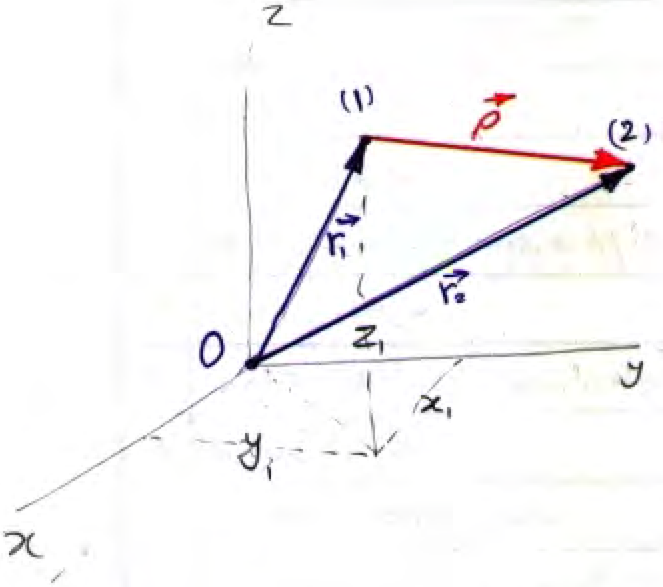
کمیات مهم برداری:



بردار موقعیت (مکان):

اگر نقطه‌ای مانند O را مبدا مختصات انتخاب کنیم. و از مبدا خطی را به مکان نقطه وصل کنیم (همانند نقطه 1) این خط را به اسم بردار مکان یا موقعیت می‌نامیم و آن را $\vec{r}_1$ نشان می‌دهیم. ($\vec{r}_1 = \vec{O1}$)

اگر نقطه (1) به مکان نقطه (2) تغییر مکان دهد در آن صورت موقعیت نقطه 2 را با پاره خط جهت دار O به 2 و با شکل $\vec{r}_2$ نشان می‌دهیم.

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

اگر موقعیت نقاط تابعی از زمان باشد در آن صورت بردارهای $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ متغیری از زمان خواهند بود. که این گونه بررسی ها در بحث دینامیک مطرح می‌شود.

بردار جابجایی:

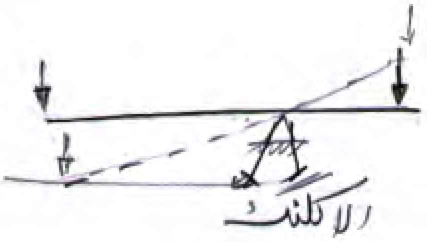
اگر ذره از نقطه (1) به نقطه (2) جابجا شود می‌توان نوشت

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{\rho}$$

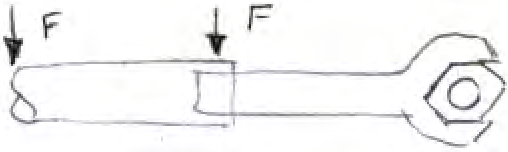
که در آن $\vec{\rho}$ میزان جابجایی است که ذره از (1) به (2) حرکت کرده است.

$$\vec{\rho} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

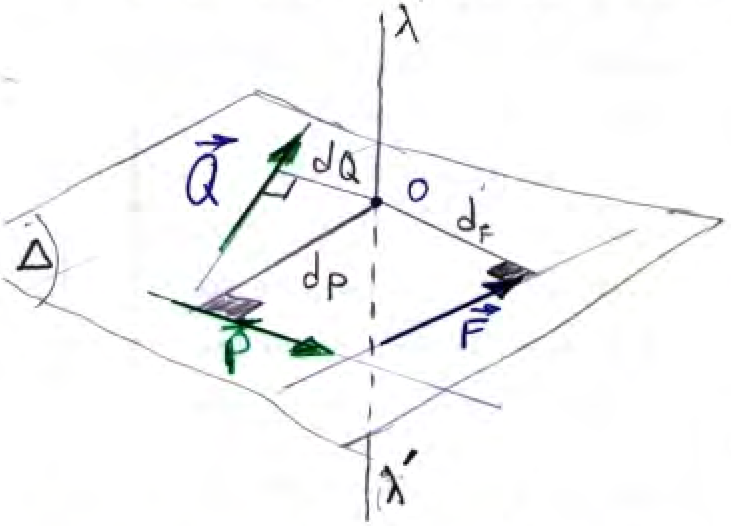
گشتاور یک بردار نسبت به یک نقطه:



در طبیعت به کرات مشاهده کرده‌ایم که دو نیروی یکسان که فاصله متفاوت از یک مرکز دارند باعث ایجاد چرخش غیر یکسان کرده‌اند.



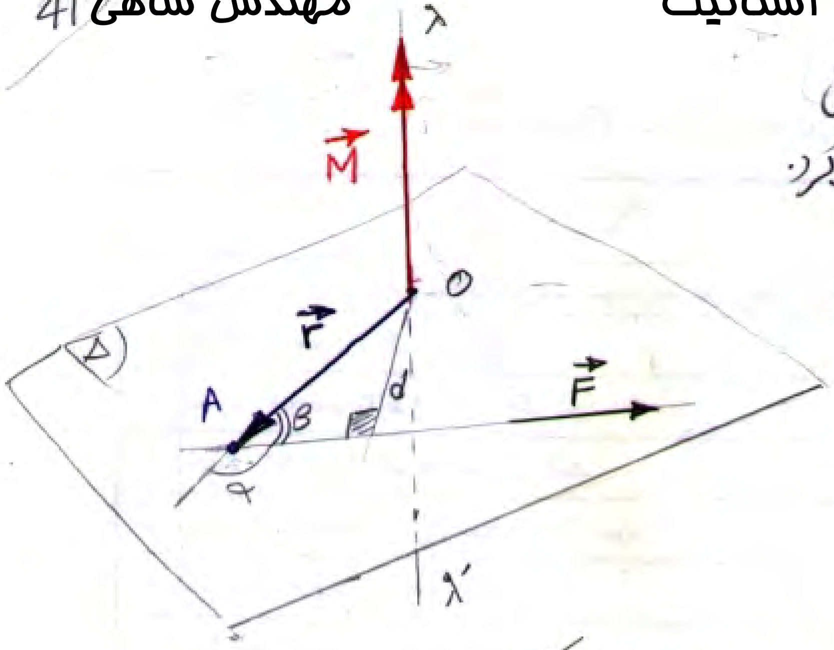
الاکلنگ و میله‌ای که به انتهای آچار افزوده می‌شود مثالهائی از این موضوع هستند که در فیزیک عمومی به این عنوان مطرح می‌شود که هرچه بازوی نیرو بیشتر باشد قدرت چرخاندن آن بیشتر خواهد بود.



حال برای آنکه بتوان این کمیت را بهتر بیان کرد می‌گوئیم اگر نیرو باعث چرخش حول نقطه O در جهت مثلثاتی شد گشتاور (لنگر) نیرو مثبت و اگر خلاف آن باشد منفی است و مقدار آن برابر مقدار نیرو ضرب در فاصله قائم نقطه از محمل بردار نیرو است. بنابراین مقدار لنگر نیروهای شکل برابر خواهد بود با

$$M_O = |\vec{F}| \cdot d_F + |\vec{P}| \cdot d_P - |\vec{Q}| \cdot d_Q$$

که در آن d_F ، d_P و d_Q به ترتیب فاصله نقطه O از محمل نیروهای F، P و Q است. و M میزان عاملیت که می‌خواهد سیستم را حول خط $\lambda\lambda'$ که از نقطه O می‌گذرد و بر صفحه Δ عمود است دوران دهد.



حال می‌توان این کمیت را به شکل یک حاصل ضرب برداری تعریف کرد:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

که در آن $\vec{M}$ برداری عمود بر صفحه و راست‌گرد است.

$\vec{F}$: بردار نیرو

$\vec{r}$: بردار مکانی دلخواه است که از O به نقطهٔ دلخواه A که بر روی محمل بردار است وصل می‌شود.

$$|\vec{r}\times\vec{F}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\alpha = |\vec{F}|\overbrace{|\vec{r}|\sin\beta}^{d} = |\vec{F}|\cdot d$$

$$\alpha+\beta=\pi \Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta$$

بدین ترتیب می‌توان گشتاور نیروی مایل را نیز نسبت به مبدا به سادگی تعیین کرد.

نکته ۱: گشتاور نیرو نسبت به نقطه‌ای که بر روی محمل آن است صفر است.

نکته ۲: گشتاور کمیت برداری است. و جمع آن بصورت برداری انجام می‌شود.

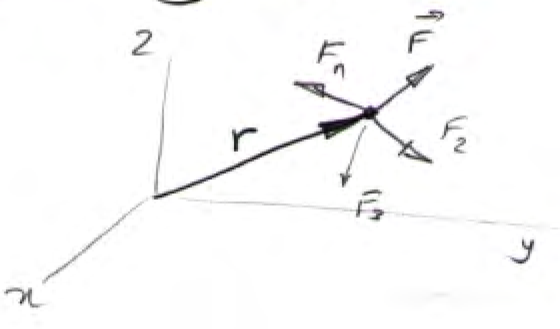
نکته ۳: گشتاور نیرو نیست و نمی‌تواند با نیرو جمع شود. برای همین ما بردار گشتاور را با دو فلش نشان می‌دهیم.

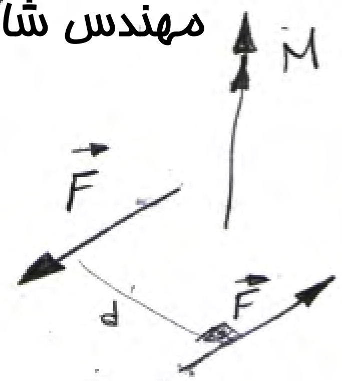
نکته ۴: می‌توان برای حالت گشتاور مجموع چند نیرو گشتاور بردار برآیند را بدست آورد. یعنی

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \cdots + \vec{M}_n$$

$$= \vec{r}\times\vec{F}_1 + \vec{r}\times\vec{F}_2 + \cdots + \vec{r}\times\vec{F}_n$$

$$\vec{M} = \vec{r}\times(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n)$$

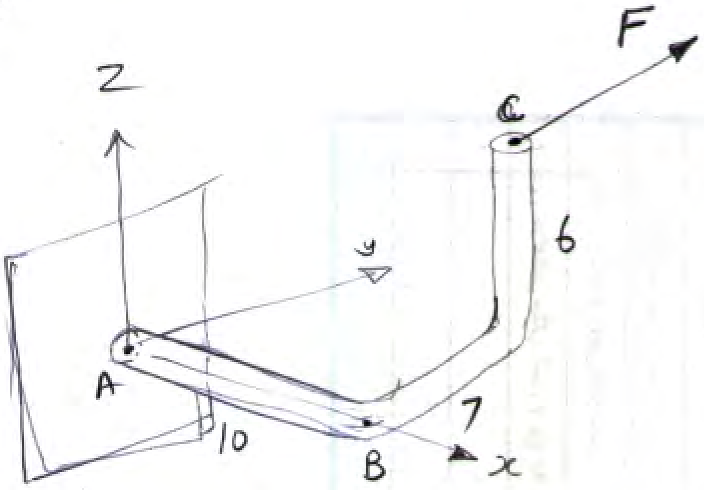




گشتاور زوج نیرو:

$$M = |\vec{F}| \cdot d$$

اگر دو نیروی موازی و مخالف هم با فاصله d از هم باشند گشتاور این دو نسبت به هر نقطه‌ای دلخواه از صفحه مقدار ثابت $|\vec{F}| \cdot d$ خواهد بود



در شکل مقابل مطلوبست محاسبه گشتا ور نیروی F نسبت به نقاط A و B

$$F = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \vec{r} = \vec{AC} = 10\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = (7\times3 - 6\times6)\vec{i} - (10\times3 - 5\times6)\vec{j} + (10\times6 - 5\times7)\vec{k}$$

$$\vec{M}_A = -15\vec{i} + 0\vec{j} + 25\vec{k}$$

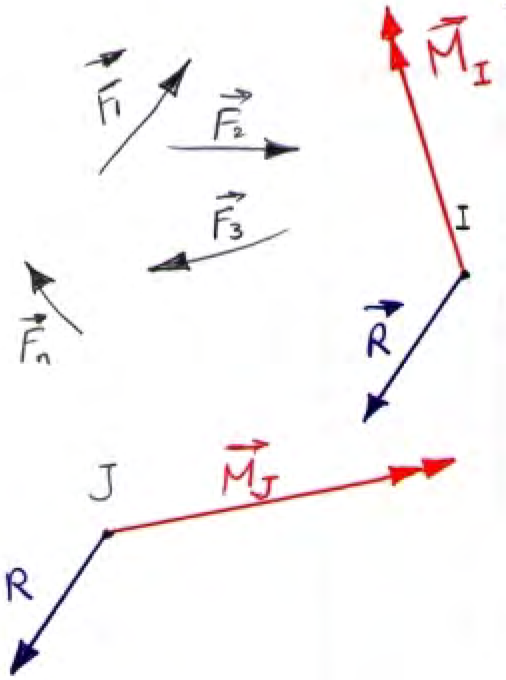
$$\vec{M}_B = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{BC} = (10-10)\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k} = 7\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\begin{matrix} 0 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{matrix}$$

$$\vec{M}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 21\vec{i} + 30\vec{j} + 0\vec{k} - 36\vec{i} - 0j - 35\vec{k}$$

$$\vec{M}_B = (21-36)\vec{i} + 30\vec{j} - 35\vec{k} = -15\vec{i} + 30\vec{j} - 35\vec{k}$$

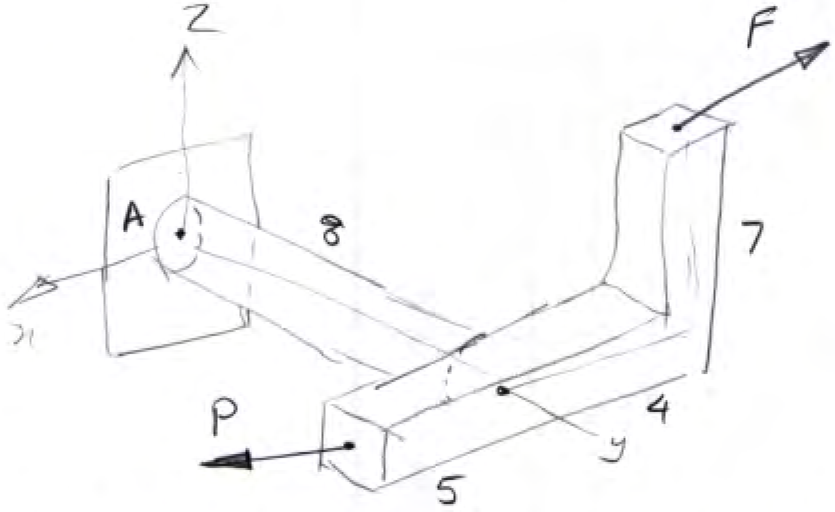
سیستم نیروی معادل (مختصات برداری سیستم نیرو)



اگر سیستم نیروهای $\vec F_1, \dots, \vec F_n$ وجود داشته باشد می‌توان به جای آن معادل آن در نقطه I را بکار برد، که

$$\vec R = \sum_{i=1}^{n} \vec F_i$$

$$\vec M_I = \sum_{i=1}^{n} \vec r \times \vec F_i$$



مثال: مطلوبست محاسبه معادل سیستم نیروی نشان داده شده در شکل را نسبت به نقطه A

$$\vec F = -5\vec i + 6\vec j + 2\vec k$$

$$\vec R = \sum_{i=1}^{2} \vec F_i = \boxed{-\vec i + 3\vec j + 3\vec k}$$

$$\vec R = 4\vec i - 3\vec j + \vec k$$

$$\vec r_f = -4\vec i + 8\vec j + 7\vec k$$

$$\vec M_I = \vec M_1 + \vec M_2$$

$$\vec r_p = 5\vec i + 8\vec j + 0\vec k$$

$$\vec{M}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 8 & 7 \\ -5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = (16-42)\vec{i} - (-8+35)\vec{j} + (16-42)\vec{k}$$

$$= 26\vec{i} - 27\vec{j} - 26\vec{k}$$

$$\vec{M}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 8 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (8-0)\vec{i} - (5-0)\vec{j} + (-15-32)\vec{k}$$

$$= 8\vec{i} - 5\vec{j} - 47\vec{k}$$

$$\vec{M}_I = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 26\vec{i} - 27\vec{j} - 26\vec{k} + 8\vec{i} - 5\vec{j} - 47\vec{k}$$

$$= \boxed{34\vec{i} - 32\vec{j} - 73\vec{k}}$$

تعادل نیروها:

$$\begin{cases} \vec{R}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F_i}=0 \\ \vec{M_I}=\sum_{i=1}^{n}\vec{r_I}\times\vec{F_i}=0 \end{cases}$$

اگر معادل یک سیستم نیرو برابر صفر باشد گوئیم آن سیستم نیرو در حال تعادل است.

می توان ثابت کرد که اگر مختصات برداری سیستم نیرو نسبت به یک نقطه صفر باشد مقدار آن برای تمام نقاط فضا صفر خواهد بود.

