۱- تقریب تفاضل مرکزی مرتبه $(\Delta x)^2$ را برای $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ به دست آورید.

حل: با توجه به رابطه بیان شده در کتاب هافمن برای تقریب تفاضل مرکزی مرتبه فرد مشتقات یک تابع خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\Big|_i = \frac{\Delta_x^n f_{i-\frac{n-1}{2}} + \nabla_x^n f_{i+\frac{n-1}{2}}}{2(\Delta x)^n} + O(\Delta x)^2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_i = \frac{\Delta_x^3 f_{i-1} + \nabla_x^3 f_{i+1}}{2(\Delta x)^3} + O(\Delta x)^2$$

داریم:

$$\Delta_x^3 f_{i-1} = \Delta_x^2 (f_i - f_{i-1}) = \Delta_x\big((f_{i+1} - f_i) - (f_i - f_{i-1})\big) = \Delta_x(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})$$

$$= ((f_{i+2} - f_{i+1}) - 2(f_{i+1} - f_i) + (f_i - f_{i-1})) = (f_{i+2} - 3f_{i+1} + 3f_i - f_{i-1})$$

و همچنین داریم:

$$\nabla_x^3 f_{i+1} = \nabla_x^2 (f_{i+1} - f_i) = \nabla_x((f_{i+1} - f_i) - (f_i - f_{i-1})) = \nabla_x(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})$$

$$= \big((f_{i+1} - f_i) - 2(f_i - f_{i-1}) + (f_{i-1} - f_{i-2})\big) = (f_{i+1} - 3f_i + 3f_{i-1} - f_{i-2})$$

با جایگزاری در فرمول اولیه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_i = \frac{(f_{i+2} - 3f_{i+1} + 3f_i - f_{i-1}) + (f_{i+1} - 3f_i + 3f_{i-1} - f_{i-2})}{2(\Delta x)^3} + O(\Delta x)^2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_i = \frac{(f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2})}{2(\Delta x)^3} + O(\Delta x)^2$$

۲- تقریب تفاضل پسروی $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ از مرتبه (Δx) با استفاده از نقاط f_i ، f_{i-1} ، f_{i-2} ، f_{i-3} از روش‌های زیر به دست آورید.

الف) بسط سری تیلور

$$f_i = f(x)$$

$$f_{i-1} = f(x - \Delta x) = f(x) - (\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \pm \cdots$$

$$f_{i-2} = f(x - 2\Delta x) = f(x) - (2\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(2\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \pm \cdots$$

$$f_{i-3} = f(x - 3\Delta x) = f(x) - (3\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(3\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(3\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \pm \cdots$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_i = \frac{af_i + bf_{i-1} + cf_{i-2} + df_{i-3}}{(\Delta x)^3} + O(\Delta x)$$

حال باید مقادیر چهار سطر فوق را در این معادله جاگذاری و مقادیر a تا d را از دستگاه معادلات زیر بیابیم:

$$\left\{\begin{array}{c}\Delta x^0 \rightarrow a+b+c+d=0 \\ \Delta x^1 \rightarrow -b-2c-3d=0 \\ \Delta x^2 \rightarrow \dfrac{b+4c+9d}{2}=0 \\ \Delta x^3 \rightarrow \dfrac{-b-8c-27d}{6}=1\end{array}\right\} \rightarrow a=1\,, b=-3\,, c=+3\,, d=-1$$

$$\rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_i = \frac{f_i-3f_{i-1}+3f_{i-2}-f_{i-3}}{(\Delta x)^3}+O(\Delta x)$$

ب) استفاده از یک رابطه تفاضل پسروی برگشتی

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_i = \frac{\nabla_x^3 f_i}{(\Delta x)^3}+O(\Delta x)$$

$$\nabla_x^3 f_i = \nabla_x^2(f_i-f_{i-1}) = \nabla_x((f_i-f_{i-1})-(f_{i-1}-f_{i-2})) = \nabla_x(f_i-2f_{i-1}+f_{i-2})$$

$$((f_i-f_{i-1})-2(f_{i-1}-f_{i-2})+(f_{i-2}-f_{i-3})) = (f_i-3f_{i-1}+3f_{i-2}-f_{i-3})$$

$$\rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_i = \frac{(f_i-3f_{i-1}+3f_{i-2}-f_{i-3})}{(\Delta x)^3}+O(\Delta x)$$

ج) استفاده از یک چند جمله‌ای مرتبه سوم که از چهار نقطه بالا بگذرد.

