



جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش پرورش
تیمار کتابخانه

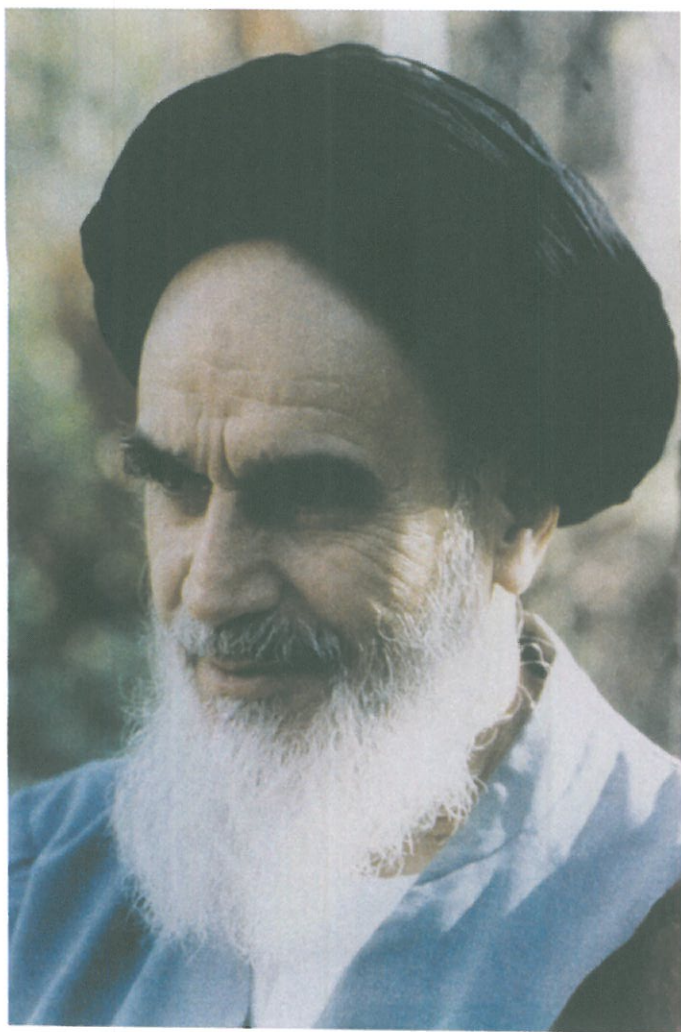
ریاضیات تکمیلی

دوره اول متوسطه

پایه هشتم

۱۱۷/۱

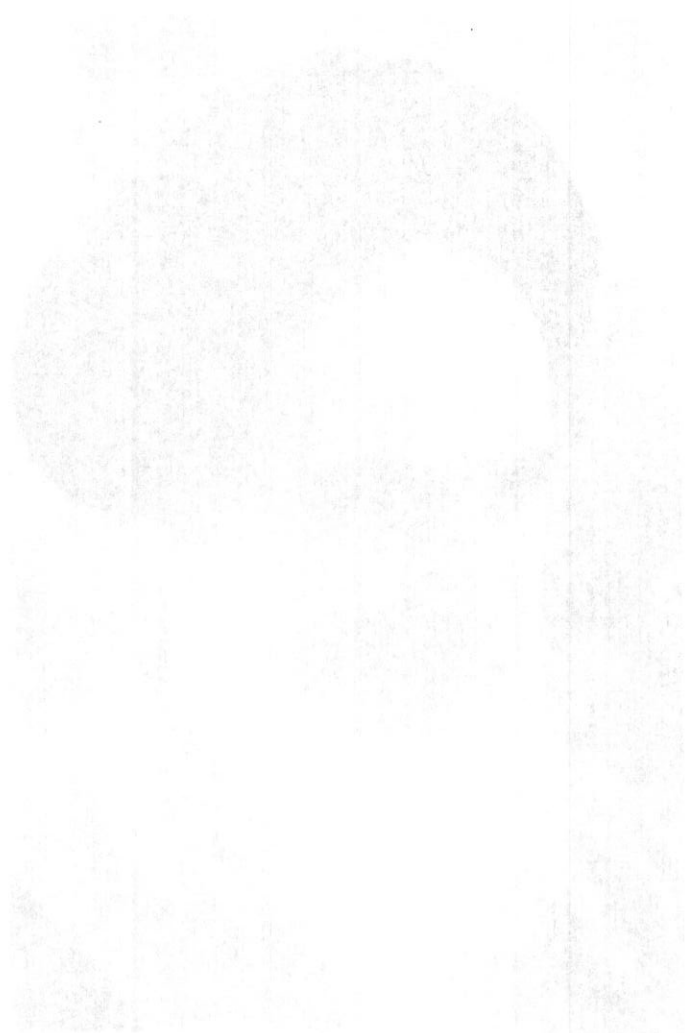
ویژه مدارس استعدادهای درخشان



بنیان‌گذار کبیر جمهوری اسلامی، حضرت امام خمینی (رحمة الله علیه)