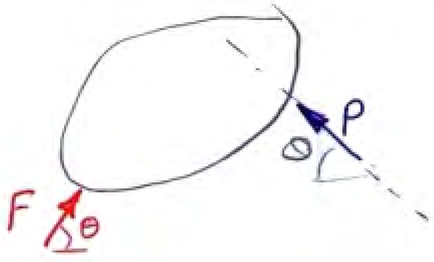
$$\vec{R}=R_x\vec{i}+R_y\vec{j}+R_z\vec{k}=0 \Rightarrow \begin{cases} R_x=\sum_{i=1}^{n}(F_x)_i=0 \\ R_y=\sum_{i=1}^{n}(F_y)_i=0 \\ R_z=\sum_{i=1}^{n}(F_z)_i=0 \end{cases}$$

$$\vec{M_I}=M_x\vec{i}+M_y\vec{j}+M_z\vec{k}=0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(M_x)_i=0 \\ \sum_{i=1}^{n}(M_y)_i=0 \\ \sum_{i=1}^{n}(M_z)_i=0 \end{cases}$$

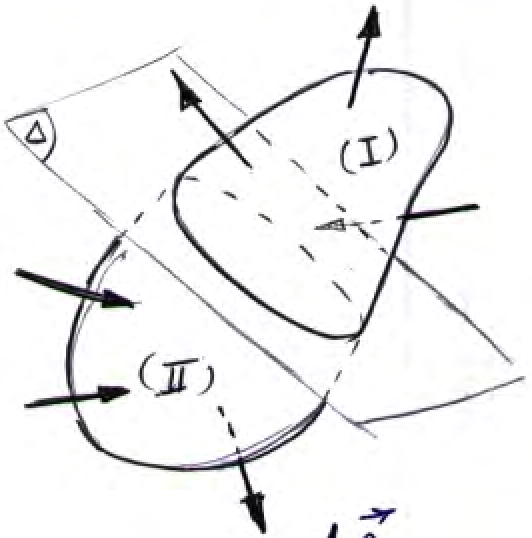
معادلات تعادل در فضا ۶ معادله است.

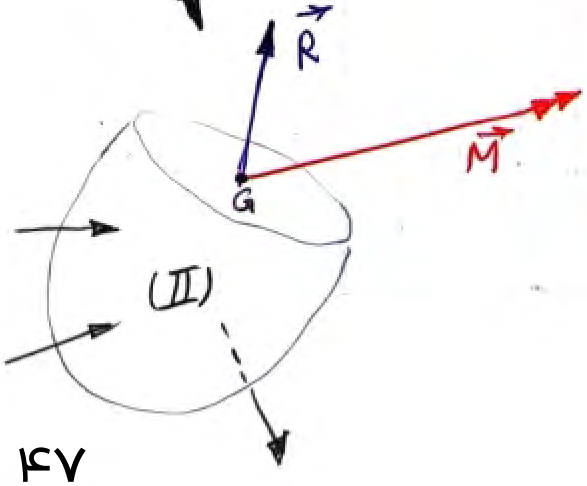
جسم آزاد

در مطالعه تعادل اجسام برای سادگی جسم را از سایر اجسام جدا کرده و اثرات سایر اجسام را به جسم اعمال می‌کنیم به این شکل جسم آزاد گوییم



گاهی پیش می‌آید که برای بررسی جسم بخواهیم در داخل جسم مقطع ایجاد و قسمتی از جسم را بررسی کنیم. در آن صورت باید اثرات مختصات برداری قسمت حذف شده را به قسمت باقیمانده اعمال کنیم. به این اثر نیروی داخلی می‌گوییم در مرکز مقطع





انواع سازه:

فضایی : اجزاء سازه و نیروهای وارد بر آن در فضا گسترده هستند

مسطح : اجزای سازه و نیروهای وارد بر آن را می‌توان در یک صفحه قرار داد

سازه‌های سه بعدی: ابعاد سازه و نیروهای وارد بر آن به گونه‌ای هستند که هر سه بعد آن قابل توجه است. (سد وزنی)

سازه‌های دو بعدی: سازه‌هایی هستند که یک بعد آن نسبت به دو بعد آن کم است و قابل صرف نظر کردن است سازه‌های صفحه‌ای (سقف - دیوار - گنبد)

سازه‌های یک بعدی: سازه‌هایی هستند که دو بعد آنها نسبت به بعد سوم آن کم و قابل صرف نظر کردن است. (تیر، ستون ...)

نیروهای مسطح:

اگر سازه و نیروهای آن در یک صفحه باشد سازه را سازه مسطح و نیروهای وارد بر آن را نیروهای مسطح گویند.

تعادل نیروهای مسطح:

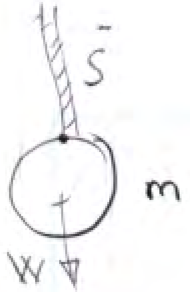
۱. سیستم متشکل از یک نیرو: سیستم نمی تواند در حال تعادل باشد.

۲. سیستم متشکل از دو نیرو: فقط وقتی می تواند در حال تعادل باشد که نیروها مساوی و در یک محمل و در خلاف هم باشند.

۳. سیستم متشکل از سه نیرو: الف) سه نیرو باید متقاطع باشند، و یکی برابر خلاف مجموع دو نیرو دیگر باشد.

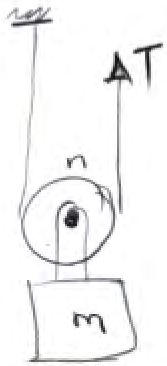
ب) سه نیرو موازی هم باشند.

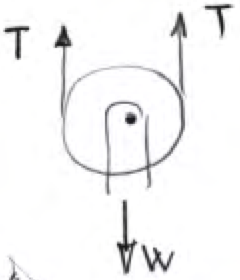
مثال: وزنه m به وزن W توسط طناب S نگهداری می‌شود میزان نیروی طناب چقدر است؟



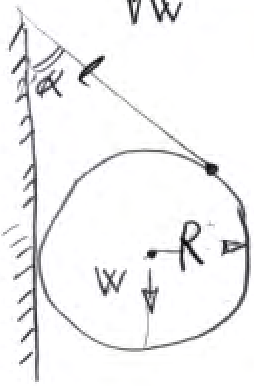
$$|T|=|W| \Rightarrow \boxed{T=W}$$

مثال: وزنه m توسط یک طناب که دور قرقره n پیچیده نگهداری می‌شود. اگر وزن وزنه W باشد نیروی کشش طناب چقدر است؟



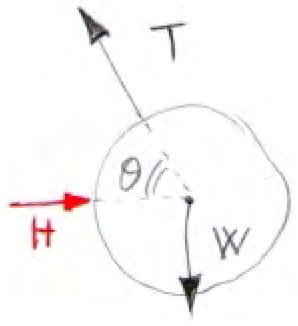


$$2T-W=0 \Rightarrow \boxed{T=\frac{W}{2}}$$



مثال: مطابق شکل استوانه‌ای به وزن W و شعاع R توسط طنابی به طول L به لبه آن بسته شده است و به دیوار بدون اصطکاک تکیه داده است. تعیین زاویه α (زاویه طناب با دیوار) و نیروی کشش طناب و عکس العمل دیوار.

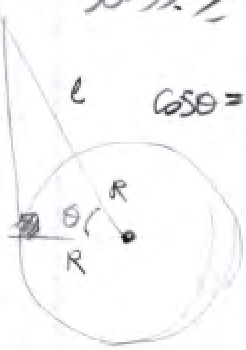
حل:
ابتدا دیاگرام جسم آزاد استوانه را ترسیم می‌کنیم.



چون دیوار بدون اصطکاک است پس H عمود بر سطح استوانه خواهد بود. برای آنکه تعادل برقرار شود باید نیروی T (کشش طناب) از مرکز دایره (محل تلاقی دو نیروی دیگر عبور کند.

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow H - T\cos\theta = 0$ ①

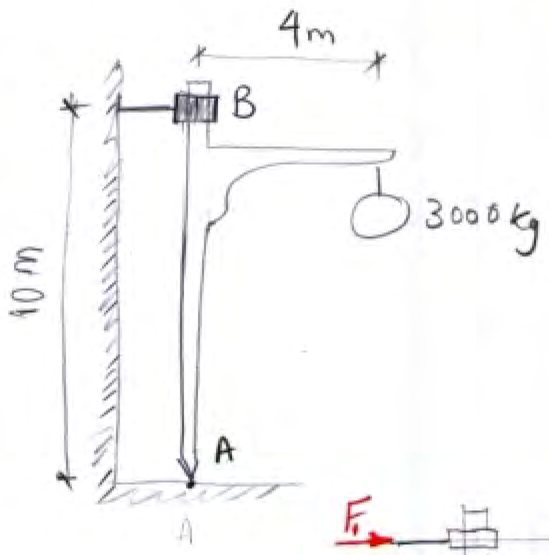


$\cos\theta = \frac{R}{L+R}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow T\sin\theta - W = 0 \Rightarrow \boxed{T = \frac{W}{\sin\theta}}$ ②

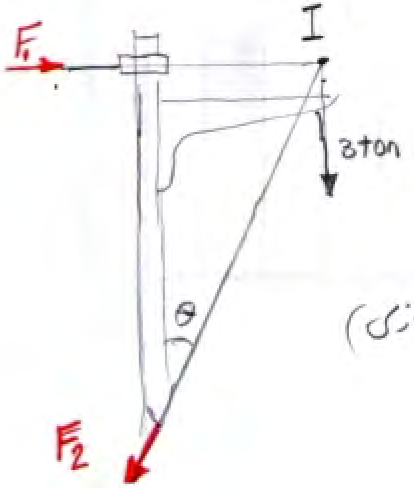
①,②

$H = T\cos\theta \Rightarrow H = \frac{W}{\sin\theta} \cdot \cos\theta = \boxed{W \cot g\,\theta}$



مثال: جرثقیلی مطابق شکل می‌تواند حول محور قائم دوران کند و توسط بازوی بدون اصطکاک در نقطه B نگهداری می‌شود. مطلوبست تعیین نیروهای وارد بر کف و دیواره.

حل: ابتدا دیاگرام جسم آزاد جرثقیل را ترسیم می‌کنیم.



چون تکیه‌گاه B بدون اصطکاک است پس نیروی F_1 عمود بر ستون (موازی افق) وارد خواهد شد.

چون سیستم متشکل از سه نیرو است بایت خط العمل F_2 از محل تلاقی دو نیروی 3ton و F_1 عبور کند پس از شکل داریم

$$tg\theta = \frac{4}{10}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 \sin\theta = 0 \quad (a)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -3 - F_2 \cos\theta = 0 \Rightarrow F_2 = -\frac{3}{\cos\theta} \quad (b)$$

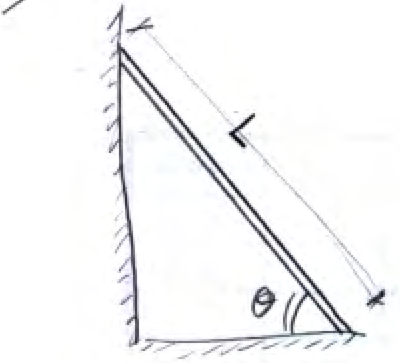
$$(a),(b) \Rightarrow F_1 - \frac{3}{\cos\theta} \times \sin\theta = 0 \qquad F_1 = 3\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 3tg\theta$$

$$F_1 = 3 \times \frac{4}{10} = \boxed{1.2 \text{ ton}}$$

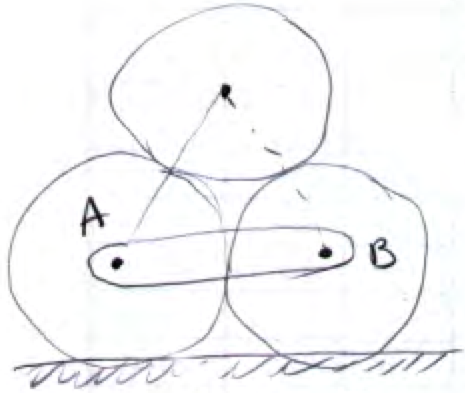
$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+tg^2\theta} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{16}{100}}} = \frac{10}{\sqrt{116}}$$

$$F_2 = -\frac{3}{\frac{10}{\sqrt{116}}} = -\frac{3\sqrt{116}}{10} = -2.79 \text{ ton}$$

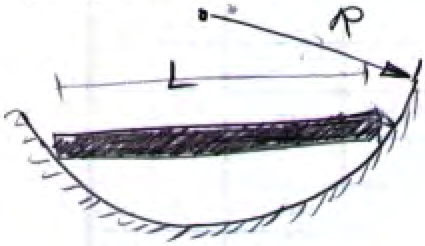
$$\theta = tg^{-1}\frac{4}{10} = 21.80^\circ$$



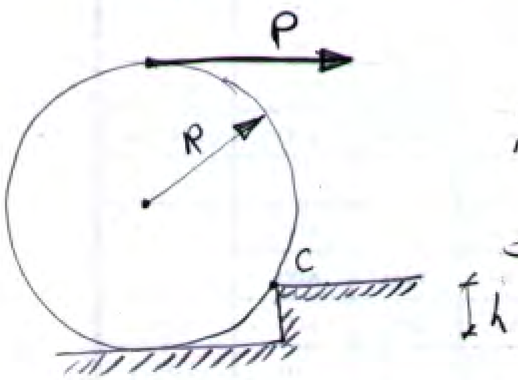
مسئله ۱: نردبانی با طول L مطابق شکل به دیوار قائم بدون اصطکاک و زمین افقی تکیه کرده است. اگر وزن نردبان Q باشد عکس العمل دیوار و زمین را پیدا کنید.



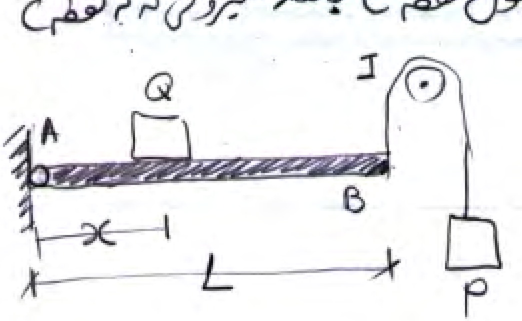
مسئله 2: سه استوانه هم قطر و هم وزن مطابق شکل بر روی هم قرار گرفته اند. اگر وزن استوانه‌ها W و قطر آنها 2R باشد عکس العمل زمین و نیروی میله AB را تعیین کنید. (از اصطکاک بین سطوح صرف نظر کنید)



مسئله 3: میله‌ای به طول L و وزن W در داخل استوانه دوار بدون اصطکاک به شعاع R قرار گرفته است مطلوبست تعیین عکس العمل جداره استوانه



مسئله 4: استوانه‌ای به شعاع R مطابق شکل با نیروی P که در بالاترین نقطه استوانه بر آن مماس بوده و نیز موازات افق می‌باشد کشیده می‌شود تا از روی مانعی به ارتفاع h عبور کند در لحظه‌ای که استوانه از سطح افق جدا می‌شود تا حول نقطه C بغلطد، نیرویی که به نقطه C وارد می‌شود را حساب کنید.



مسئله 5: میله AB توسط لولایی در نقطه A به دیوار قائم متصل شده است. اگر طنابی که از قرقره بدون اصطکاک در نقطه I قرار دارد به وزنه P متصل شده باشد. محل بار Q را به نحوی $(x=?)$ تعیین کنید که میله افقی باقی بماند.

انواع معادلات تعادل نیروهای مسطحه :

برای آنکه جسم در حال تعادل باشد باید

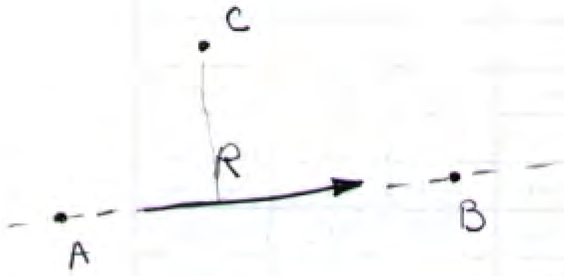
$$\sum \vec{F}_i = 0 \qquad (a) \qquad \sum \vec{M}_O = 0$$

چون نیروها مسطح هستند (همه در صفحه xy) قرار دارند لذا نیروها فقط مولفه x و y دارند و گشتاور همه آنها عمود بر صفحه (xy) است. لذا همه گشتاورها هم فقط مولفه z دارند

الف) $\boxed{\sum_{i=1}^{n} (F_x)_i = 0 \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{n} (F_y)_i \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} (M)_i = 0}$

که این جمع ها جمع عددی هستند (اسکالر)

ب) برای آنکه (a) درست باشد می توان از گشتاور حول سه نقطه A, B, C که بر یک خط نیستند استفاده کرد.