مبدا را در نقطه $x_i=0$ قرار می دهیم و داریم:

$$f(x) = Ax^3+Bx^2+Cx+D\,, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=6A$$

$$f_i = Ax_i^3+Bx_i^2+Cx_i+D = D \ \rightarrow D=f_i \ \textit{(i)}$$

$$f_{i-1} = Ax_{i-1}^3+Bx_{i-1}^2+Cx_{i-1}+D = -A(\Delta x)^3+B(\Delta x)^2-C(\Delta x)+D \ \textit{(ii)}$$

$$f_{i-2} = Ax_{i-2}^3+Bx_{i-2}^2+Cx_{i-2}+D = -8A(\Delta x)^3+4B(\Delta x)^2-2C(\Delta x)+D \ \textit{(iii)}$$

$$f_{i-3} = Ax_{i-3}^3+Bx_{i-3}^2+Cx_{i-3}+D = -27A(\Delta x)^3+9B(\Delta x)^2-3C(\Delta x)+D \ \textit{(iv)}$$

$$(ii) \rightarrow C(\Delta x) = -A(\Delta x)^3+B(\Delta x)^2+f_i-f_{i-1}$$

$$(iii) \rightarrow B(\Delta x)^2 = \frac{f_{i-2}+8A(\Delta x)^3-f_i-2A(\Delta x)^3+2B(\Delta x)^2+2f_i-2f_{i-1}}{4}$$

$$(iii) \rightarrow B(\Delta x)^2 = \frac{f_{i-2}+8A(\Delta x)^3-f_i-2A(\Delta x)^3+2f_i-2f_{i-1}}{2},$$

$$\rightarrow C(\Delta x) = -A(\Delta x)^3+\frac{f_{i-2}+8A(\Delta x)^3-f_i-2A(\Delta x)^3+2f_i-2f_{i-1}}{2}+f_i-f_{i-1}$$

$$(iv) \rightarrow A(\Delta x)^3 = \frac{f_{i-3} - 9\frac{f_{i-2} + 8A(\Delta x)^3 - f_i - 2A(\Delta x)^3}{4}}{-27} + 3\left(-A(\Delta x)^3 + \frac{f_{i-2} + 8A(\Delta x)^3 - f_i - 2A(\Delta x)^3 + 2f_i - 2f_{i-1}}{2} + f_i - f_{i-1}\right) - f_i$$

$$\rightarrow A = \frac{f_{i-3} - 3f_{i-2} + 3f_{i-1} - f_i}{-6(\Delta x)^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6A = \frac{(f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3})}{(\Delta x)^3}$$

۳- تقریب تفاضل پیشروی مرتبه (Δx) را برای $\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}$ به دست آورید.

حل: طبق روابط داریم:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}|_i = \frac{\Delta_x^n f_i}{(\Delta x)^n} + O(\Delta x)$$

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}|_i = \frac{1}{(\Delta x)^6}\Delta_x^6 f_i + O(\Delta x)$$

$$\Delta_x^6 f_i = \Delta_x^5(\Delta_x f_i) = \Delta_x^5(f_{i+1} - f_i) = \Delta_x^4(\Delta_x f_{i+1} - \Delta_x f_i)$$

$$= \Delta_x^4[(f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i)] = \Delta_x^4(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i)$$

$$= \Delta_x^3(\Delta_x f_{i+2} - 2\Delta_x f_{i+1} + \Delta_x f_i) = \Delta_x^3(((f_{i+3} - f_{i+2}) - 2((f_{i+2} - f_{i+1}) + ((f_{i+1} - f_i))$$

$$= \Delta_x^3(f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i) = \Delta_x^2(\Delta_x f_{i+3} - 3\Delta_x f_{i+2} + 3\Delta_x f_{i+1} - \Delta_x f_i)$$

