربع کامل کردن:

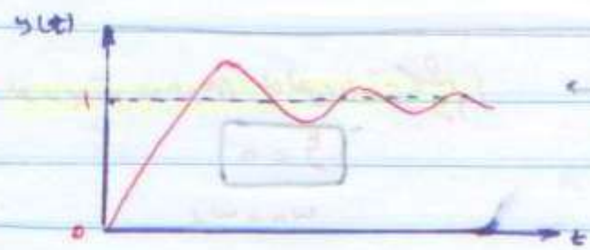
$$= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \underbrace{\omega_n^2 - \zeta^2\omega_n^2}_{\omega_d^2}}$$

بر طبق تبدیل لاپلاس:

$$= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n \times \omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \times \frac{1}{\omega_d}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos\omega_d t + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\sin\omega_d t\right]$$

$$\Rightarrow y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right]$$



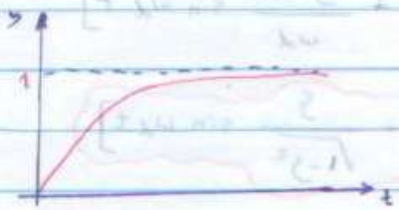
۲) دو ریشه مضاعف داشته باشیم :

$\boxed{\xi = 1}$

$s_{1,2} = -\xi \omega_n$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \times \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} \times \frac{1}{s}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)$$



۳) دو ریشه موهومی خالص داشته باشیم :

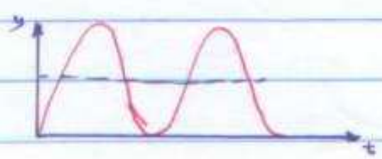
$\boxed{\xi = 0}$

$s_{1,2} = \pm j\omega_d = \pm j\omega_n$ $\omega_n = \omega_d$

$$y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}\left[\cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t\right]$$

$y(t) = 1 - \cos \omega_n t$ به ازای $\xi = 0$

سیستم پایدار نوسانی :

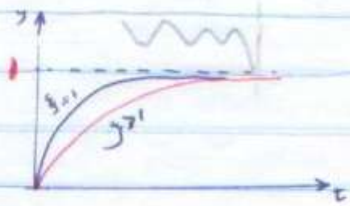


۴) دو ریشه حقیقی داشته باشیم :

$\boxed{\zeta > 1}$

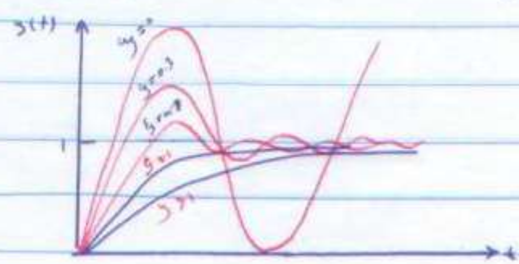
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cosh\left(\sqrt{\zeta^2-1}\,t\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\sinh\left(\sqrt{\zeta^2-1}\,t\right)\right]$$



نتیجه گیری :

1. $0 < \zeta < 1$ حالت زیر میرا (under damped) – دو ریشه مختلط
2. $\zeta = 1$ حالت میرای بحرانی (critical damped) – دو ریشه مضاعف
3. $\zeta = 0$ حالت غیر میرا (un damped) – دو ریشه موهومی
4. $\zeta > 1$ حالت فوق میرا (over damped) – دو ریشه حقیقی

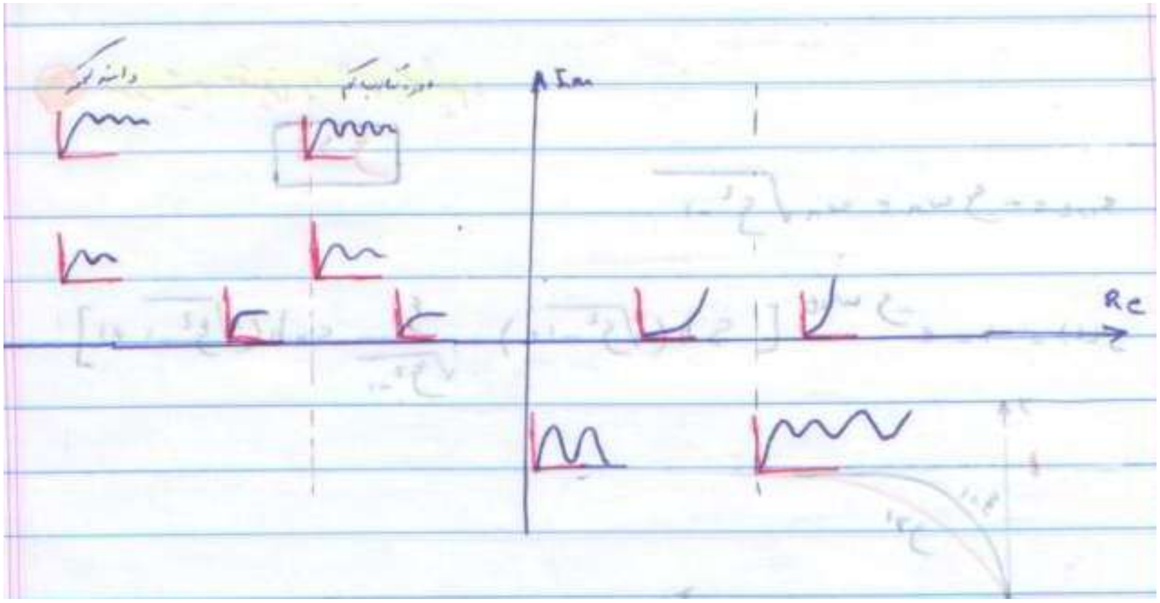


$\uparrow$ جهش اولیه $\longrightarrow \zeta\downarrow$

$\downarrow$ سرعت پاسخ $\longrightarrow \zeta\downarrow$

$\boxed{0.4 < \zeta < 0.8}$

بهترین حالت


Im
Re