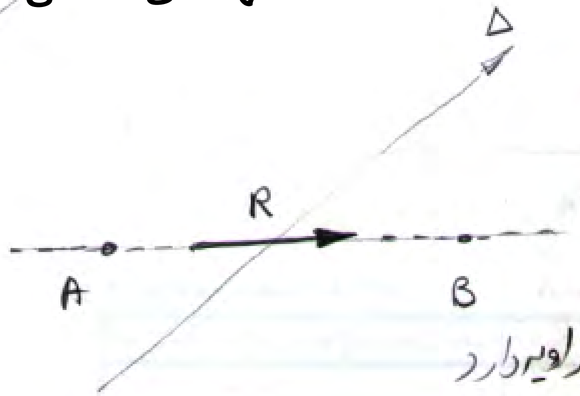


$$\boxed{\sum M_A = 0 \quad ; \quad \sum M_B = 0 \quad ; \quad \sum M_C = 0}$$

بنابر تعریف تعادل اگر $|R| = 0$ باشد و مقدار گشتاور آن نسبت به یک نقطه صفر باشد گشتاور آن نسبت به همه نقاط صفر خواهد بود.

برای درستی این امر فرض می کنیم که $|R| \neq 0$ است و بر روی امتداد AB قرار دارد، که در آن صورت $\sum M_A = \sum M_B = 0$ خواهد بود. اما چون C خارج خط AB است لذا فاصله آن صفر نیست و برای آنکه $\sum M_C = 0$ باشد الزاماً باید $|R| = 0$ شود.

ج)



$$\sum M_A = 0 \qquad \sum M_B = 0$$

$$\sum F_\Delta = 0$$

که Δ عمود بر خط AB نیست و با آن زاویه دارد

الف) مجموع تصاویر نیرو بر روی دو محور غیرموازی + گشتاور نسبت به یک نقطه

ب) گشتاور نسبت به سه نقطه غیرواقع بر یک خط

ج) دو گشتاور نسبت به دو نقطه و تصویر نیروها بر محوری مایل بر خط دو گشتاور

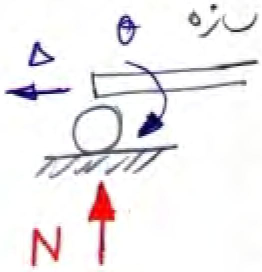
نکته ۱: اگر نیروها همگی از یک نقطه عبور کنند (متقارب باشند) در آن صورت معادله گشتاور تبدیل به اتحاد می‌شود و تنها دو معادله تعادل خواهیم داشت. $\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$

نکته ۲: اگر همه نیروها باهم موازی باشند در این صورت نیز تنها دو معادله تعادل خواهیم داشت.

نکته ۳: اگر نیروها همگی در یک راستا (بر روی یک محمل) باشند در آن صورت فقط یک معادله تعادل خواهیم داشت و دو معادله دیگر تبدیل به اتحاد می‌شوند.

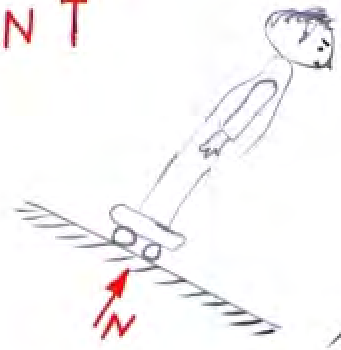
تکیه‌گاه: محلی است که سازه به زمین متصل است. و با افزایش نیروهای وارد بر سازه تکیه‌گاه نیز از خود عکس‌العمل بیشتر نشان داده و باعث تعادل مجدد سازه می‌شود. معمولاً عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها مجهول بوده در موقع تحلیل سازه یکی از اهداف تعیین عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها است.

انواع تکیه‌گاه مسطح:

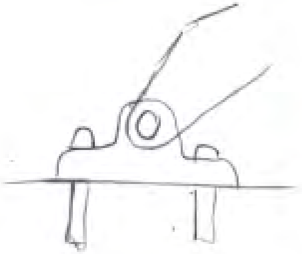


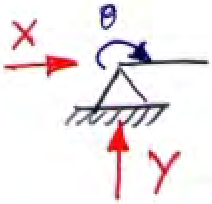
الف) تکیه‌گاه غلطکی (مفصلی متحرک)

این تکیه‌گاه تنها می‌تواند یک عکس‌العمل به سازه وارد کند و آن عمود بر سطح تکیه‌گاه است.



مثلاً اگر یک اسکیت باز روی یک سطح شیبدار بایستد سطح شیبدار تنها عمود بر سطح نیرو وارد می‌کند و اجازه نمی‌دهد اسکیت باز در سطح فرو رود ولی نمی‌تواند نیرویی در امتداد سطح شیب وارد کند و لذا اسکیت باز در طول شیب حرکت می‌کند.



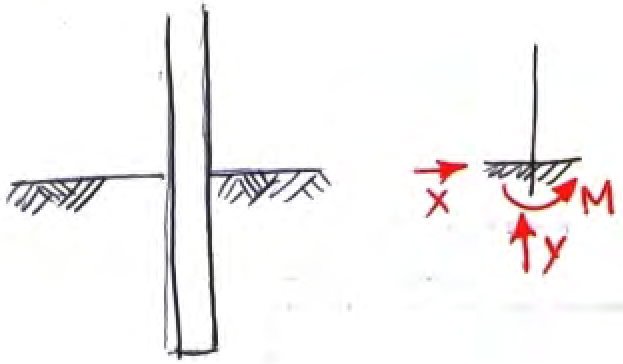


ب) تکیه‌گاه غلطکی (ثابت)

این تکیه‌گاه هم می‌تواند عکس‌العمل افقی و قائم وارد کند ولی نمی‌تواند عکس‌العمل دورانی وارد کند

مثل لولای دسته صندلی امکان حرکت دو را هم در جهت افقی و هم قائم می‌گیرد ولی دسته صندلی به راحتی حول محور لولا دوران می‌کند.

ج) تکیه گاه گیردار



این نوع تکیه گاه هم عکس العمل افقی، قائم و هم عکس العمل دورانی وارد می کند و اجازه هیچ گونه حرکتی را به سازه نمی دهد.

سازه های معین و نامعین:

در حالت مسطح سه معادله تعادل داریم که تحت شرایط خاص می تواند دو یا یک معادله هم بشود.

اگر در سازه ای تعداد مجهولات با تعداد معادلات استاتیکی برابر باشد سازه **معین استاتیکی**

اگر در سازه ای تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیشتر باشد سازه **نامعین استاتیکی**

اگر در سازه ای تعداد مجهولات از تعداد معادلات کمتر باشد **ناپایدار گوئیم**

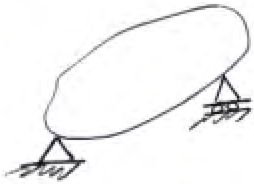
اگر X تعداد مجهولات و E تعداد معادلات باشد

$E = X$ معین (ایزواستاتیک)

$E < X$ نامعین (هیپراستاتیک)

$E > X$ ناپایدار خواهد بود.

معین و نامعین بودن سازه های زیر را بررسی کنید.



$X = 3$

$E = 3$

معین

$X = 3+1 = 4$

$E = 3$

نامعین

$X = 2+2 = 4$

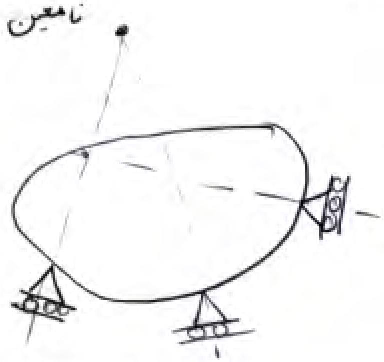
$E = 3$

نامعین

$X = 3+3 = 6$

$E = 3$

نامعین



$X = 3$

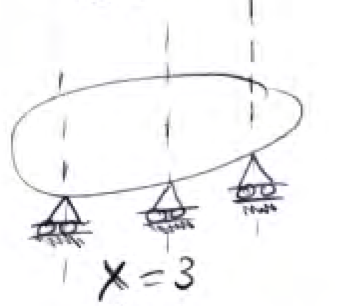
$E = 3$

معین

$X = 3$

$E = 2$

نامعین و ناپایدار



$X = 3$

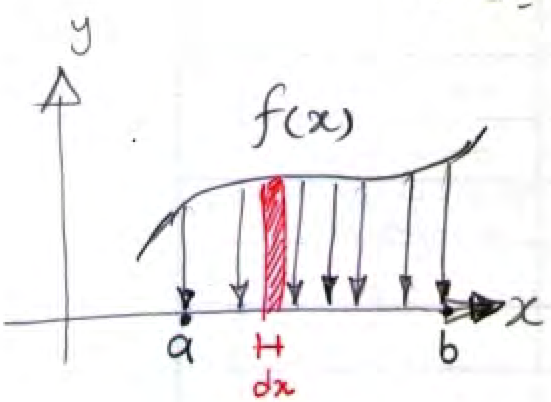
$E = 2$

نامعین و ناپایدار

اگر سازه‌ای معین و پایدار باشد می‌توان آن را به روش استاتیکی (با استفاده از معادلات تعادل حل کرد.

برآیند نیروهای گسترده:

اگر نیروها به صورت گسترده اعمال شوند به راحتی می‌توان از مطالب قبلی استفاده کرده و مقدار معادل و محل اثر آن را تعیین نمود.



اگر مطابق شکل فرض کنیم که بار گسترده‌ای با توزیع $f(x)$ در فاصله a تا b باشد

مقادیر دیفرانسیلی

$$dR = f(x)\,dx$$

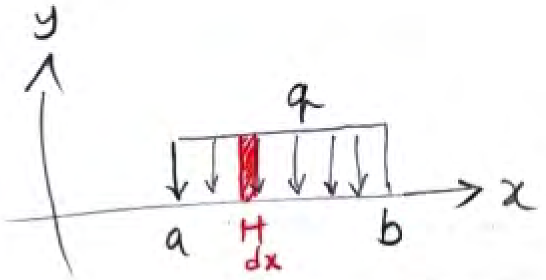
$$dS_{oy} = x\,f(x)\,dx$$

برای برآیند و گشتاور استاتیک نسبت به مبداء به شکل روابط بالا بدست می‌آید و از انتگرال گیری از روابط یاد شده مقدار R و S_{oy} بدست می‌آید

$$R = \int_a^b f(x)\,dx \quad , \quad S_{oy} = \int_a^b x\,f(x)\,dx$$

$$\bar{x} = \frac{S_{oy}}{R} = \frac{\int_a^b x\,f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

با بکار بستن مطالب فوق به سادگی می‌توان مرکز بارهای گسترده مختلف را بدست آورد. در زیر چند مورد را بیان می‌کنیم.



الف) بار گسترده یکنواخت :

فرض کنیم $(b-a)=L$

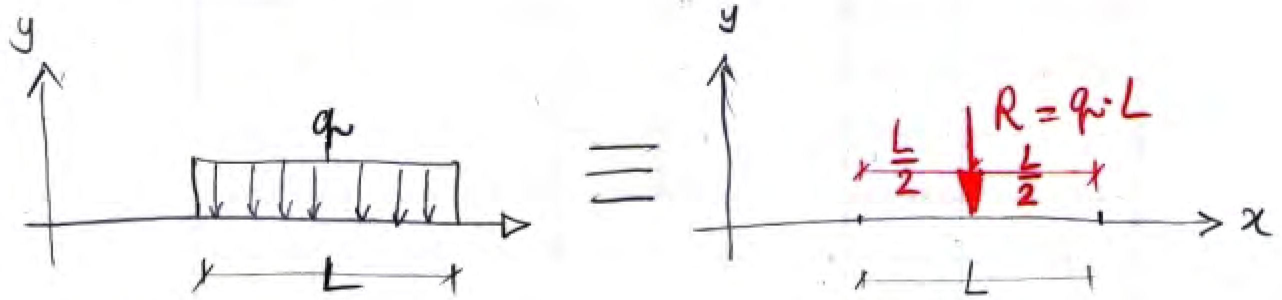
$$R=\int_a^b q\,dx=q\int_a^b dx=q(b-a)=\boxed{q\cdot L}$$

$$S_{oy}=\int_a^b x(q\,dx)=q\int_a^b x\,dx=q\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{q}{2}(b^2-a^2)$$

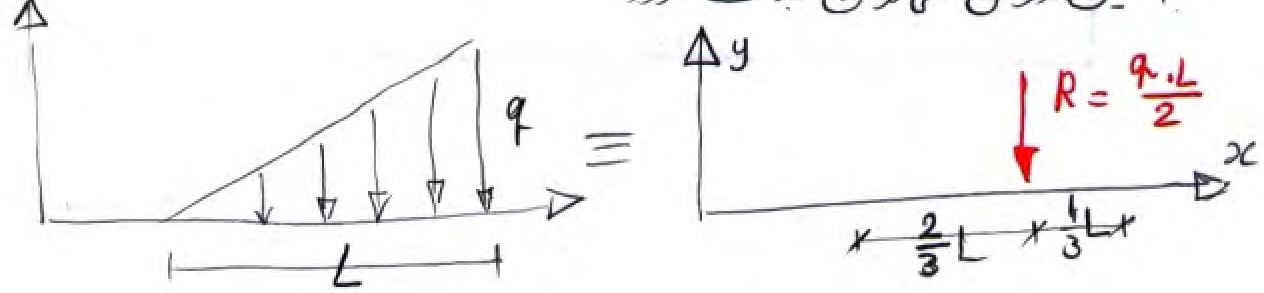
$$\bar{x}=\frac{S_{oy}}{R}=\frac{q(b^2-a^2)/2}{q(b-a)}=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$

$$\boxed{\bar{x}=\frac{a+b}{2}}=\frac{a+b+a-a}{2}=\frac{2a+b-a}{2}=a+\frac{b-a}{2}$$

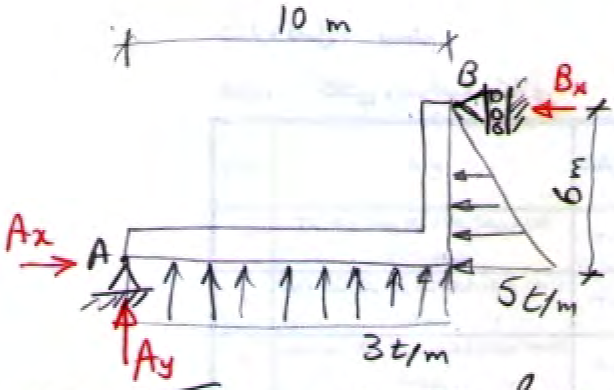
$$\boxed{\bar{x}=a+\frac{L}{2}}$$



به همین روش می‌توان بدست آورد



بنابراین برای بارهای گسترده می‌توان بجای آنها معادل آن را در محل مرکز بار اعمال کرد.
و مسائل تعادل استاتیکی را حل کرد.



مثال: درباره بدون وزن مقابل مطلوبست تعیین عکس العمل تکیه گاهها

چون تعداد مجهولات و معادلات هر سه (۳) می‌باشد، لذا سازه معین استاتیکی است و قابل حل است. معادلات تعادل داریم

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - B_x - \frac{5\times 6}{2} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 3\times 10 + A_y = 0 \quad (2)$$

$$+\circlearrowleft \sum (M)_A = 0 \Rightarrow -3\times 10 \times \frac{10}{2} - \frac{6\times 5}{2}\times\left(\frac{1}{3}\,6\right) - B_x\cdot 6 = 0 \Rightarrow 6B_x = -180$$

$$B_x = -\frac{180}{6} = \boxed{-30 \text{ ton}} \quad (4)$$

$$(2) \rightarrow \boxed{A_y = -30}$$

$$(1),(4) \rightarrow A_x - B_x - 15 = 0 \Rightarrow A_x = B_x + 15 = -30 + 15 = \boxed{-15}$$

سازه مرکب:

اگر دو سازه ساده توسط یک اتصال به هم وصل شوند سازه مرکب بدست می آید.

اتصال می تواند به یکی از چند شکل زیر باشد:

۱. اتصال صلب: دو جسم بطور کامل به هم اتصال پیدا می کنند

۲. اتصال مفصلی: دو جسم به هم توسط یک مفصل وصل می شود و به هم لنگر انتقال نمی دهند

۳. اتصال هدایت شده: دو جسم توسط یک اتصال خاص وصل می شوند که نمی تواند برش منتقل کند.