$$= \Delta_x^2[(f_{i+4} - f_{i+3}) - 3(f_{i+3} - f_{i+2}) + 3(f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i)]$$

$$= \Delta_x^2(f_{i+4} - 4f_{i+3} + 6f_{i+2} - 4f_{i+1} + f_i) = \Delta_x(\Delta_x f_{i+4} - 4\Delta_x f_{i+3} + 6\Delta_x f_{i+2} - 4\Delta_x f_{i+1} + \Delta_x f_i)$$

$$= \Delta_x[(f_{i+5} - f_{i+4}) - 4(f_{i+4} - f_{i+3}) + 6(f_{i+3} - f_{i+2}) - 4(f_{i+2} - f_{i+1}) + (f_{i+1} - f_i)]$$

$$= \Delta_x(f_{i+5} - 5f_{i+4} + 10f_{i+3} - 10f_{i+2} + 5f_{i+1} - f_i)$$

$$= (\Delta_x f_{i+5} - 5\Delta_x f_{i+4} + 10\Delta_x f_{i+3} - 10\Delta_x f_{i+2} + 5\Delta_x f_{i+1} - \Delta_x f_i)$$

$$= [(f_{i+6} - f_{i+5}) - 5(f_{i+5} - f_{i+4}) + 10(f_{i+4} - f_{i+3}) - 10(f_{i+3} - f_{i+2}) + 5(f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i)$$

$$= (f_{i+6} - 6f_{i+5} + 15f_{i+4} - 20f_{i+3} + 15f_{i+2} - 6f_{i+1} + f_i)$$

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}|_i = \frac{1}{(\Delta x)^6}[f_{i+6} - 6f_{i+5} + 15f_{i+4} - 20f_{i+3} + 15f_{i+2} - 6f_{i+1} + f_i] + O(\Delta x)$$

۴- با استفاده از یک چند جمله ای مرتبه دوم، تقریب تفاضل پسروی $\frac{\partial f}{\partial x}$ را به دست آورید. از نقاط شبکه با فواصل نامساوی (همانند تصویر ۱) استفاده کنید.

حل: چون مقدار مبدا x_i در شکل مشخص نشده، آن را برابر صفر می‌گیریم و داریم:

$$x_i = 0, x_{i-1} = -\Delta x, x_{i-2} = -(1+a)\Delta x$$

$f(x) = Ax^2 + Bx + C, f_i = C$, (i)

$f_{i-1} = A(\Delta x)^2 - B(\Delta x) + C$, (ii)

$f_{i-2} = A(1+a)^2(\Delta x)^2 - B(1+a)(\Delta x) + C$, (iii)

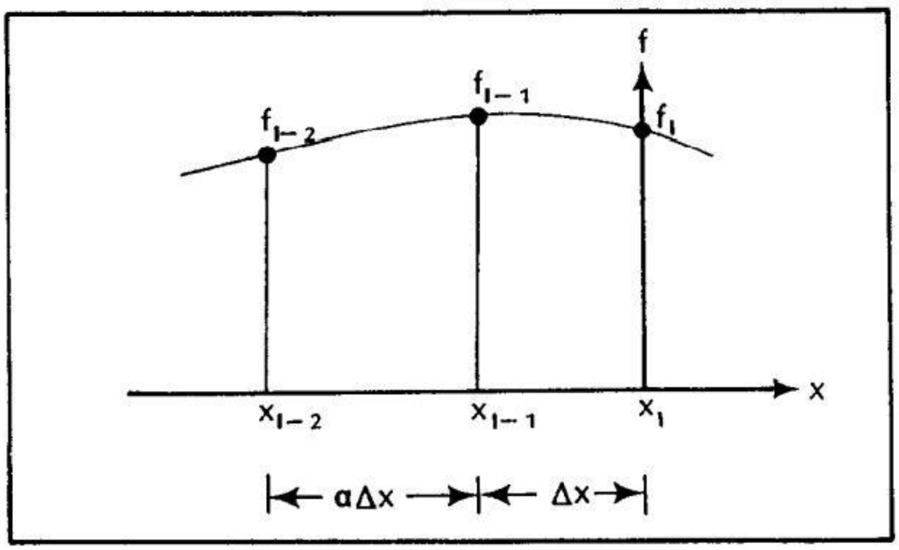
(ii) $\rightarrow B(\Delta x) = f_i - f_{i-1} + A(\Delta x)^2$