ما در شرایط جنگ و محاصره توانسته‌ایم آن همه هنرآفرینی و اختراعات و پیشرفت‌ها داشته باشیم.
ان شاء الله در شرایط بهتر، زمینه کافی برای رشد استعداد و تحقیقات را در همه امور فراهم می‌سازیم.
مبارزه علمی برای جوانان زنده کردن روح جستجو و کشف واقعیت‌ها و حقیقت‌هاست.

این صفحه خالی است!



به نام خداوند جان آفرین

سخنی با معلم

ریاضیات (که در زبان پارسی قدیم «انگارش» خوانده می شد) را بیشتر دانش بررسی کمیتها، ساختارها، فضا و دگرگونی تعریف می کنند.

دیدگاه دیگری ریاضی را دانشی می داند که در آن با استدلال منطقی از اصول و تعریفها به نتایج دقیق و جدیدی می رسیم. با اینکه ریاضیات از علوم طبیعی به شمار نمی رود، ولی ساختارهای ویژه ای که ریاضی دانان می پژوهند بیشتر از دانش های طبیعی به ویژه فیزیک سرچشمه می گیرند و در فضایی جدا از طبیعت و محض گونه (مجرد) گسترش پیدا می کنند، به طوری که علوم طبیعی برای حل مسائل خود به ریاضی باز می گردند تا جوابشان را با آن مقایسه و بررسی کنند.

علوم طبیعی، مهندسی، اقتصاد و پزشکی بسیار به ریاضیات تکیه دارد ولی ریاضی دانان گاه به دلایل صرفاً ریاضی (و نه کاربردی) به تعریف و بررسی برخی ساختارها می پردازند.

این کتاب که در راستای اجرای سیاست غنی سازی برنامه درسی مدارس استعدادهای درخشان و مطابق با اصل یکپارچگی و فراگیری برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران تولید شده است، به تعمیق بخش هایی از کتاب درسی ریاضی پایه هشتم می پردازد. این کتاب حاصل فرایندی مطالعاتی با بیش از پنج سال است؛ با این همه تیزبینی صاحب نظران در هنگام تدریس در نقد منصفانه این کتاب بسیار ضروری است، زیرا بی نقصی این کتاب هیچ گاه در تصور نبوده است!

فصل های کتاب متناظر با کتاب درسی ریاضی است و مشخصاً دبیر ریاضی مجرب خواهد فهمید که تدریس هر بخش را چه زمانی آغاز کند. با این همه کلید واژه های بخش های کتاب به صورت فهرست وار بدین شرح است:

۱. تمرین های این کتاب با پیش فرض استعداد برتر و نیاز مخاطبین نگاشته شده است. یک معلم خلاق می تواند مخاطبین خود را در هنگام تدریس با بخشی از تمرین ها به چالش مفهومی

بکشد. تفکر درباره همه تمرین‌ها در سال آموزشی واجب تلقی می‌شود، و این امر شاید در تضاد با معرفی کتاب‌های دیگر باشد. خلاقیت خود را با تدریس «این کتاب» به تصویر بکشید!

۲. دیر زمانی است که مقوله کارگاه بازی در فرایند تدریس نقش آفرینی می‌کند و کتاب پیش رو نیز متناسب با موضوع، با کارگاه‌های آموزشی غنی شده است. توصیه می‌شود زمانی یک یا دو جلسه‌ای برای اجرای هریک از آنها در نظر بگیرید؛ و مکانی که می‌تواند فضایی به جز فضای مرسوم کلاسی باشد را به این امر اختصاص دهید.

۳. تغییرات فرهنگ آموزشی نیز مد نظر قرار گرفته‌اند. برای تغییر نسل، باید نخست دیدگاه خود را تغییر مناسب داد. برای این منظور باب بخشی به نام گفتگو در این کتاب گشوده شده است، تا عیاری برای سنگ محک نقد نظام تفکر تدریس معلمین در اختیار قرار داده شود. این گفتگوها آینه‌ای است برای نمود ساخت ارزش‌های رو به رشد، تا یک معلم نهاد ایستایی و پویایی خود را مشاهده کند.