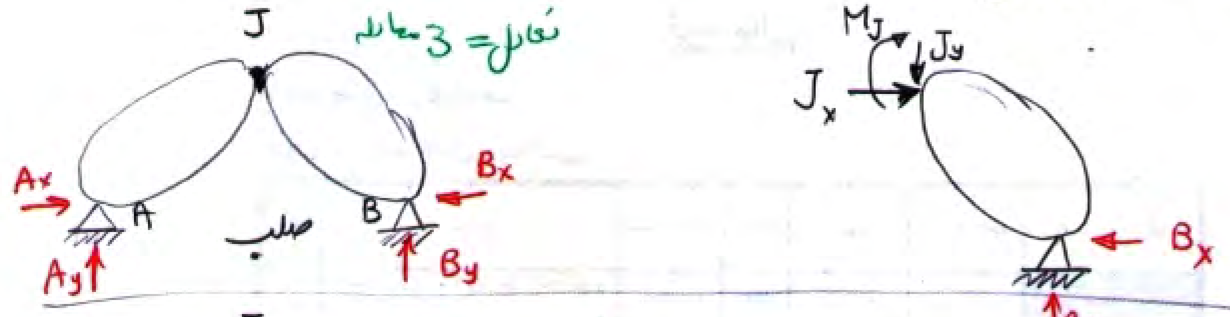
۴. اتصال تلسکوپی: دو جسم توسط اتصالی به هم متصل می شوند که امکان انتقال نیروی محوری وجود ندارد

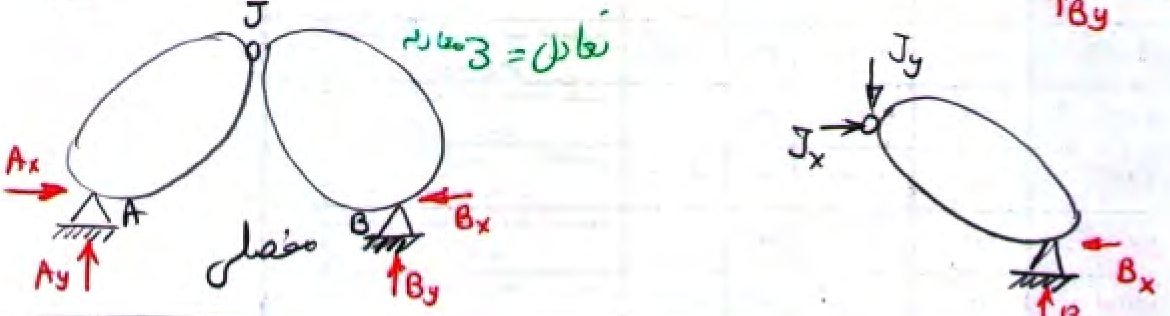
اگر دو جسم متصل شده را از محل اتصال مقطع بزنیم و یک طرف مقطع را بررسی کنیم، می توانیم برای آن سه معادله تعادل بنویسیم،

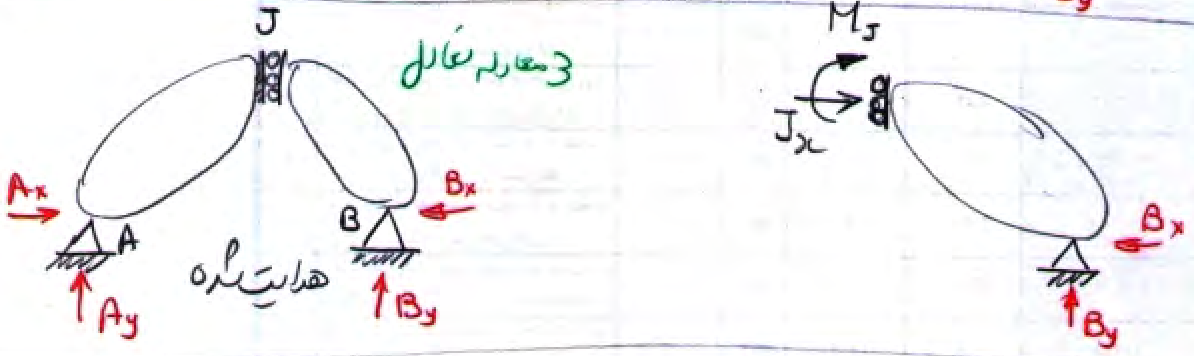
بجز اتصال صلب بقیه اتصالات فوق دو مجهول دارند لذا می توان با استفاده از آن یک معادله اضافی بدست آورده و سازه مرکب را حل کرد.

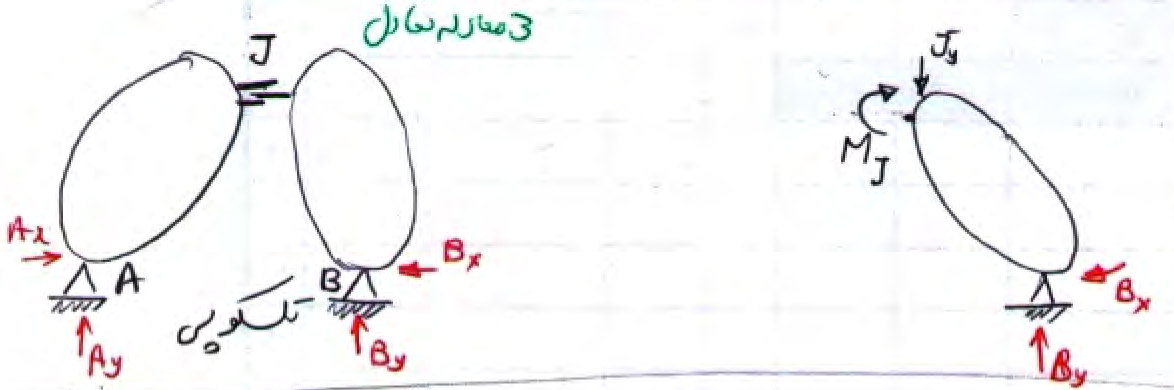
به ازای هر کدام از اتصالات مفصلی، هدایت شده و تلسکوپی می توان

یک معادله اضافی بوجود آورد و لذا سازه های با بیش از 3 مجهول را هم در حالت استاتیکی حل کرد.









در شکل بالا ۴ مجهول تکیه گاهی وجود دارد، که می‌توان برای آنها سه معادله تعادل استاتیکی نوشت. و برای شکلهای سمت راست هم می‌توان سه معادله تعادل نوشت

با توجه به مجهولات اتصال که به غیر از اتصال صلب تعداد دو مجهول هست

در نتیجه می‌توان برای کل سازه ۶ معادله بدست آورد (سه معادله تعادل

برای کل سازه و ۳ معادله برای یک طرف اتصال) و با توجه به ۴ مجهول تکیه گاهی

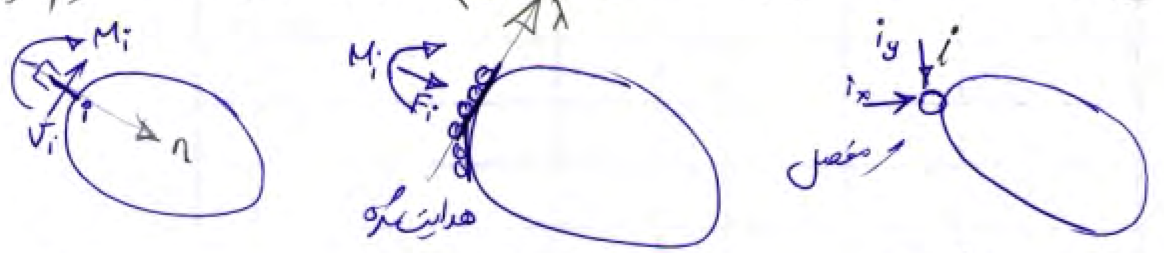
و دو مجهول اتصال جمعاً ۶ مجهول داریم لذا به غیر از اتصال صلب

باقی سازه ها معین استاتیکی می باشند.

تذکر: چون مجهولات اتصال جزء مجهولات اصلی نیستند اگر برای

بخشی از سازه که در یک طرف اتصال است معادله ای بنویسیم که می‌دانیم نیروی

آن حذف شده (لذا مجهولات اضافی اتصال) را وارد می بایست نخواهیم کرد

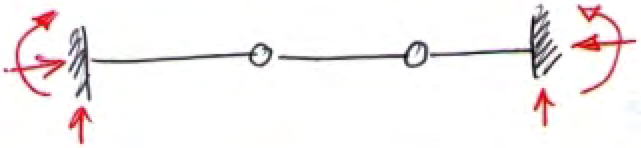


$\sum F_n = 0$ $\sum F_\lambda = 0$ $\sum (M)_i = 0$

با توجه به مطالب گفته شده ، به ازاء هر مکانیزم (مفصل ، هدایت شده ، تلسکوپی)

می‌توان یک معادله اضافی نوشت و سازه های مرکب را تحلیل کرد

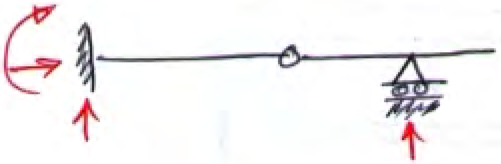
درجه معینی و نامعینی سازه های زیر را تعیین کنید.



$X = 6$　　$X > E$

$E = 3 + 2 = 5$
تعادل　مفصل

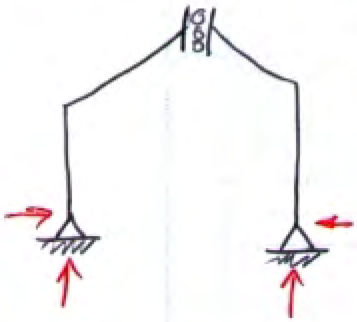
نامعین



$X = 4$

$E = 3 + 1 = 4$　　$X = E$
تعادل　مفصل

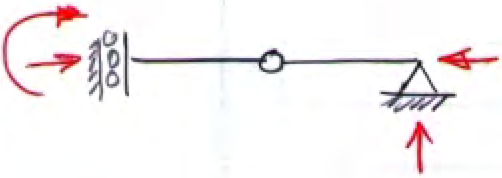
معین



$X = 4$

$E = 3 + 1 = 4$　　$X = E$
تعادل　هدایتگر

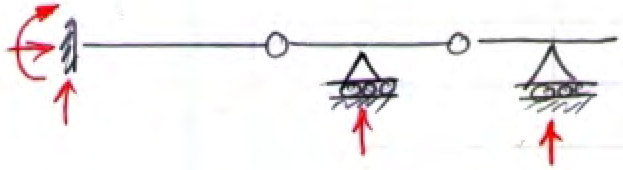
معین



$X = 4$

$E = 3 + 1 = 4$　　$X = E$
تعادل　هدایتگر

معین



$X = 5$

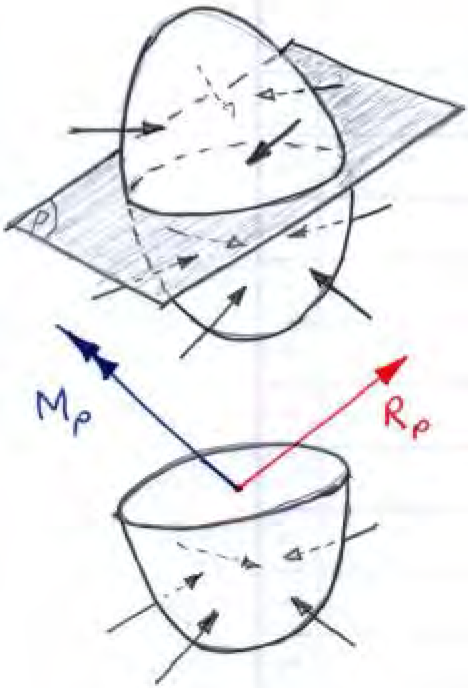
$E = 3 + 2 = 5$
تعادل　مفصل

$X = E$

معین

نیروی داخلی:

در اثر اعمال نیروی خارجی به جسم در داخل جسم نیروهائی ایجاد می شود و این نیروها باعث انتقال نیروها از محل اعمال نیروی خارجی تا تکیه گاه می شود. به نیروهائی که در داخل جسم ایجاد می شود نیروی داخلی گفته می شود. این نیروهای داخلی معیاری هستند برای ارزیابی مقاومت اجسام در برابر نیروهای خارجی و در طراحی اجزای سازه ها براساس نیروهای داخلی ایجاد شده اجزاء طراحی می شوند که جزئیات این روش در بحث دروس طراحی بررسی می شود.

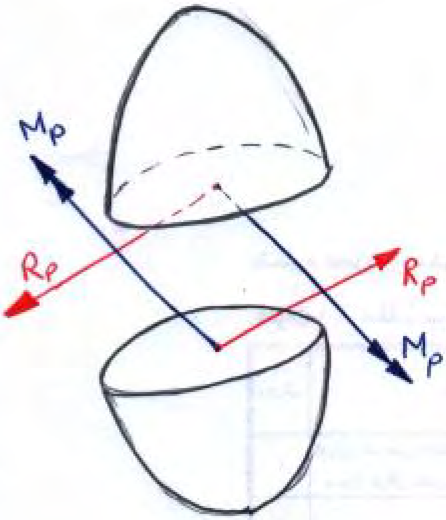


اگر جسمی که در اثر نیروهای وارد بر آن در حال تعادل است را توسط صفحه ای به دو قسمت تقسیم کنیم و قسمتی از آن را حذف کنیم و قسمتی را نگهداریم برای حفظ تعادل قسمت باقی مانده باید اثر قسمت حذف شده را بر آن اعمال کنیم. این اثر را نیروی داخلی جسم در محل مقطع (P) گوئیم. و به شکل $\vec{R_P}$ و $\vec{M_P}$ نمایش می دهیم.

دو بردار فوق را هم می توان در امتداد محورهای مختصات تصویر نمود و هم بر روی محور عمود بر

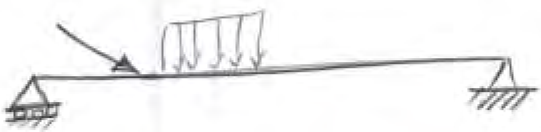
مقطع عضو:

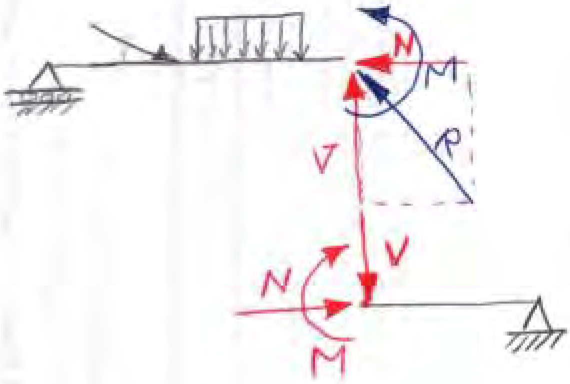
اگر قسمت دیگر را بررسی کنیم مقدار نیروهای داخلی با طرف دیگر مساوی ولی جهت آنها عکس هم خواهد بود. (همانند شکل)



نیروهای داخلی و دیاگرام آنها (در حالت مسطحه):

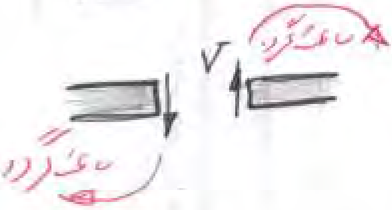
در سازه های مسطحه (که در آنها هم نیروها و هم سازه در یک صفحه قرار دارند) نیروهای داخلی را می‌توان به شکل یک نیرو یک گشتاور بدست آورد. که نیرو را هم می‌توان به دو مولفه بر روی عضو و عمود بر آن تصویر کرد که به تصویر روی محور عضو نیروی محوری و به تصویر عمود بر محور عضو نیروی برشی گوئیم.





برای نیروهای داخلی جهت مثبت قرار داد شده است که با سایر قراردادهای جهت مثبت اندکی متفاوت است. که به شرح زیر بیان می‌شود.

1. نیروی کشش وقتی مثبت است که باعث ایجاد کشش در عضو شود.

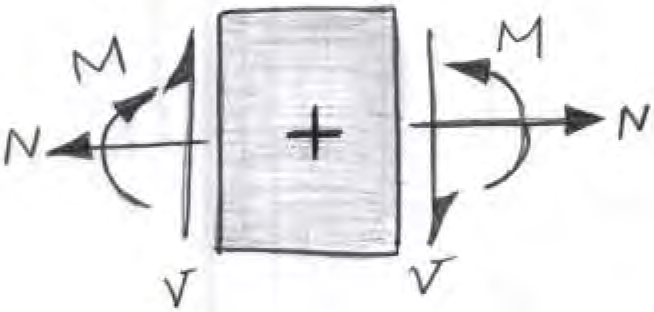


2. نیروی برشی وقتی مثبت است که باعث دوران جسم در جهت ساعتگرد شود.

3. لنگر خمشی وقتی مثبت است که باعث ایجاد کشش در پایین و فشار در بالای عضو شود.

برای سادگی به خاطر سپردن جهت مثبت نیروهای محوری قسمتی از عضو را ترسیم و علامت جهت مثبت را بر روی آن مشخص می‌کنیم.

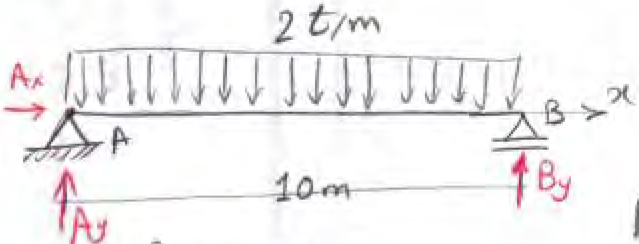
جهت های مثبت نیروهای داخلی مطابق شکل خواهند بود.



دیاگرام نیروهای داخلی :

برای ترسیم دیاگرام نیروی داخلی بایست مقطع را در طول عضو حرکت دهیم و بدین ترتیب مقدار نیروهای داخلی را بدست آوریم که برای این منظور مقطع را در یک فاصله دلخواه با فاصله x در نظر می گیریم و نیروهای داخلی براساس آن تغییر می کنند.