$$\text{(iii)} \rightarrow \mathrm{A} = \frac{f_{i-2} + (f_i - f_{i-1} + A(\Delta x)^2)(1+a) - f_i}{(1+a)^2(\Delta x)^2}$$

$$\rightarrow \frac{aA}{(1+a)} = \frac{f_{i-2} + (f_i - f_{i-1})(1+a) - f_i}{(1+a)^2(\Delta x)^2} \rightarrow A = \frac{f_{i-2} + (f_i + af_i - f_{i-1} - af_{i-1}) - f_i}{a(1+a)(\Delta x)^2}$$

$A = \frac{f_{i-2} + af_i - (a+1)f_{i-1}}{a(1+a)(\Delta x)^2}$, $B = \frac{f_{i-2} - (a+1)^2 f_{i-1} + (a^2+2a)f_i}{a(1+a)\Delta x}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i = 0) = 2Ax + B = B = \frac{f_{i-2} - (a+1)^2 f_{i-1} + (a^2+2a)f_i}{a(1+a)\Delta x}$



تصویر ۱ نقاط شبکه برای مساله ٤

۵- تقریب تفاضل محدود پسرو مرتبه اول را برای مشتق پاره‌ای مختلط $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ به دست آورید.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y}\right) + O(\Delta y) = \frac{1}{\Delta y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{i,j} - \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{i,j-1}\right) + O(\Delta y) =$$

$$= \frac{1}{\Delta y}\left(\frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} - \frac{f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}}{\Delta x}\right) + O(\Delta x, \Delta y) = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j} - f_{i,j-1} + f_{i-1,j-1}}{\Delta y \Delta x} + O(\Delta x, \Delta y)$$

روش دوم:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x}\right) + O(\Delta x) = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{i,j} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{i-1,j}\right) + O(\Delta x) =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y} - \frac{f_{i-1,j} - f_{i-1,j-1}}{\Delta y}\right) + O(\Delta x, \Delta y) = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1} - f_{i-1,j} + f_{i-1,j-1}}{\Delta y \Delta x} + O(\Delta x, \Delta y)$$

۶- تقریب تفاضل محدود پیشروی $\frac{\partial f}{\partial x}$ را با دقت مرتبه سوم به دست آورید.

چون دقت مرتبه سوم خواسته شده از سه نقطه و چون به صورت پیشرو خواسته شده از نقاط بعدی استفاده می کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{af(x)+bf(x+\Delta x)+cf(x+2\Delta x)+df(x+3\Delta x)}{\Delta x}+O(\Delta x)^3$$

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\frac{\Delta x}{1}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\Delta x^3}{6}\frac{\partial f}{\partial x^3}+\cdots$$

$$f(x+2\Delta x)=f(x)+\frac{2\Delta x}{1}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{4\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{8\Delta x^3}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\cdots$$

$$f(x+3\Delta x)=f(x)+\frac{3\Delta x}{1}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{9\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{27\Delta x^3}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\cdots$$

$$\left\{\begin{matrix}\Delta x^0\rightarrow a+b+c+d=0\\ \Delta x^1\rightarrow b+2c+3d=1\\ \Delta x^2\rightarrow\frac{b}{2}+2c+\frac{9}{2}d=0\rightarrow b+4c+9d=0\\ \Delta x^3\rightarrow\frac{b}{6}+\frac{4}{3}c+\frac{9}{2}d=0\rightarrow b+8c+27d=0\end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix}a=-\frac{11}{6}\\ b=\frac{18}{6}\\ c=-\frac{9}{6}\\ d=\frac{2}{6}\end{matrix}\right\}$$

$$\rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-11f(x)+18f(x+\Delta x)-9f(x+2\Delta x)+2f(x+3\Delta x)}{6\Delta x}+O(\Delta x)^3$$