۴. شماره برخی از مسائل کتاب با رنگ صورتی مشخص شده‌اند. این رنگ برای اعلام نیاز زمان بیشتری برای تفکر است. معلم باید در هنگام حل این مسائل زمان شایسته‌ای برای تفهیم روش حل و توصیف ایده‌ها و راهکارهای آن ارائه دهد؛ تا در طول یک سال آموزشی دانش آموزان منفعل، در کنار صدها مسئله مهارتی، با حل چند مسئله چالش برانگیز هم آشنا گردند.

۵. شماره برخی از مسائل کتاب با رنگ زرد مشخص شده‌اند. این رنگ نشان دهنده یک برنامه مطالعاتی است که در فرهنگ عامه به نام پروژه شناخته می‌شود. به زبان تمثیل اگر حل مسئله ریاضی را به بازچینش درست یک نقاشی قطعه‌قطعه شده تشبیه کنیم، انجام یک پروژه به مثابه کشیدن یک نقاشی خلاقانه با موضوع داده شده است. این هر دو ضروری است؛ زیرا پر واضح است که آحاد اندیشمندان باید بتوانند کاری از جنس حل مسئله را به‌خوبی انجام دهند، در حالی‌که نخبگان و سرآمدان باید به خلق آثار خلاقانه و ماندگار بپردازند.

فهرست مطالب

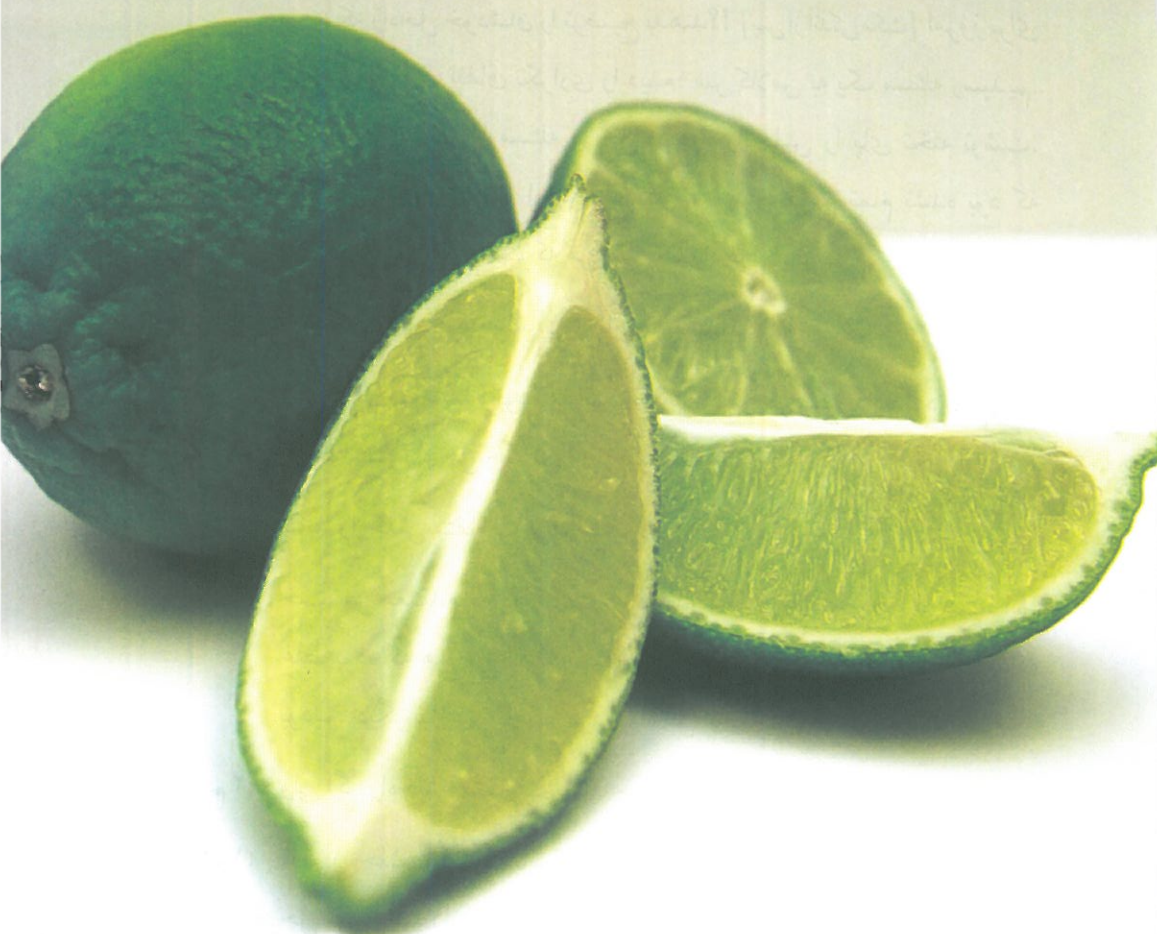
۱	فصل ۱ - عددهای صحیح و گویا
۲	گفت و گو
۴	یادآوری عددهای صحیح
۷	عددهای گویا
۱۷	فصل ۲ - عددهای اول
۱۸	گفت و گو
۲۰	یادآوری عددهای اول
۲۲	تعیین عددهای اول
۲۵	ماشین کانوی
۲۷	فصل ۳ - چندضلعی‌ها
۲۸	گفت و گو
۳۰	کارگاه بازی
۳۱	چندضلعی‌ها و تقارن
۳۳	توازی و تعامد
۳۷	چهارضلعی‌ها