مثال : مطلوبست ترسیم دیاگرام نیروهای داخلی تیر مقابل



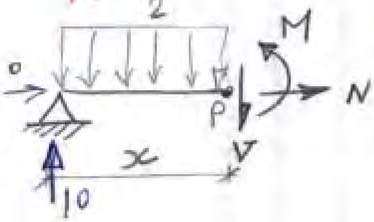
حل : ابتدا عکس العمل تکیه گاه ها را بدست می آوریم

$\sum F_x=0 \Rightarrow A_x=0$ ①

$\sum F_y=0 \Rightarrow A_y+B_y-2\times10=0$ ②

$+\circlearrowleft\sum(M)_A=0 \Rightarrow 2\times10\times\frac{10}{2}-10\times B_y=0 \Rightarrow \boxed{B_y=10}$ ③

②,③ $\Rightarrow A_y=20-10=10$



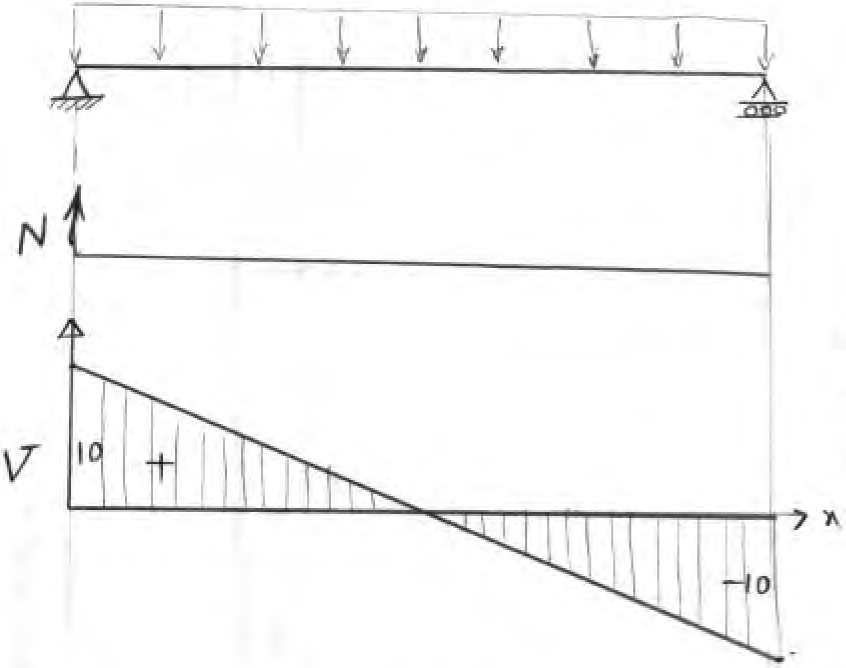
حال یک محور مختصات در نقطه A انتخاب و در فاصله x از تکیه گاه مقطع زده و طرف راست را حذف و طرف چپ را نگه می داریم با نوشتن معادلات تعادل برای طرف چپ داریم

$\sum F_x=0 \Rightarrow \boxed{N=0}$

$\sum F_y=0 \Rightarrow 10-2x-V=0 \Rightarrow \boxed{V=10-2x}$

$+\circlearrowleft\sum(M)_P=0 \Rightarrow 10x-2x\frac{x}{2}-M=0 \Rightarrow \boxed{M=10x-x^2}$

حال: معادلات نیروهای داخلی را ترسیم می‌کنیم

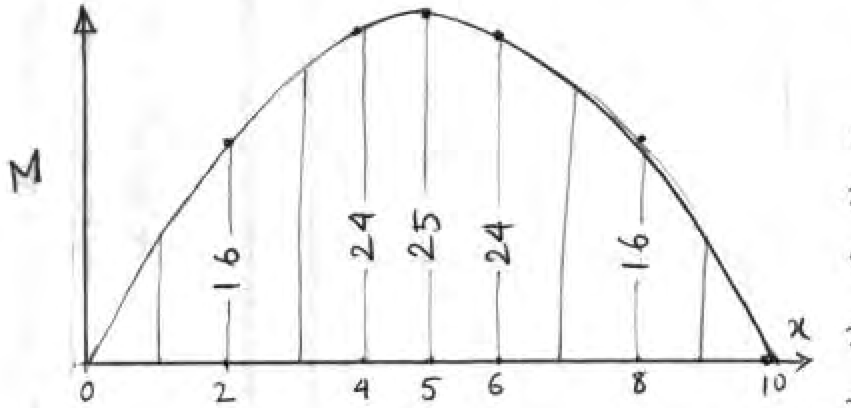


$V = 10 - 2x$

$x = 0 \rightarrow V = 10$

$x = 5 \rightarrow V = 0$

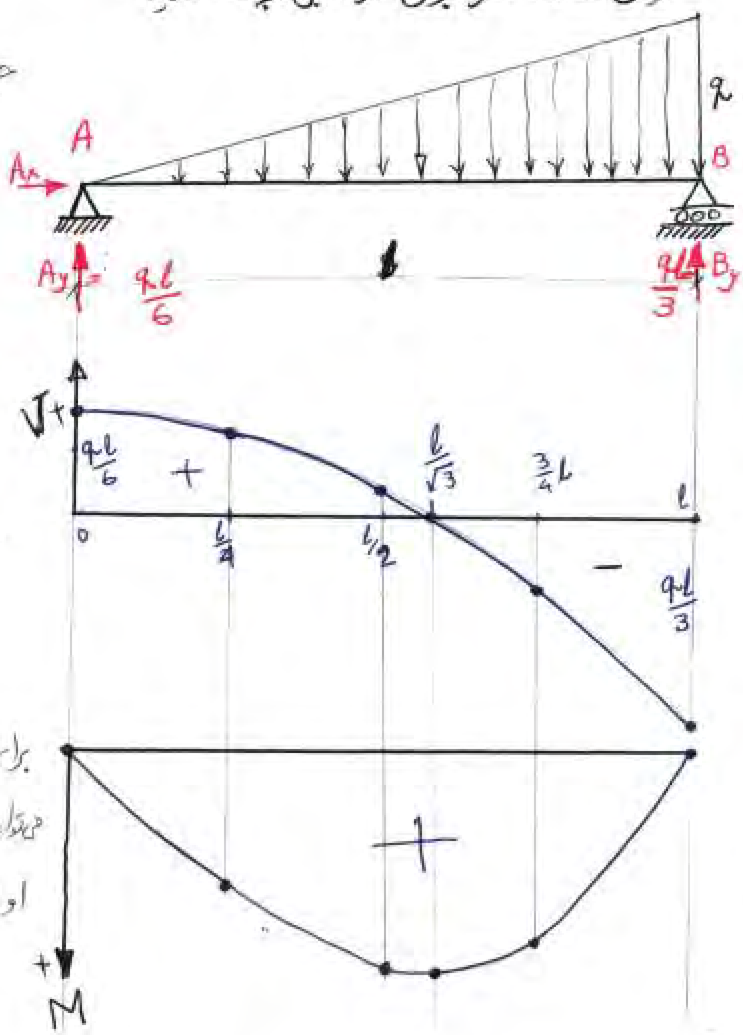
$x = 10 \quad V = -10$



$M = 10x - x^2$

$x = 0$	$M = 0$
$x = 2$	$M = 16$
$x = 4$	$M = 24$
$x = 5$	$M = 25$
$x = 6$	$M = 24$
$x = 8$	$M = 16$
$x = 10$	$M = 0$

تمرین معادله لنگر و برش تیر مقابل را بدست آورید.



حل ابتدا عکس العمل های تیر را بدست می آوریم:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow -l B_y + \frac{q \times l}{2} \times \frac{2}{3} l = 0$$

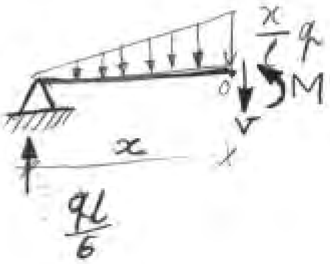
$$\boxed{B_y = \frac{q}{3} l}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow l A_y - \frac{q \times l}{2} \times \frac{1}{3} l = 0$$

$$\boxed{A_y = \frac{1}{6} q l}$$

برای بدست آوردن معادلات خمش و برش به چند روش میتوان عمل کرد.

اول: روش مقطع (الف - حذف سمت راست)



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{ql}{6} - \frac{x}{l} q \cdot \frac{x}{2} - V = 0$$

$$\boxed{V = q\left(\frac{l}{6} - \frac{x^2}{2l}\right)} \quad \text{I}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 \Rightarrow \frac{ql}{6} \cdot x - \frac{x}{l} q \cdot \frac{x}{2} \times \frac{x}{3} - M = 0 \qquad \boxed{M = \frac{q}{6}\left(xl - \frac{x^3}{l}\right)} \quad \text{II}$$

برای بررسی صحت روابط می بایست در تکیه گاهها درست باشد:

$$x = 0 \begin{cases} V = \frac{ql}{6} \\ M = 0 \end{cases} \quad \text{OK}$$

$$x=\ell \quad \begin{cases} V = q\left(\frac{\ell}{6}-\frac{\ell^2}{2\ell}\right)=q\left(\frac{\ell}{6}-\frac{\ell}{2}\right)=q\frac{\ell}{3} \\ M=\frac{q}{6}\left(\ell^2-\frac{\ell^3}{\ell}\right)=0 \end{cases} \quad \text{OK}$$

روابط صحیح است و می توان دیاگرام برش و گشتاور خمشی را مطابق شکل قبل ترسیم نمود

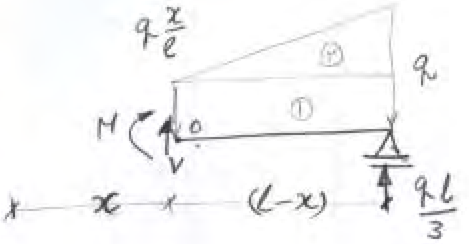
برای تعیین محل گشتاور ماکزیمم داریم:

$$V=0 \rightarrow q\left(\frac{\ell}{6}-\frac{x^2}{2\ell}\right)=0 \Rightarrow \frac{\ell}{6}=\frac{x^2}{2\ell} \Rightarrow x^2=\frac{\ell^2}{3} \Rightarrow x_{max}=\frac{\ell}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{x_{max}=\frac{\ell}{\sqrt{3}}=0.577\,\ell}$$

x	V	M
0	$\frac{q\ell}{6}=0.167q\ell$	0
$0.25\ell=\ell/4$	$\frac{13}{96}q\ell=0.135q\ell$	$\frac{5}{128}q\ell^2=0.039q\ell^2$
$\ell/2=0.5\ell$	$\frac{1}{24}q\ell=0.0417q\ell$	$\frac{1}{16}q\ell^2=0.0625q\ell^2$
$\frac{\ell}{\sqrt{3}}=0.55\ell$	0	$\frac{1}{9\sqrt{3}}q\ell^2=0.0642q\ell^2$
$\frac{3}{4}\ell$	$-\frac{11}{96}q\ell=-0.1159q\ell$	$\frac{7}{128}q\ell^2=0.0547q\ell^2$
ℓ	$-\frac{1}{3}q\ell=-0.333$	0

روش اول: (حذف قسمت چپ)



$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow -\frac{\left(q\frac{x}{l}+q\right)}{2}(l-x)+\frac{ql}{3}+V=0$$

$$-V=-\frac{q}{2}\left(\frac{x}{l}+1\right)(l-x)+\frac{ql}{3}=0$$

$$-V=-\frac{q}{2}\left(\cancel{x}-\frac{x^2}{l}+l-\cancel{x}\right)+\frac{ql}{3}=0$$

$$-V=+\frac{q}{2}\frac{x^2}{l}-\frac{ql}{2}+\frac{ql}{3}=\frac{qx^2}{2l}+\frac{-3+2}{6}ql$$

$$\boxed{V=-\left(-\frac{ql}{6}+\frac{qx^2}{2l}\right)=q\left(\frac{l}{6}-\frac{x^2}{2l}\right)}$$

رابطه بالا برابر رابطه I است.

$$\circlearrowleft\Sigma M_0=0 \Rightarrow M+\overbrace{q\frac{x}{l}\times\frac{(l-x)^2}{2}}^{\text{ناحیه ①}}+\overbrace{\frac{2}{3}(l-x)\left(q-q\frac{x}{l}\right)\times\frac{(l-x)}{2}}^{\text{ناحیه ②}}-\frac{ql}{3}(l-x)=0$$

از $(l-x)^2$ فاکتور

$$M+(l-x)^2\left[\frac{qx}{2l}+\frac{1}{3}\left(q-q\frac{x}{l}\right)\right]-\frac{ql}{3}(l-x)=0$$

$$M+(l-x)^2\left\{\frac{qx}{2l}+\frac{q}{3}-\frac{qx}{3l}\right\}-\frac{ql}{3}(l-x)=0$$

$$M+(l-x)^2\left\{\frac{3-2}{6l}qx+\frac{q}{3}\right\}-\frac{ql}{3}(l-x)=0$$

$$M+(l-x)\left\{(l-x)\left[\frac{qx}{6l}+\frac{q}{3}\right]-\frac{ql}{3}\right\}=0$$

$$M+(l-x)\left\{\frac{qx}{6}+\cancel{\frac{ql}{3}}-\frac{qx^2}{6l}-\frac{qx}{3}-\cancel{\frac{ql}{3}}\right\}=0$$

$$M+(l-x)\left\{qx\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)-\frac{qx^2}{6l}\right\}=0$$

$$M+(l-x)\left\{-\frac{qx}{6}-\frac{qx^2}{6l}\right\}=0$$

$$M+\left(-\frac{qxl}{6}-\cancel{\frac{qx^2}{6}}+\cancel{\frac{qx^2}{6}}+\frac{qx^3}{6l}\right)=0$$

$$\boxed{M=\frac{q}{6}\left(xl+\frac{x^3}{6l}\right)}$$

رابطه مقابل مساوی رابطه (II) می باشد

دوم: با استفاده از انتگرال گیری

معادله بار خارجی به شکل خطی است (یعنی تغییرات خطی است) $q(x) = q_0 \dfrac{x}{l}$

$$V = -\int q(x)\,dx = \int -q_0 \frac{x}{l}\,dx = -\frac{q_0}{l}\int x\,dx = -\frac{q_0}{l}\cdot\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ V &= \frac{q_0 l}{6} \end{aligned} \Rightarrow -\frac{q_0}{2l}(0)^2 + C_1 = \frac{q_0 l}{6} \Rightarrow C_1 = \frac{q_0 l}{6}$$

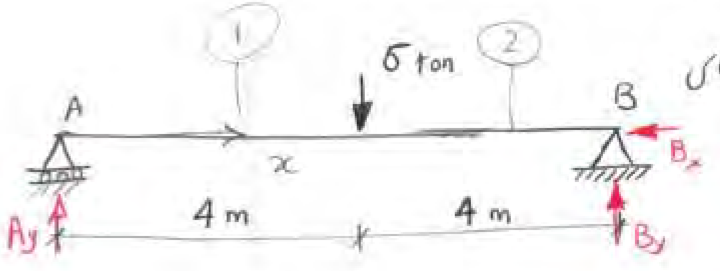
$$V = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 x^2}{2l} = q_0\left(\frac{l}{6} - \frac{x^2}{2l}\right)$$

معادله روبرو مساوی معادله I می‌باشد

$$M = \int V\,dx = \int q_0\left(\frac{l}{6} - \frac{x^2}{2l}\right)dx = q_0\int\left(\frac{l}{6} - \frac{x^2}{2l}\right)dx = q_0\left(\frac{l}{6}x - \frac{x^3}{3\times 2l}\right) + C_2$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ M &= 0 \end{aligned} \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{M = \frac{q_0}{6}\left(xl - \frac{x^3}{l}\right)}$$

در صورتیکه بار روی تیر تغییر کند و نتوان برای آن یک قاعده کلی نوشت می‌توان در هر مقطع که بار تغییر می‌کند، یک مقطع ترسیم و معادلات تعادل را در آن نوشت.



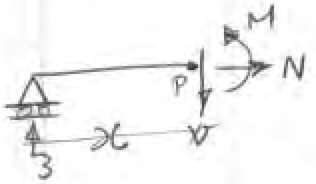
مثال: مطلوبست ترسیم دیاگرام نیروهای داخلی در شکل مقابل.

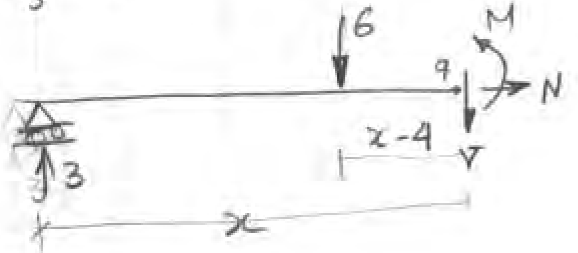
حل) ابتدا عکس‌العمل‌های تیر را بدست می‌آوریم.

$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = 0}$

$\sum (M)_B = 0 \Rightarrow 8A_y - 6\times 4 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 3}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = 3}$





حال محورهای مختصات را در A انتخاب و دو مقطع در فواصل 0-4 و 4-8 اعمال و معادلات نیروهای داخلی را بدست می‌آوریم.

