اصل خوش ترتیبی

تعریف: فرض کنید $(A, \leq)$ جزئاً مرتب باشد.

① عضو $a \in A$ را عضو بیشین (ماکسیمم) $(A, \leq)$ گوییم هرگاه به ازای $b \in A$، $b \leq a$

② عضو $a' \in A$ را عضو کمین (مینیمم) $(A, \leq)$ گوییم هرگاه به ازای هر $b \in A$، $a' \leq b$

مثال: در $(\{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}, \subseteq)$، عضو بیشین $\{a,b\}$ و عضو کمین ندارد.

نکته: ① اگر $(A, \leq)$ کلاً مرتب باشد، هر عضو ماکسیمال، بیشین هم خواهد بود.
همچنین هر عضو مینیمال، کمین هم خواهد بود.

② عضو بیشین و کمین، در صورت وجود، منحصر به فرد هستند.

تعریف: مجموعهٔ کلاً مرتب $(A, \leq)$ را خوش ترتیب گوییم هرگاه هر زیرمجموعهٔ ناتهی A دارای یک عضو کمین (مینیمم) باشد.

مثال: ① $(\mathbb{N}, \leq)$ خوش ترتیب است.

② $(\mathbb{Q}, \leq)$ و $(\mathbb{R}, \leq)$ هیچکدام خوش ترتیب نیستند.

③ به ازای هر $\overset{\text{متناهی}}{A} \subseteq \mathbb{R}$، $(A, \leq)$ خوش ترتیب است.

تمرین: می‌دانیم که $(\mathbb{Q}, \leq)$ خوش‌ترتیب نیست. رابطه‌ای چون $\leq'$ روی $\mathbb{Q}$ پیدا کنید به طوری که $(\mathbb{Q}, \leq')$ خوش ترتیب باشد.

حل: فرض کنید $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$ تناظری یک به یک باشد. تعریف کنید

$$p \leq' q \iff f(p) \leq f(q)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که $\leq'$ یک ترتیب کلی روی $\mathbb{Q}$ است و آنرا خوش ترتیب می‌کند.

مثلاً فرض کنید $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{Q}$ و $b_0 = \min\{f(p) : p \in \mathbb{Q}\}$ و $b_0 = f(a_0)$

در اینصورت a_0 عضو کمین A خواهد بود:

به ازای هر $a \in A$ داریم $f(a_0) \leq f(a)$ پس $a_0 \leq' a$

نکته: روش تمرین فوق در مورد هر مجموعه شمارا کار می‌کند، روی هر مجموعه شمارا می‌توان ترتیبی تعریف کرد که با آن ترتیب، خوش ترتیب شود. اما اگر اصل انتخاب را بپذیریم، حکم کلی زیر را هم خواهید داشت.

اصل خوش ترتیبی: به ازای هر مجموعه A، رابطه $\leq$ روی A وجود دارد به گونه‌ای که $(A, \leq)$ خوش ترتیب است.

اصل انتخاب با اصل خوش ترتیبی معادل است، در اینجا فقط اثبات بخش ساده‌تر این معادل بودن را می‌آوریم.

قضیه: اصل خوش ترتیبی، اصل انتخاب را نتیجه می‌دهد.

اثبات: فرض کنید $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای ناتهی از مجموعه‌های ناتهی باشد.

قرار دهید

$$B = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma .$$

بنابر اصل خوش ترتیبی، رابطه $\leq$ روی B وجود دارد به طوری که $(B, \leq)$ خوش ترتیب است. حال تابع زیر، تابع انتخاب برای خانواده مذکور است:

$$f : \Gamma \longrightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

$$f(\gamma) = \min A_\gamma$$

تمرین‌های مورد نظر از فصل ۷

بخش ۱.۷ همه

بخش ۲.۷ 1 تا 9

بخش ۳.۷ کلاً حذف

بخش ۴.۷ بجز ۵ و ۶

سؤالات کوئیز ششم

۱) اصل کمال در مورد اعداد حقیقی می‌گوید که هر زیرمجموعهٔ ناتهی از $\mathbb{R}$ چون A که دارای کران بالا باشد، یک کوچکترین کران بالا خواهد داشت (یعنی $\sup A$ وجود دارد). به کمک این اصل ثابت کنید که هر زیرمجموعهٔ ناتهی از $\mathbb{R}$ چون B که دارای کران پایین باشد، یک بزرگترین کران پایین دارد (یعنی $\inf B$ وجود دارد).

۲) قرار دهید

$$D=\{x\in\mathbb{Q}:\ 8<x^3<15\}$$

الف: آیا D بعنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Q}$ دارای کوچکترین کران بالا یا بزرگترین کران پایین است؟ چرا؟ در صورت وجود چه هستند؟

ب: سؤال الف را در حالتی که D زیرمجموعه ای از $\mathbb{R}$ درنظر گرفته می‌شود پاسخ دهید.

۳) عناصر ماکسیمال و مینیمال مجموعهٔ جزئاً مرتب

$$(\{2,3,6,7,8,12,14,15\},\ |\ )$$

جاییکه $|$ رابطهٔ عاد کردن است، کدامند؟

راهنمایی برای حل: ① قرار دهید $A=\{-x \mid x\in B\}$ در اینصورت A کران بالا دارد پس کوچکترین کران بالایی چون a دارد. در اینصورت $-a$ بزرگترین کران پایین B است (چرا؟)

② الف) داریم $D=\{x\in\mathbb{Q}: 2<x<\sqrt[3]{15}\}$. D در $\mathbb{Q}$ دارای بزرگترین کران پایین ۲ است. اما D در $\mathbb{Q}$ کوچکترین کران بالا ندارد زیرا $\sqrt[3]{15}$ گنگ است. توجه کنید که اگر $\alpha<\sqrt[3]{15}$ و α گویا باشد آنگاه β وجود دارد که $\alpha<\beta<\sqrt[3]{15}$.

ب) D در $\mathbb{R}$ دارای کوچکترین کران بالای $\sqrt[3]{15}$ و بزرگترین کران پایین ۲ است.

③ اعداد ۲، ۳، ۷ مینیمال هستند زیرا هیچیک از اعداد دیگر اینها را عاد نمی‌کنند.

اعداد ۱۵، ۱۴، ۱۲، ۸ ماکسیمال هستند چون هیچ عضو دیگر را عاد نمی‌کنند.