۳۸	زاویه‌های داخلی و خارجی
۴۹	فصل ۴- جبر و معادله
۵۰	ساده کردن عبارت‌های جبری
۵۴	پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری
۵۷	تجزیه عبارت‌های جبری
۶۲	معادله
۶۷	فصل ۵- بردار و مختصات
۶۸	کارگاه بازی
۶۹	دریچه‌ای به روبوکاپ
۷۲	کاربردهایی از بردارها
۷۴	بردار، رودخانه و غواص
۷۷	ریاضیات تخم مرغی
۷۹	فصل ۶- مثلث
۸۰	رابطه فیثاغورس
۸۵	هم‌نهشتی
۸۶	مثلث‌های هم‌نهشت
۹۲	هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه
۹۶	تخیلات یک دانش‌آموز در کلاس ریاضی (۱)
۹۷	فصل ۷- توان و جذر
۹۸	توان
۱۰۰	اعداد رادیکالی
۱۰۱	تخیلات یک دانش‌آموز در کلاس ریاضی (۲)

۱۰۳	فصل ۸- آمار و احتمال
۱۰۴	گفت و گو
۱۰۶	دسته‌بندی داده‌ها و میانگین
۱۱۲	کارگاه بازی- حلقه شانس
۱۱۴	احتمال یا اندازه‌گیری شانس
۱۱۷	بررسی حالت‌های ممکن
۱۲۳	فصل ۹- دایره
۱۲۴	دایره‌ها
۱۳۱	کتاب‌نامه
۱۳۳	درباره طرح روی جلد

این صفحه خالی است!

عددهای صحيح و گویا



عددهای گویا را هر روز بارها می بینید و به کار می برید،
فقط کافیست کمی بیشتر دقت کنید.

گفت‌وگو

معلم ۱: [با لحنی خسته و معترض] من نمی‌فهمم که چرا بعضی از دانش‌آموزها دوست دارند که راه‌حل خودشان را توضیح بدهند؟! [پس از اندکی مکث] امروز برای صدمین بار یک اتفاق تکراری را دیدم؛ سر کلاس به یک مسئله رسیدیم. یکی از دانش‌آموزها مسئله را حل کرد و راه‌حلش را پای تخته نوشت. من هم دوباره راه حل او توضیح دادم. هنوز حرفم تمام نشده بود که دانش‌آموزی دیگر گفت که من هم یک راه‌حل دیگر دارم.

معلم ۲: از اینکه وسط حرف شما پرید ناراحت شدید؟

معلم ۱: نه! حرفم تمام شده بود! با اینکه کامل توضیح داده بودم، ولی او می‌خواست راه حل خودش را توضیح بدهد.

معلم ۲: شاید راه‌حلش متفاوت بوده است؟

معلم ۱: خُب، من معتقدم که دو حالت دارد: یا راه‌حلش غلط بوده یا درست. اگر غلط بوده که هیچ، و اگر درست بوده ما سر کلاس یک راه‌حل ارائه داده بودیم. دیگر نیازی به چک کردن راه‌حل او نداشتیم.

معلم ۲: ولی اگر راه‌حلش متفاوت باشد چه؟

معلم ۱: «اگر راه‌حلش متفاوت باشد» یعنی چه؟ مگر فرقی دارد از چه راه‌حلی مسئله حل شده باشد؟!

معلم ۲: برای شما؟ یا برای آن دانش‌آموز؟

معلم ۱ پاسخی نداد.

معلم ۲: برای شما می‌تواند خیلی فرق نداشته باشد، اما برای او مهم است.

معلمی دیگر از آن سوی اتاق دبیران وارد بحث شد.

معلم دیگر: ببخشید وارد بحث می‌شوم. منم فکر می‌کنم که روحیه آن دانش‌آموز آسیب می‌بیند. اگر زمان کلاس اجازه می‌دهد، خوب است که آن دانش‌آموز هم راه‌حل خودش را توضیح دهد.