$0 \leq x \leq 4$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{N = 0}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{V = 3}$

$\sum (M)_P = 0 \Rightarrow \boxed{M = 3x}$

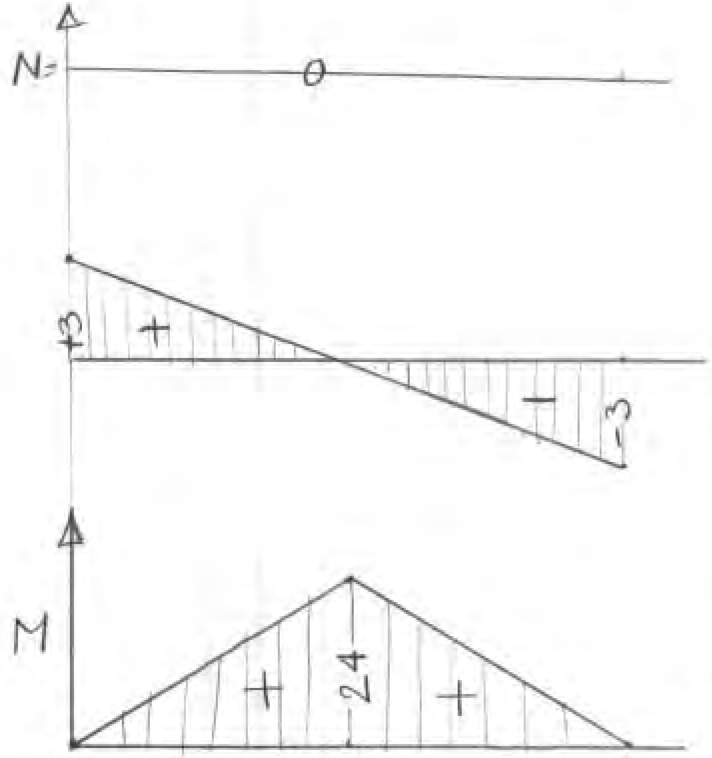
$4 \leq x \leq 8$

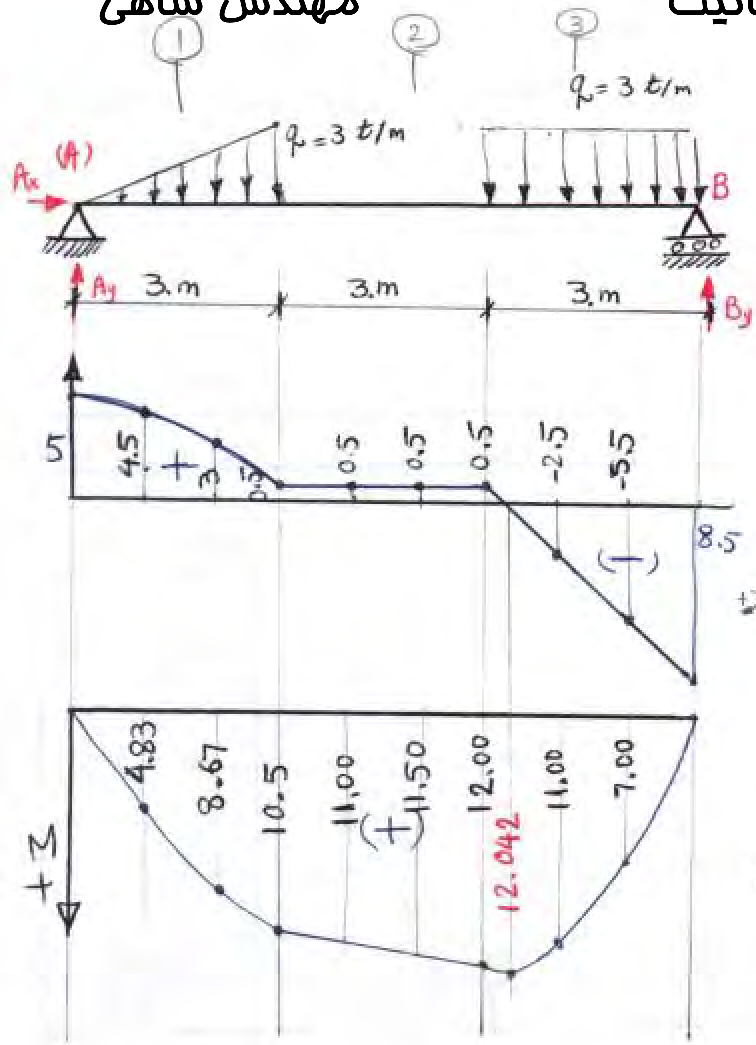
$\sum F_x = 0 \quad \boxed{N = 0}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{V = -3}$

$\sum M_q = 0 \Rightarrow 3x - 6(x-4) - M = 0$

$\boxed{M = 24 - 3x}$





مطلوبست بدست آوردن معادلات نیروهای برشی و لنگر خمشی تیر مقابل و ترسیم آنها.

حل:

ابتدا عکس العملهای تیر را بدست می‌آوریم

$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\times 3\times \frac{2}{3}\times 3 + 3\times 3\times\left(6+\frac{3}{2}\right) - 9B_y = 0$$

$$\boxed{B_y = 8.5 \text{ ton}}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

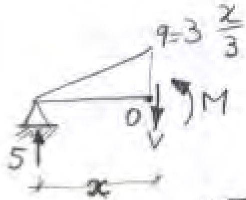
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -\frac{3\times 3}{2} - 3\times 3 + A_y + 8.5 = 0$$

$$\boxed{A_y = 5 \text{ ton}}$$

برای بدست آوردن معادله می‌بایست ۳ مقطع ترسیم کنیم و معادله را بنویسیم

1

$$0 \leq x \leq 3$$

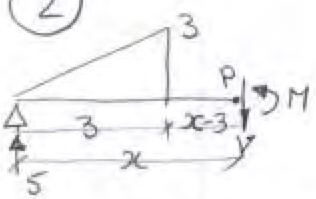


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 5 - \frac{x}{2}\times x - V = 0 \qquad \boxed{V = 5 - \frac{x^2}{2}}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_o = 0 \Rightarrow 5x - \frac{x^2}{2}\times\frac{x}{3} - M = 0 \qquad \boxed{M = 5x - \frac{x^3}{6}}$$

2

$$3 \leq x \leq 6$$

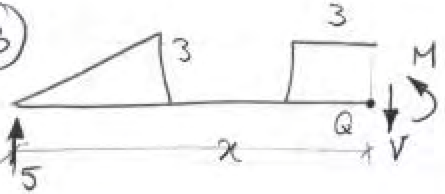


$$\sum F_y = 0 \quad 5 - \frac{3}{2}\times 3 - V = 0 \qquad \boxed{V = 0.5}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_p = 0 \rightarrow 5\times x - \frac{3\times 3}{2}\left(x - 3 + \frac{3}{3}\right) - M = 0$$

$$\boxed{M = 0.5x + 9}$$

(3)



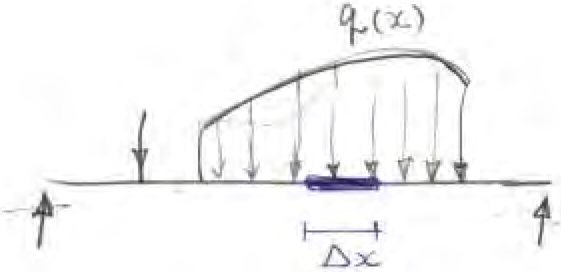
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 5 - \frac{3\times 3}{2} - (x-6)3 - V = 0$$

$$\boxed{V = -3x + 18.5}$$

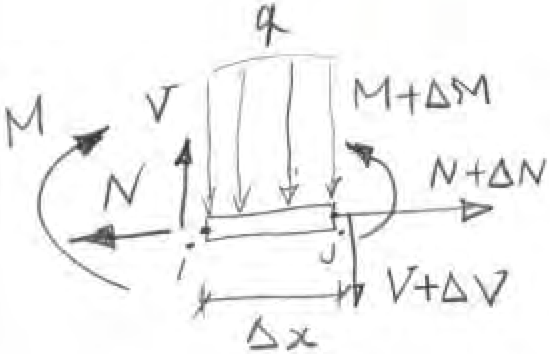
$$\circlearrowleft + \sum M_Q = 0 \Rightarrow 5\times x - \frac{3\times 3}{2}\times(x-2) - 3(x-6)\times\frac{(x-6)}{2} - M = 0$$

$$\boxed{M = 0.5x + 9 - \frac{3}{2}(x-6)^2}$$

رابطه مابین نیروهای داخلی:



اگر در سازه‌ای که در حال تعادل است جزء کوچکی را جدا و تعادل آن را بررسی کنیم می‌توانیم به روابط بین نیروهای داخلی پی ببریم.



اگر دو انتهای این جزء i و j باشد

نیروهای داخلی مابین دو انتها فرض کنیم در i معلوم باشد و به خاطر افزایش طول Δx در j هر کدام افزایشی خواهند داشت که در آن صورت داریم

$$i\left|\begin{array}{l} N \\ V \\ M \end{array}\right. \qquad j\left|\begin{array}{l} N+\Delta N \\ V+\Delta V \\ M+\Delta M \end{array}\right.$$

با استفاده از تعادل برای این جزء داریم.

$$\sum F_x=0 \Rightarrow -N+(N+\Delta N)=0 \Rightarrow \boxed{\Delta N=0} \quad (a)$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow V-q\Delta x-(V+\Delta V)=0$$

$$V-q\Delta x-V-\Delta V=0 \qquad \Delta V=-q\Delta x \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta V}{\Delta x}=-q} \quad (b)$$

$$\sum (M)_j=0 \Rightarrow M+V\cdot\Delta x-q\Delta x\left(\frac{\Delta x}{2}\right)-(M+\Delta M)=0$$

$$M+V\cdot\Delta x-\frac{q}{2}(\Delta x)^2-M-\Delta M=0 \qquad \Delta M=V\cdot\Delta x-\frac{q}{2}(\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = V - \frac{q}{2}\Delta x \quad \text{©}$$

اگر در روابط a و b و c ، Δx به سمت صفر میل کند خواهیم داشت

$$\boxed{\frac{dN}{dx} = 0} \quad , \quad \boxed{\frac{dV}{dx} = -q} \quad , \quad \boxed{\frac{dM}{dx} = V}$$

$$\boxed{N = \int 0\, dx = C} \qquad \boxed{V = -\int q\, dx} \qquad \boxed{M = \int V dx}$$

این روابط نشان می دهد در صورتیکه نیروی خارجی هیچ تصویری روی محور عضو نداشته باشد تغییرات نیروی محوری $(\frac{dN}{dx} = 0)$ صفر است پس $N =$ ثابت

اگر بار خارجی نداشته باشیم تغییرات برش صفر است $(\frac{dV}{dx} = 0)$ پس $V =$ ثابت

" " ثابت باشد $\longleftarrow$ $V = qx + c$ $\leftarrow$ برش خطی است

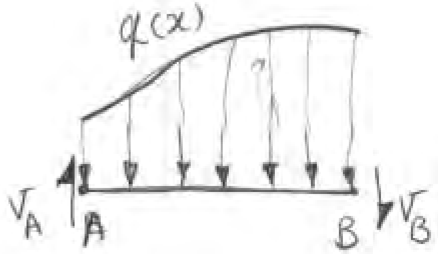
" " خطی باشد $(q = ax + b)$ $V = ax^2 + bx + c$ $\longleftarrow$ برشی درجه دو

که نتایج را می توان در جدول زیر نشان داد.

q	V	M
0	$C =$ ثابت	cx
q	$qx + c$	$qx^2 + cx + d$
$ax + b$	$\frac{a}{2}x^2 + bx + C$	$\frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + d$

q	V	M
صفر	ثابت	خطی
ثابت	خطی	سهمی (درجه ۲)
خطی	سهمی (درجه ۲)	درجه ۳
سهمی درجه ۲	درجه ۳	درجه ٤

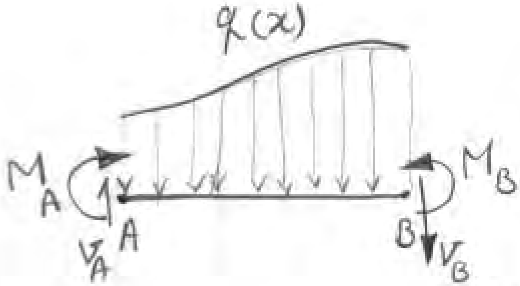
همچنین می‌توان نتیجه گرفت که برش در یک تیر برابر سطح زیر منحنی بار خارجی و لنگر برابر سطح زیر منحنی برش است.



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - V_B - \int_A^B q\,dx = 0$$

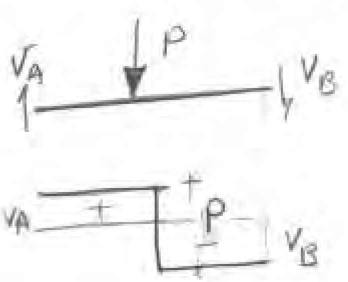
$$\boxed{V_B = V_A - \int_A^B q(x)\,dx}$$

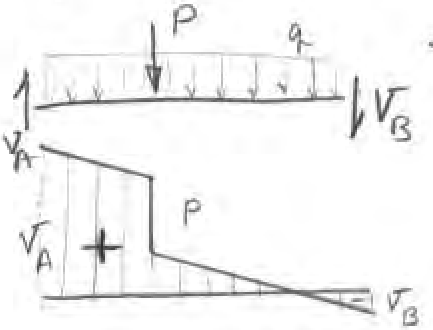
به طریق مشابه می‌توان نشان داد



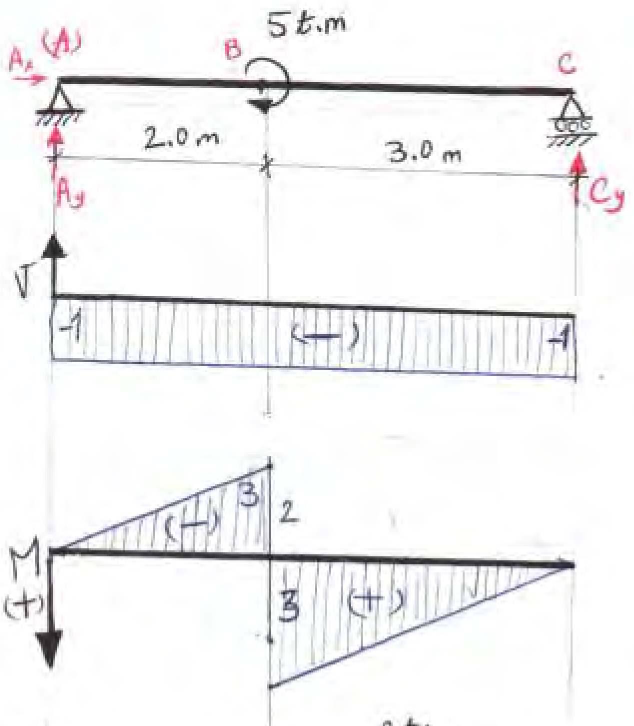
$$\boxed{M_B = M_A + \int_A^B V_x\,dx}$$

نکته: اگر در بار خارجی نیروی متمرکز داشته باشیم دیاگرام برش به اندازه بار خارجی در جهت آن جهش خواهد داشت





در محل بار متمرکز دیاگرام لنگر دارای شکستگی و تغییر شیب خواهد بود.



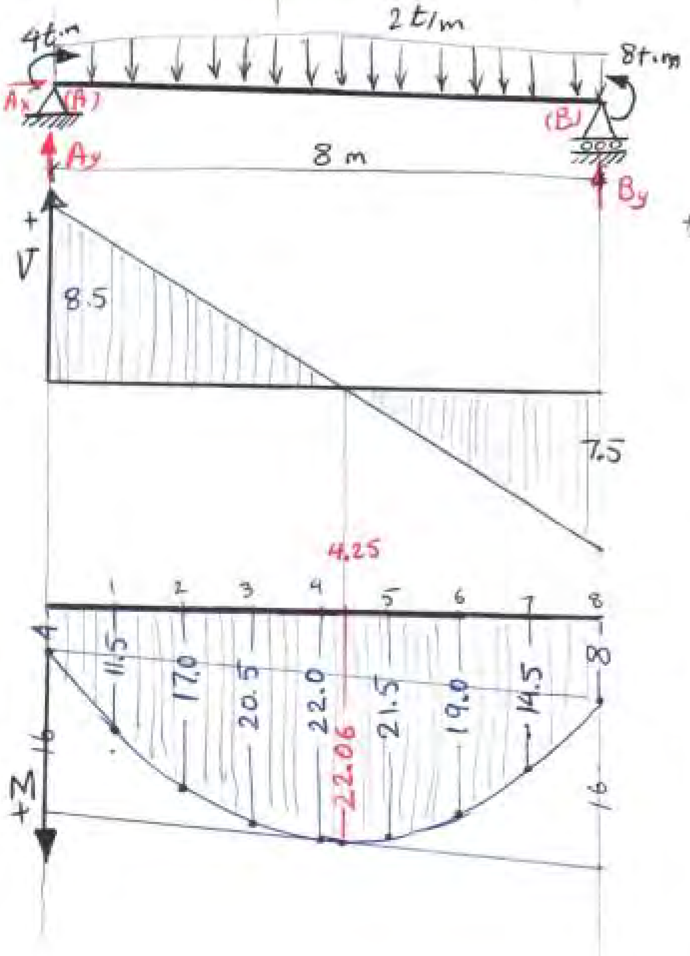
تمرین: مطلوبست ترسیم دیاگرام نیروهای برشی و خمشی تیر مقابل:

حل:
ابتدا عکس‌العمل‌های تیر را بدست می‌آوریم.