معلم ۲: [قاطعانه] ببخشید! اما من منظورم روحیه‌اش نبود! من منظورم چیزی فراتر بود!

اکنون همه نگاه‌های دفتر دبیران به سمت او بود.

معلم ۲: یک معلم خوب معلمی است که بتواند خوب تدریس کند؛ یعنی بتواند نظام منطقی ذهن خودش را به شاگردهایش یاد بدهد؛ اما ساختار ذهنی هر آدمیزاد عاقلی نظام و منطقی خاص دارد. یک معلم عالی کسی است که بتواند با هر منطق ذهنی کنار بیاید و با راه‌حل هر کدام از شاگردهایش که متفاوت فکر می‌کنند، متفاوت برخورد کند.

معلم دیگر: یعنی با شاگردهای زرنگش، محترمانه‌تر برخورد کند؟ و بیشتر به ایشان فرصت بدهد؟

معلم ۲: منظور من این نیست! من می‌گویم هر دانش‌آموزی نگرش خاص خودش را دارد. یک معلم عالی کسی است که بتواند آن نگرش را نقد کند و بینش آن دانش‌آموز را ارتقا بدهد؛ نه اینکه نگرش و بینش خودش را با نگرش و بینش آن دانش‌آموز جایگزین کند. باید اجازه بدهد دانش‌آموز ایده‌اش را توضیح بدهد. اگر غلط بود، اشتباهش را بگوید و کمکش کند که راه‌حلش را اصلاح کند.

معلم ۱: [با تردید] این کار وقت کلاس را خیلی می‌گیرد! چه فایده‌ای دارد؟!

معلم ۲: فایده؟! برای هر نفر، بهترین راه‌حل، راه‌حلی است که مال خودش باشد.

یادآوری عددهای صحیح

۱. الف) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

• $10 + 3 - 7 - 2$

• $3 \times 4 \div 2 \times 8$

ب) خلیل محاسبه‌های بالا را این‌گونه انجام داد:

• $10 + 3 - 7 - 2 = 10 + 3 + (-7) + (-2) = 4$

• $3 \times 4 \div 2 \times 8 = 3 \times 4 \times \frac{1}{2} \times 8 = 48$

درباره روش خلیل بحث کنید.

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $12 - 8 - 3 - 4 + 6$

ب) $2 \times 6 \div 3 \div 2 \times 5$

ج) $4^3 + 3^2 - 2 \times 5^2$

د) $6 \times 2^3 - 2 \times 6^2$

ه) $(7^2 - 5^2)(6 \times 3^2 + 4) \times 20 - 25$ و $(5^3 - 3^5)(3^2 - 2^3)^4 - 5^4$

ز) $(2 - 3^2 \times 5^2 \div 15 - 2^3)(7 + 2)$ ح) $5^2 - (3^2 - 1^3) \times 2^2 \div 4^2$

ط) $(4^3 - 5^2 \times 2)^2 - 8 \div 2^4 - 1 \times 3 - 4 \times (8 + 3^2)$

۳. با قرار دادن دو علامت ضرب و دو علامت جمع در جاهای خالی عبارت

$5 \square 4 \square 3 \square 2 \square 1$

کدام یک از اعداد ۱۵، ۲۷، ۲۹ و ۳۰ می‌تواند حاصل عبارت داده شده باشد؟

۴. یک ماشین حساب خراب داریم که نمی‌تواند همزمان بیش از دو عدد را باهم جمع

کند و هرگاه حاصل جمع اعداد از ۹ بیشتر شود، حاصل جمع را ۳- اعلام می‌کند. با

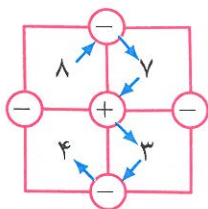
پرانتزگذاری روی عبارت‌های زیر و محاسبه آنها، حاصل حداقل چقدر می‌شود؟

الف) $1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2$

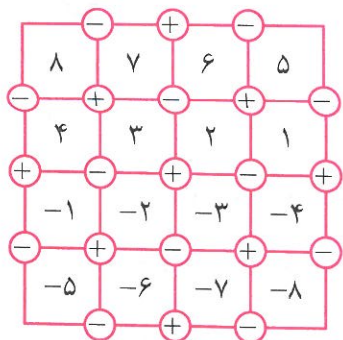
ب) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$



• عددهای صحیح و گویا •



۵. در جدول روبه‌رو، از خانهٔ بالا سمت چپ به خانهٔ پایین سمت چپ مسیری یافته‌ایم که حاصل آن برابر صفر شده است.

$$8 - 7 + 3 - 4 = 0.$$


در جدول زیر، از خانهٔ بالا سمت چپ، یعنی خانهٔ ۸ شروع به حرکت کنید و مسیری بیابید که به خانهٔ پایین سمت چپ، یعنی خانهٔ -۵ ختم شود و حاصل برابر ۸ شود. توجه کنید که به هر خانه و هر دایره حداکثر یک بار می‌توان وارد شد.

۶. نجمه حاصل عبارت $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$ را این‌گونه محاسبه کرد:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

الف) راه‌حل نجمه را شرح دهید.

ب) با استفاده از راه‌حل نجمه، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 117.$$

۷. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $2 + 4 + 6 + \dots + 86$

ب) $4 + 7 + 10 + \dots + 124$

ج) $-43 - 37 - 31 - \dots + 173 + 179$

د) $(-5) - (-6) - (-7) - \dots - (-89)$

ه) $4 - 5 + 6 - 7 + 8 - \dots + 88 - 89 + 90$

و) $-2 - 4 + 6 - 8 - 10 + 12 - \dots - 236 - 238 + 240$

ز) $(20 - 1) + (19 - 1) + (18 - 1) + \dots + (-18 - 1) + (-19 - 1) + (-20 - 1)$

۸. نوشتن حاصل عبارت $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$ را این گونه محاسبه کرد:

می دانیم:



$$1^2 = 1 \times 1 = 1,$$

$$2^2 = 2 \times 2 = 2 + 2,$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 3 + 3 + 3,$$

$$4^2 = 4 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4,$$

$$5^2 = 5 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5.$$

با استفاده از رابطه های فوق سه برابر مجموع $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$ را این گونه

حساب می کنیم:

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \ 2 \\ \hline 3 \ 3 \ 3 \\ \hline 4 \ 4 \ 4 \ 4 \\ \hline 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 4 \ 5 \\ \hline 3 \ 4 \ 5 \\ \hline 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ \hline 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 5 \ 4 \\ \hline 5 \ 4 \ 3 \\ \hline 5 \ 4 \ 3 \ 2 \\ \hline 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 11 \\ \hline 11 \ 11 \\ \hline 11 \ 11 \ 11 \\ \hline 11 \ 11 \ 11 \ 11 \\ \hline 11 \ 11 \ 11 \ 11 \ 11 \\ \hline \end{array}.$$

در نتیجه،

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{11 \times \left(\frac{5 \times 6}{2}\right)}{3}.$$

الف) راه حل نوشتن را شرح دهید.

ب) با استفاده از راه حل نوشتن، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

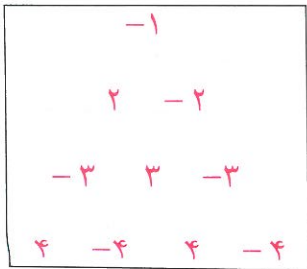
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 117^2.$$

ج) دو مسئله، متفاوت از مسائل بالا، بسازید که یکی با ایده نجمه و دیگری با ایده

نوشتن حل شود.

• عددهای صحیح و گویا •

۹. الگوی عددی زیر را در نظر بگیرید.



الف) دو سطر بعدی این الگو را بنویسید.

ب) اگر این الگو را تا سطر بیستم بنویسیم و سپس همه عددهای آن را با هم جمع بزنیم، حاصل چه عددی می‌شود؟

ج) این الگو را تا سطر چندم ادامه دهیم که مجموع همه عددهای آن -144 شود؟

عددهای گویا

۱. اگر نقطه A نمایش $\frac{2}{5}$ و نقطه B نمایش $\frac{3}{4}$ روی محور اعداد زیر باشد و فاصله این دو عدد روی محور به پنج قسمت مساوی تقسیم شده باشد، در این صورت نقطه C نمایش چه عددی است؟



۲. اگر به مخرج کسر $\frac{10}{15}$ عدد ۶ را اضافه کنیم، چه عددی باید به صورت کسر اضافه کنیم تا مقدار کسر تغییر نکند؟

۳. مقدار x را در معادله‌های زیر به دست آورید. سپس با جایگذاری مقدار x ، کسرهای سمت راست و چپ هر تساوی را مشخص کنید.