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 5 - 5C_y = 0 \Rightarrow \boxed{C_y = 1t}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + C_y = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = -1\ ton}$$



تمرین: مطلوبست ترسیم دیاگرام نیروهای برشی و خمشی تیر مقابل

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 4 + 2\times\frac{8^2}{2} - 8 - 8B_y = 0$$

$$\boxed{B_y = 7.5\ t}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 2\times 8 + 7.5 = 0$$

$$\boxed{A_y = 8.5\ t}$$

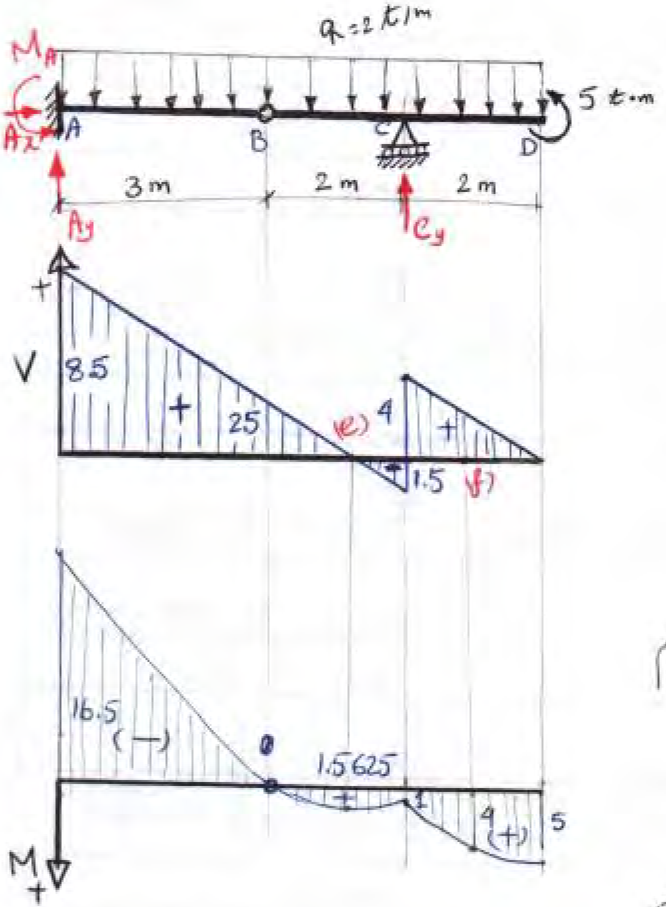
$$V = 8.5 - 2x$$

$$M = \int V\,dx = 8.5x - x^2 + C$$

$$\begin{matrix} x = 0 \\ M = 4 \end{matrix} \rightarrow C = 4$$

$$M = 8.5x - x^2 + 4$$

در تیر مقابل مطلوبست ترسیم دیاگرام برش و خمش

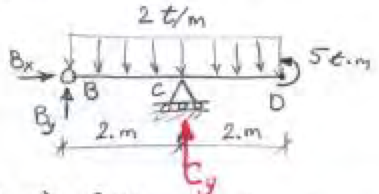


حل:

ابتدای عکس العملهای تیر را بدست می آوریم.

چون تعداد مجهولات 4 و با توجه به وجود مفصل در نقطه B تعداد معادلات نیز 4 می شود و سازه معین می باشد.

از محل مفصل مقطع می زنیم و سمت راست را نگه می داریم



$$\circlearrowleft + \sum M_B = 0 \Rightarrow 2\times4\times2 - 2C_y - 5 = 0$$

$$\boxed{C_y = \frac{11}{2} = 5.5\,ton}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -2\times7 + A_y + 5.5 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 8.5\,ton}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A + 2\times\frac{7^2}{2} - 5\times5.5 - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = 16.5\ t.m}$$

$V_A = A_y = 8.5$

$V_B = V_A - q.x_B = 8.5 - 2\times3 = 2.5\ t$

$V_C = V_A - q(x_C - x_B) = 2.5 - 2(5-3) = -1.5\ t.$

$V_C' = V_C + C_y = -1.5 + 5.5 = 4.0\ \ t$

$x_m = 5\times\frac{8.5}{10} = 4.25$

$M_A = -16.5$

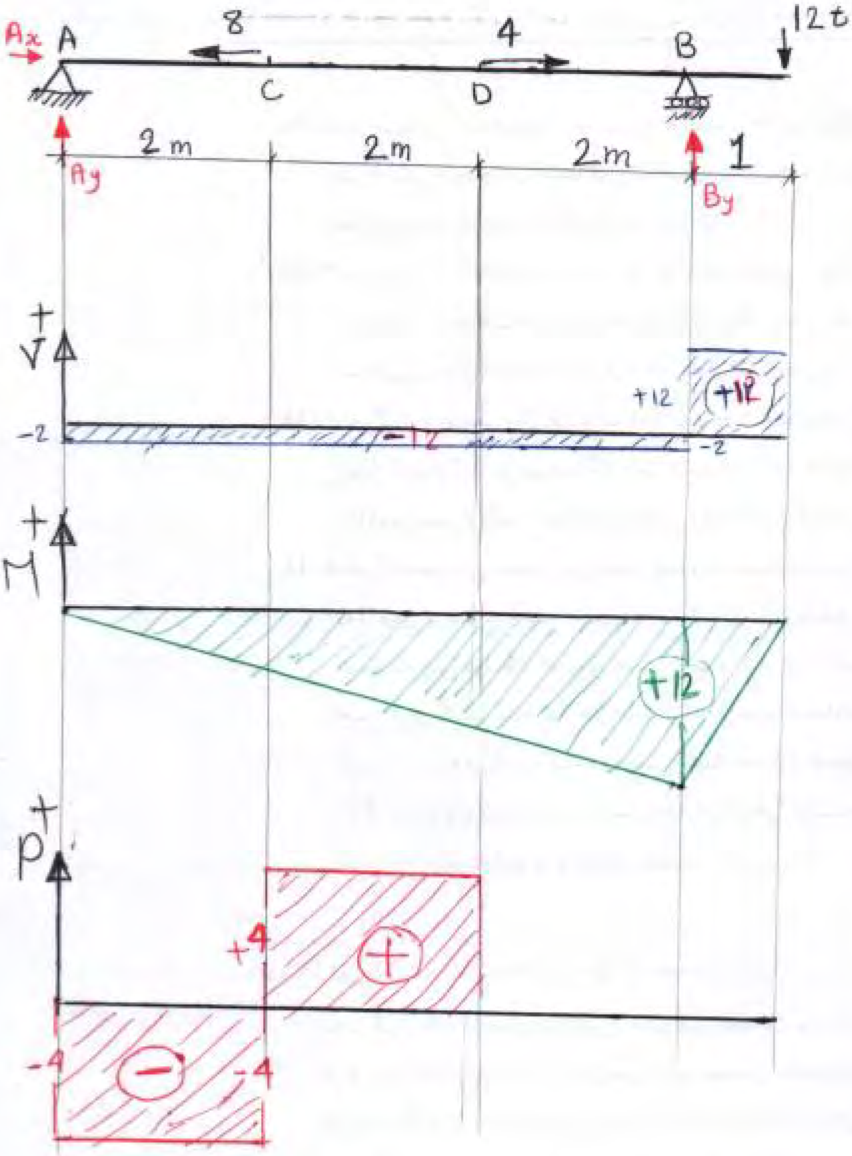
$M_B = -16.5 + \frac{8.5+2.5}{2}\times3 = 0$

$M_e = -16.5 + \frac{8.5}{2}\times4.25 = 1.5625$

$M_C = 1.5625 - \frac{1.5}{2}(5-4.25) = 1$

$M_f = 1 + \frac{4+2}{2}\times1 = 4$

$M_D = 1 + \frac{4}{2}\times2 = 5$



$\circlearrowleft + \sum M_A = 0$

$-6B_y + 12\times7 = 0 \Rightarrow B_y = \frac{84}{6}$

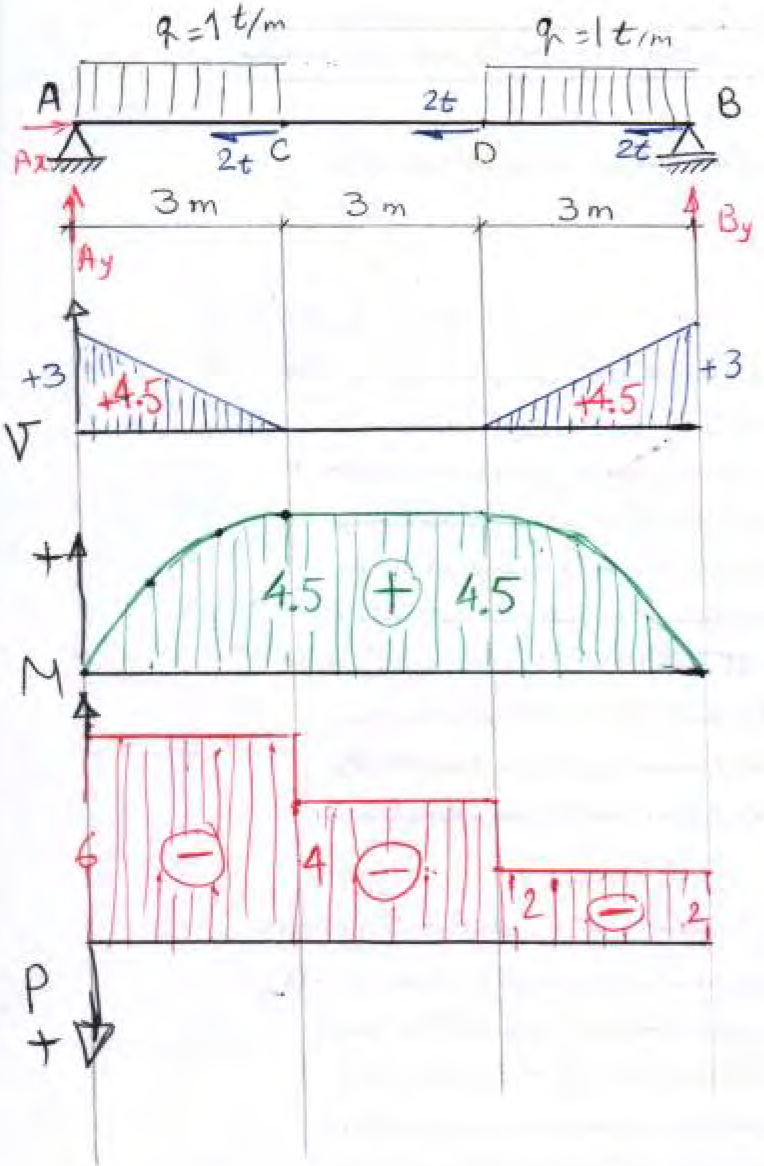
$\boxed{B_y = 14}$

$+\uparrow \sum F_y = 0$

$A_y + 14 - 12 = 0 \quad \boxed{A_y = -2}$

$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0$

$A_x - 8 + 4 = 0 \quad \boxed{A_x = 4}$



$\circlearrowleft \sum M_A = 0$

$$1\times 3\times \frac{3}{2} + 1\times 3\left(6+\frac{3}{2}\right) - 9B_y = 0$$

$$9B_y = \frac{9}{2} + 3\left(\frac{12+3}{2}\right) = 27$$

$$B_y = \frac{27}{9} = 3$$

$+\uparrow \sum F_y = 0$

$$A_y - 3\times 1 - 3\times 1 + B_y = 0$$

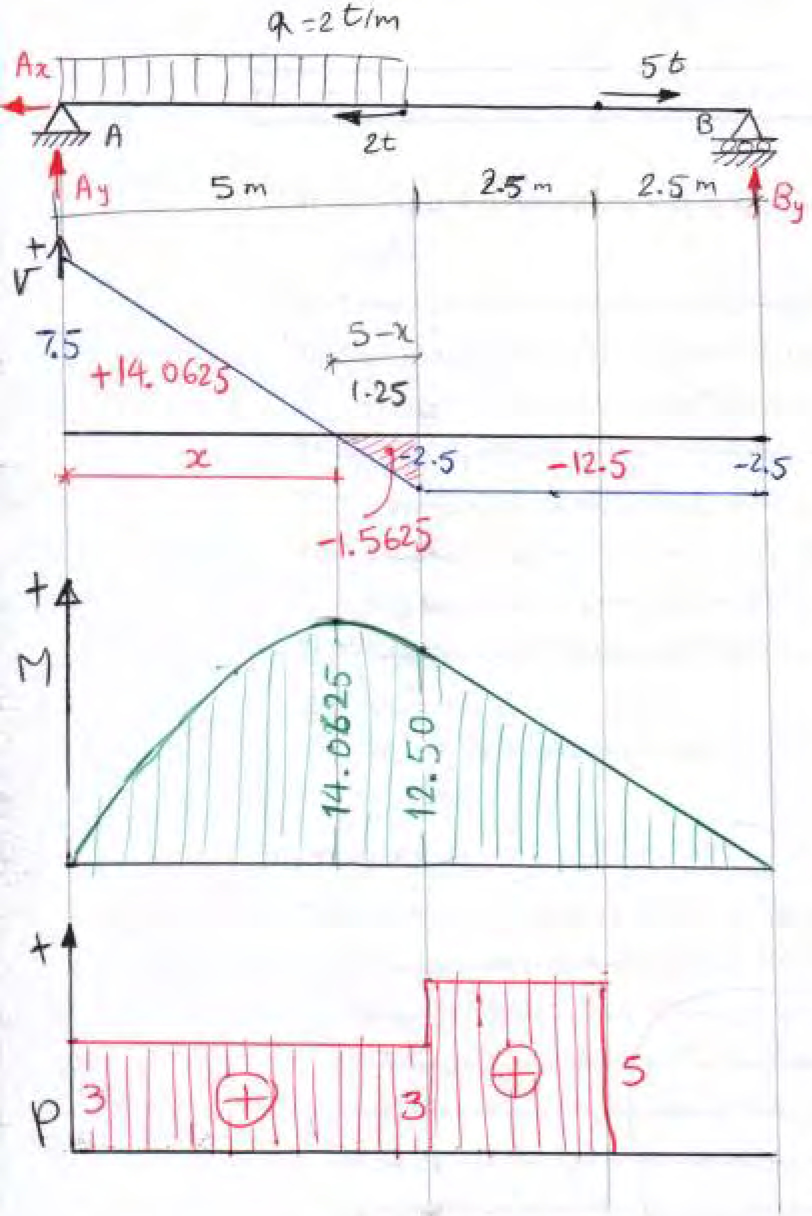
$$A_y - 6 + 3 = 0$$

$$A_y = 6 - 3 = 3$$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0$

$$A_x - 2 - 2 - 2 = 0$$

$$A_x = 6$$



$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$

$2 \times 5 \times \frac{5}{2} - 10 B_y = 0$

$10 B_y = 25$

$B_y = \frac{25}{10} = 2.5$

$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0$

$-A_x - 2 + 5 = 0$

$A_x = 3$

$+\uparrow \sum F_y = 0$

$A_y - 2 \times 5 + B_y = 0$

$A_y = 10 - B_y = 10 - 2.5 = 7.5$

$\frac{x}{7.5} = \frac{5}{10}$

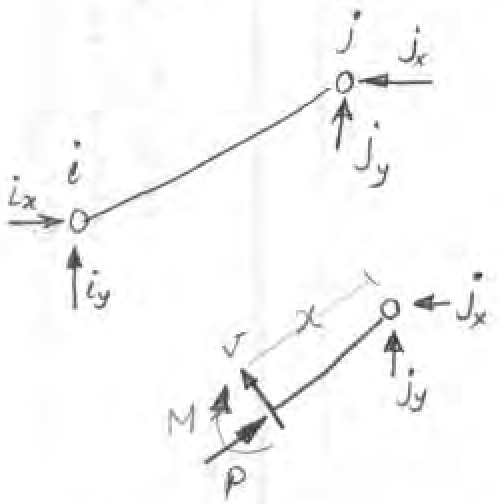
$x = \frac{5 \times 7.5}{10} = 3.75$

خرپاها (تیر مشبک):

برای پوشش دهانه های بزرگ، یکی از روشهای موثر و مفید استفاده از سازه های خرپایی است. سازه خرپایی سازه مرکبی است از ترکیب تعدادی میله که توسط اتصالات مفصلی به هم وصل می شوند ساخته می شود. در این سازه ها بار در محل اتصالات (گره ها) وارد می شود و هیچ نیرویی بر روی میله ها وارد نمی شود

عضو خرپائی:

به عضوی دو انتهای آن مفصل باشد و بر روی آن هیچ بار خارجی وارد نشود، عضو خرپائی گفته می شود.



در عضو خرپائی تنها نیروی محوری وجود دارد.