الف) $\frac{46}{2/5} \times 5 = \frac{x}{\frac{125}{10}}$
ج) $\frac{x}{12} = \frac{x+6}{3}$

ب) $-\frac{4}{11} = \frac{x}{x+30}$

۴. در تساوی زیر، مقدار x را پیدا کنید.

$$\frac{1}{x} + \frac{5}{2x} + \frac{7}{4x} + \frac{6}{8x} = \frac{3}{2}$$

۵. خانم خیرخواه و آقای خیراندیش دو معلم ریاضی هستند. آنها دربارهٔ اینکه چرا عدد صفر معکوس ندارد، این‌گونه بحث کردند:

در کلاس درس خانم خیرخواه	در کلاس درس آقای خیراندیش
خانم خیرخواه: ۱۲ تقسیم بر ۴ یعنی ۱۲ تا سیب داریم و ۴ تا سبد و می‌خواهیم در هر سبد به‌طور مساوی سیب قرار دهیم. حالا در هر سبد چند تا سیب داریم؟	آقای خیراندیش: معکوس ۵ یعنی $\frac{1}{5}$ ، مقداری است که اگر ۵ تا از آن داشته باشیم یعنی یک واحد داریم.
دانش‌آموزان: ۳ تا.	$5 \times \frac{1}{5} = 1$
خانم خیرخواه: با این تعبیر اگر بخواهیم ۱۲ را تقسیم بر صفر کنیم، یعنی ۱۲ تا سیب داریم و صفر تا سبد. یعنی سبد نداریم و می‌خواهیم در هر سبد به‌طور مساوی سیب قرار دهیم. حالا در هر سبد چند تا سیب داریم؟	معکوس ۲ یعنی $\frac{1}{2}$ ، مقداری است که اگر ۲ تا از آن داشته باشیم یعنی یک واحد داریم.
دانش‌آموزان: خانم سبد نداریم که بخواهیم داخلش سیب بگذاریم.	$2 \times \frac{1}{2} = 1$
خانم خیرخواه: به همین خاطر تقسیم بر صفر تعریف نمی‌شود. در نتیجه یک تقسیم بر صفر یعنی $\frac{1}{0}$ یا به عبارتی معکوس صفر هم تعریف نشده است.	با این تعریف معکوس صفر، یعنی $\frac{1}{0}$ چه معنایی دارد؟
	دانش‌آموزان: یعنی مقداری که اگر صفر تا از آن داشته باشیم، یک واحد داریم.
	$0 \times \frac{1}{0} = 1$
	آقای خیراندیش: $\frac{1}{0}$ عددی است که اگر هیچی از آن نداشته باشیم یک واحد داریم و این معنایی ندارد. پس معکوس صفر تعریف نشده است.

الف) دربارهٔ دو متن بالا بحث کنید و ایرادهای آنها را، در صورت وجود، بیابید.

ب) تعبیر دیگری برای اینکه چرا صفر معکوس ندارد پیدا کنید.

• عددهای صحیح و گویا •

۶. بین دو عدد ۹ و ۱۰، سی عدد گویا بنویسید.

۷. حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک کسر ساده‌نشده بنویسید.

الف) $\frac{6 \times 14}{6}$

ب) $\frac{6 + 14}{6}$

ج) $\frac{3 \times 5 + 5 \times 7}{5}$

د) $\frac{3 + 5 + 7}{5}$

ه) $\frac{52 + 218}{91 + 218}$

و) $\frac{52 \times 218}{91 \times 218}$

ز) $\frac{2 \times 5 \times 7 \times 11 + 7}{2 \times 5 \times 11}$

ح) $\frac{3 \times 3^2 \times 3^3 - 1}{3 \times 3 \times 3 - 1}$

۸. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56}$

ب) $\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \dots + \frac{2}{49 \times 51}$

ج) $\frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \frac{1}{11 \times 14} + \dots + \frac{1}{32 \times 35}$

د) $\frac{2+4}{2 \times 3 \times 4} + \frac{4+6}{4 \times 5 \times 6} + \frac{6+8}{6 \times 7 \times 8} + \dots + \frac{18+20}{18 \times 19 \times 20}$

ه) $\frac{1}{1 \times 6} + \frac{1}{6 \times 11} + \frac{1}{11 \times 16} + \dots + \frac{1}{46 \times 51}$

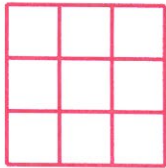
و) $\frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{6 \times 9} + \frac{1}{9 \times 12} + \dots + \frac{1}{21 \times 24}$

ز) $\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} + \dots + \frac{1}{98 \times 100}$

۹. در تساوی زیر مقدار m و n را بیابید.

$$\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{6} \times \dots \times \frac{m}{n} = 3$$

۱۰. جدول زیر را با اعداد داده شده طوری پر کنید که مجموع اعداد هر ردیف، هر ستون و هر قطر باهم برابر باشند.



$$, \frac{1}{100}, \frac{1}{50}, \frac{1}{25}, \frac{1}{20}, \frac{3}{100}, -\frac{1}{100}, -\frac{1}{50}, -\frac{3}{100}.$$

۱۱. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{-20}{35} + \frac{-2}{7} - \frac{10}{5}$

ب) $\frac{\frac{15}{33} \times \frac{13}{4}}{-\frac{3}{8} \times \frac{5}{16}} \div 52$

ج) $\frac{1 + \frac{3}{4}}{(2 + \frac{1}{5}) \div (1 - \frac{1}{4})}$

د) $\frac{373737}{37} \left(\frac{1}{37} + \frac{1}{13 \times 7} \right)$

۱۲. در زیر، عدد $\frac{7}{8}$ به صورت مجموع سه عدد گویای متفاوت با صورت ۱ نوشته شده است:

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

هر یک از اعداد زیر را به صورت مجموع دو یا چند عدد گویای متفاوت با صورت ۱ بنویسید.