و برش و خمش در این عضو صفر است

همانطور که از شکل مقابل پیداست

$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum (M)_j = 0 \Rightarrow M + V\cdot x = 0$$

برای آنکه معادله فوق به ازای جمیع مقادیر x درست باشد. باید $M=V=0$ باشد

یعنی عضو خرپائی نه برش و نه خمش تحمل نمی کند.

با توجه به این امر است که خرپاها توان تحمل بارهای زیاد در دهانه های بزرگ را دارند چرا که با استفاده از خاصیت خرپائی نیروها را به امتداد اعضا تبدیل کرده و اعضائی که تنها نیروی محوری تحمل می کنند مقاومت زیادتری نسبت به اعضائی که هم

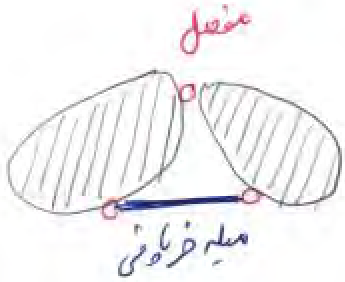
نیروی محوری و هم خمش و برش تحمل می‌کنند دارند.

روش های ساخت خرپا

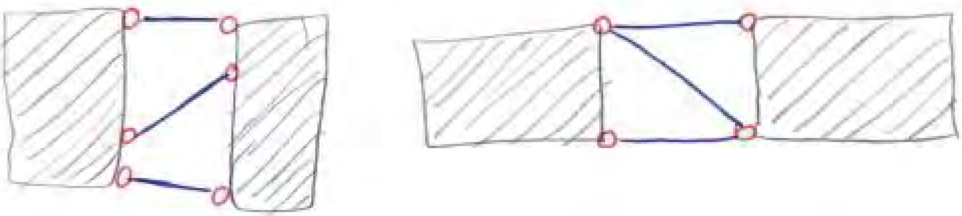
۱- اتصال سه میله یا سه جسم صلب توسط مفصل به هم

چون در هندسه تنها مثلث است که با سه ضلع شکل ثابتی دارد و چندضلعی های دیگر شکل ثابت و مشخص ندارند و با تغییر زاویه می‌توانند شکل آنها (طول‌های آنها) به هم بخورد.

۲- اتصال دو جسم صلب توسط یک میله و یک مفصل



۳- اتصال دو جسم صلب توسط سه میله خرپائی که حداقل یکی موازی دوتای دیگر نباشد.



(اجسام صلب می‌توانند میله یا خود ترکیب از خرپا های دیگر باشند)

حل خرپا:

خرپاهائی قابل حل در استاتیک هستند که از لحاظ تکیه‌گاهی معین باشند و پس از تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی می‌توان به دو روش خرپا را حل کرد (نیروی میله‌های خرپا را تعیین کرد)

الف) روش گره:

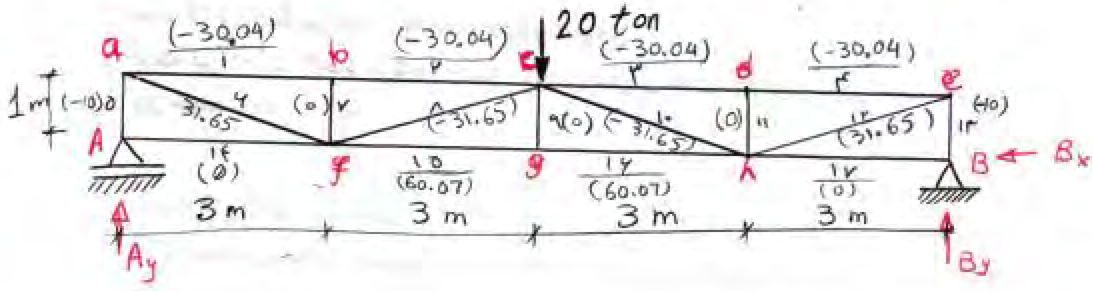
پس از تعیین عکس‌العملهای تکیه‌گاهی، میله‌ها و گره‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم و از گرهی که حداکثر دو میله با نیروی مجهول دارد شروع کرده و گره را جدا کرده و تعادل آن را بررسی می‌کنیم. و با استفاده از معادلات تعادل دو مجهول که همان نیروهای میله‌ها هستند را تعیین می‌کنیم. (تعداد معادلات ۲ است) $\sum F_x=0$ و $\sum F_y=0$ چرا که همه نیروها در محل گره همرس هستند (متقارب) و لذا گشتاور تبدیل به اتحاد خواهد شد.

در بررسی تعادل گره نیروی میله‌ها کششی فرض می‌شود و اگر جواب مثبت شد میله کششی و اگر منفی شد میله فشاری خواهد بود.

پس از حل گره اول به سراغ گره بعدی می‌رویم و چون نیروی دو میله تعیین شده لذا در گره بعدی مجهولات کم شده است.

اگر در خرپائی به بخشی رسیدیم که تعداد مجهولات در هر گره ۳ و بیشتر است. آن بخش خرپا یا نامعین داخلی و یا بغرنج است و توسط روشهای استاتیکی این بخش قابل حل نیست.

تمرین: خرپای مقابل را تحلیل کنید.



حل) ابتدا گره و اعضا را شماره گذاری می‌کنیم و سپس عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها را بدست می‌آوریم

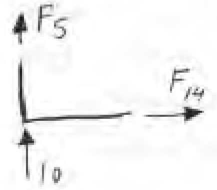
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

$$\circlearrowleft + \sum M_B = 0 \Rightarrow A_y(4\times3) - 20\times(2\times3) = 0 \Rightarrow A_y = \frac{20\times6}{12} = 10$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 10 - 20 + B_y = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = 10}$$

A)

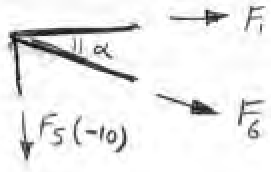
حل به روش گره و از گره A شروع به حل می‌کنیم



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{14} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_5 + 10 = 0 \quad \boxed{F_5 = -10}$$

a)



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 + \cos\alpha F_6 = 0$$

$$\boxed{F_1 = -0.949 F_6} \quad (I)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0.316 \\ \cos\alpha &= \frac{3}{\sqrt{1+3^2}} = 0.949\end{aligned}}$$

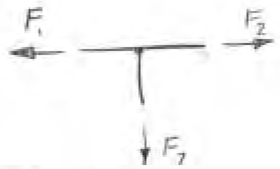
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_5 - \sin\alpha F_6 = 0 \qquad -(-10) - 0.316 F_6 = 0$$

$$-0.316 F_6 = -10 \Rightarrow F_6 = \frac{10}{0.316} = 31.65 \text{ ton}$$

Ⓘ → $F_1 = -0.949 \times 31.65 = -30.04$ ton

---

b)

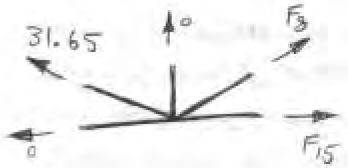


$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{F_7 = 0}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_1 + F_2 = 0 \quad \boxed{\Rightarrow F_2 = F_1 = -30.04}$

---

f)



$\sum F_y = 0 \Rightarrow 31.65 \times \sin\alpha + F_8 \sin\alpha = 0$

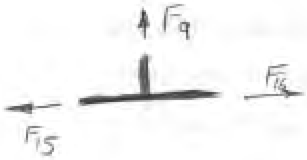
$\boxed{F_8 = -31.65}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -31.65 \cos\alpha + F_8 \cos\alpha + F_{15} = 0$

$-31.65 \times 0.949 + (-31.65) \times 0.949 + F_{15} = 0 \Rightarrow -60.07 + F_{15} = 0 \quad \boxed{F_{15} = 60.07}$

---

g)

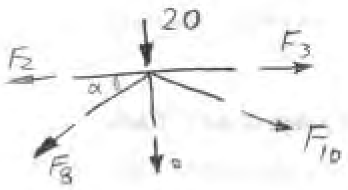


$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{F_9 = 0}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{15} + F_{16} = 0 \Rightarrow \boxed{F_{16} = F_{15} = 60.07}$

---

c)



$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_8 \sin\alpha - F_{10} \sin\alpha - 20 = 0$

$\overbrace{-(-31.65) \times 0.316}^{+10.00} - 0.316 F_{10} - 20 = 0$

$-0.316 F_{10} = 10 \Rightarrow \boxed{F_{10} = -31.65}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_2 - F_8 \cos\alpha + F_{10} \cos\alpha + F_3 = 0$

$-(-30.04) - (-31.65) \times 0.949 + (-31.65) \times 0.949 + F_3 = 0$

$30.04 + F_3 = 0 \Rightarrow \boxed{F_3 = -30.04}$

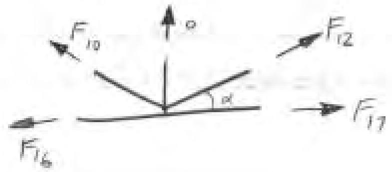
d)

$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{F_{11} = 0}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_3 + F_4 = 0 \Rightarrow \boxed{F_4 = F_3 = -30.04}$

---

h)



$\sum F_y = 0 \quad +F_{10} \sin\alpha + F_{12} \sin\alpha = 0$

$\boxed{F_{12} = -F_{10} = -(-31.65) = 31.65}$

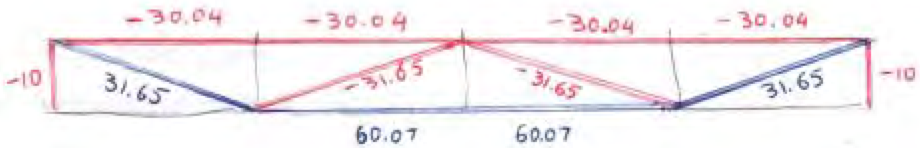
$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{16} - \cos\alpha\, F_{10} + \cos\alpha\, F_{12} + F_{17} = 0$

$-60.07 - (-31.65) \times 0.949 + 31.65 \times 0.949 + F_{17} = 0 \Rightarrow 0 + F_{17} = 0 \Rightarrow \boxed{F_{17} = 0}$

B)

$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{13} + 10 = 0 \Rightarrow \boxed{F_{13} = -10}$

$\sum F_x = 0 \quad -F_{17} + B_x = 0 \Rightarrow \boxed{0 + 0 = 0}$



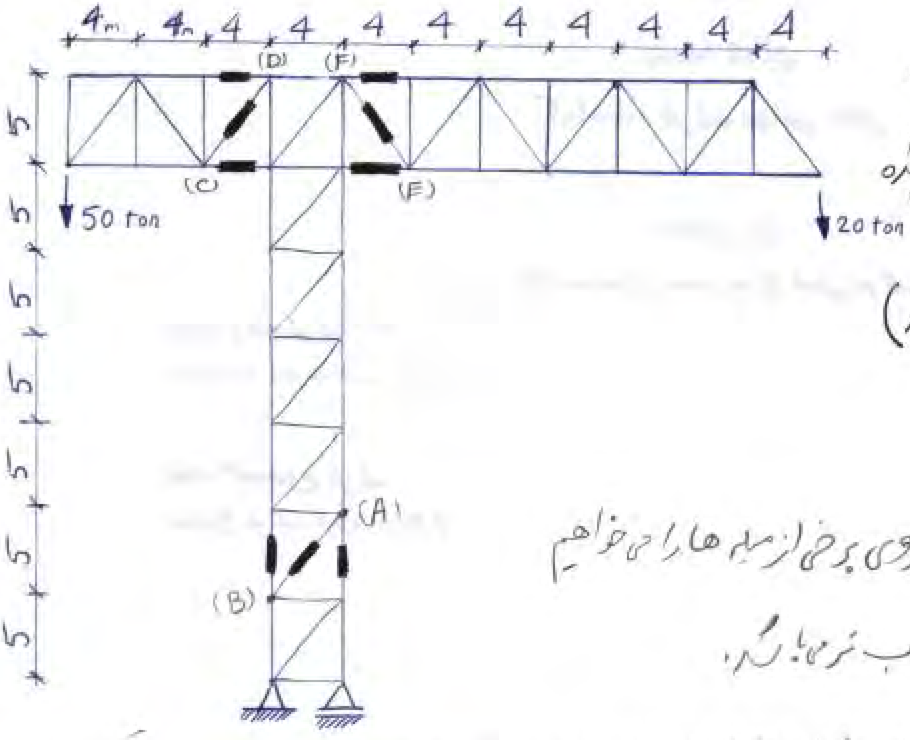
روش گره بیشتر برای زمانی که قصد داریم نیروی تمام میله های خرپا را بدست آوریم مناسب است ولی گاهی مواقع می خواهیم نیروی چند میله را تعیین کنیم و یا برای کنترل محاسبات یک خرپا می خواهیم نیروی چند میله را کنترل کنیم در این صورت روش گره روش مناسبی نیست.

ب - روش مقطع :

در این روش میله هائی را که می خواهیم نیروی آنها را تعیین کنیم مقطع می زنیم به نحوی که تعداد میله های قطع شده ۳ میله باشد. سپس تعادل یک طرف مقطع را بررسی می کنیم و نیروی سه میله را تعیین می کنیم.

در تعادل اگر بتوان گشتاور را حول نقطه ای نیروی دو میله از آن نقطه می گذرد گرفت مجهولات دو میله از معادله حذف شده و یک معادله یک مجهولی خواهیم داشت.

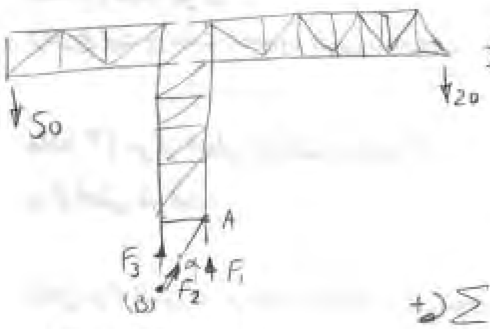
و یا در مقطع زدن می توان یک مفصل و یک میله را قطع کرد و اگر حول مفصل گشتاور بنویسیم به راحتی نیروی میله بدست خواهد آمد.



در خرپای مقابل مطلوبست تعیین نیروهای اعضاء مشخص شده
(توضیح ابعاد همگی به متر هستند)

حل) برای حالاتی که نیروی برخی از میله ها را می خواهیم استفاده از روش برش مناسب تر می باشد.

در محل میله های خواسته شده در شکل مقطعی اعمال و قسمت بالای خط حفظ و قسمت پائینی را حذف می کنیم.



$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow -50\times(4\times4)+20(7\times4)+4F_3=0$$

$$-800+560+4F_3=0$$

$$\boxed{F_3=\frac{240}{4}=60 \text{ ton}}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow -50\times(3\times4)+20(8\times4)-4F_1=0$$

$$-600+640-4F_1=0$$

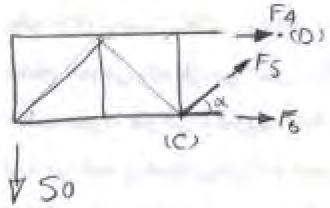
$$\sin\alpha=\frac{5}{\sqrt{5^2+4^2}}=0.781$$

$$-4F_1=-40 \qquad \boxed{F_1=+10}$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow -50-20+F_3+F_1+F_2\cdot\sin\alpha=0$$

$$-70+60+10+F_2\cdot\sin\alpha=0$$

$$0+F_2\cdot\sin\alpha=0 \qquad \boxed{F_2=0}$$



$$\circlearrowleft + \sum M_c = 0 \Rightarrow -50(2\times4) + 5F_4 = 0$$

$$5F_4 = 400 \Rightarrow \boxed{F_4 = 80 \text{ ton}}$$

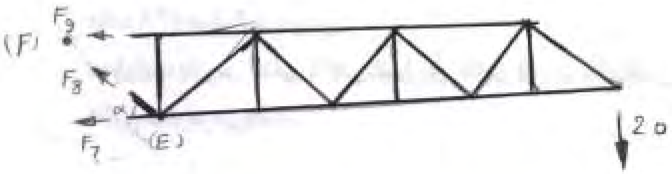
$$\circlearrowleft + \sum M_D = 0 \Rightarrow -50(3\times4) - 5F_6 = 0 \qquad F_6 = \frac{-600}{5}$$

$$\boxed{F_6 = -120 \text{ ton}}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_4 + F_6 + F_5 \cos\alpha = 0$$

$$80 - 120 + \frac{4}{\sqrt{5^2+4^2}} F_5 = 0 \Rightarrow -40 + 0.625 F_5 = 0$$

$$\boxed{F_5 = 64} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{5^2+4^2}} = 0.625$$



$$\circlearrowleft + \sum M_E = 0 \Rightarrow -5F_9 + 20(6\times4) = 0 \qquad \boxed{F_9 = \frac{480}{5} = 96 \text{ ton}}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_F = 0 \Rightarrow 5F_7 + 20(7\times4) = 0 \Rightarrow \boxed{F_7 = -\frac{560}{5} = -112 \text{ ton}}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_9 - F_7 - F_8 \cos\alpha = 0 \Rightarrow -96 - (-112) - 0.625 F_8 = 0$$

$$\boxed{F_8 = \frac{16}{0.625} = 25.6 \text{ ton}}$$