• $\frac{5}{6}$

• $\frac{4}{13}$

• $\frac{5}{121}$

• $\frac{13}{18}$

• $\frac{1}{6}$

• $\frac{23}{15}$

• $\frac{7}{12}$

• $\frac{6}{23}$

• $\frac{2}{35}$

• $\frac{43}{48}$

• $\frac{400}{729}$

• $\frac{823}{1024}$

• $\frac{351}{512}$

• $\frac{57}{64}$

• $\frac{73}{81}$

• $\frac{13}{27}$

^۱ به چنین مجموع کسرهایی، «کسر مصری» می‌گویند؛ زیرا در مصر باستان از این روش برای نمایش و محاسبه کسرها استفاده می‌شده است. برای حل بهتر این تمرین بهتر است به «www.webmath.ir» بیايید.

• عددهای صحیح و گویا •

۱۳. چهار مسئله بسازید که در راه حل آنها عبارت‌های زیر ظاهر شوند.

$$\bullet \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} \quad \bullet \frac{7}{3} \div \frac{1}{5} \quad \bullet 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad \bullet -\frac{2}{3} - \frac{5}{4}$$

۱۴. پروژه. دو نفر می‌خواهند یک سیب را به‌طور عادلانه بین خودشان تقسیم کنند. نفر

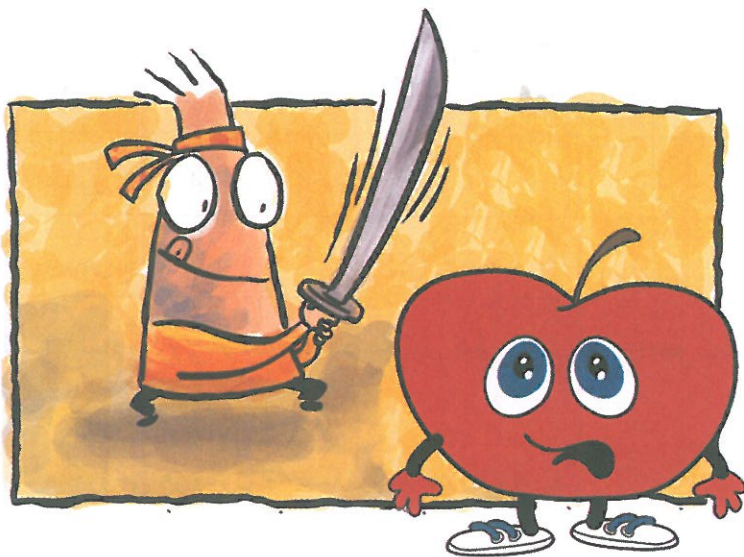
اول با چاقو سیب را می‌برد و نفر دوم حق انتخاب دارد که کدام تکه را انتخاب کند.

الف) اگر سه نفر بخواهند یک سیب را به‌طور عادلانه بین خودشان تقسیم کنند،

راه حل چیست؟

ب) اگر n نفر بخواهند یک سیب را به‌طور عادلانه بین خودشان تقسیم کنند، راه حل

چیست؟



با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

۱۵. دستوره‌ای زیر را در نظر بگیرید.

A : قرینه و معکوس ورودی

B : ضرب در، یک واحد کمتر از قرینه ورودی

C : تقسیم بر قرینه مجذور ورودی

D : منهای معکوس مجذور قرینه ورودی

در هر ستون جدول زیر، یکی از دستوره‌ای بالا روی عدد ورودی هر ستون اعمال شده و خروجی به دست آمده است.

ستون «الف»	ستون «ب»	ستون «ج»	ستون «د»	
ورودی	خروجی ستون «الف»	خروجی ستون «ب»	خروجی ستون «ج»	
A	B	C	D	دستور
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	-۴	$\frac{65}{16}$	خروجی

الف) اعداد صورتی نوشته شده در جدول فوق درست‌اند. راه‌حل به دست آمدن هر یک را بنویسید.

ب) خروجی هر ستون از جدول زیر را به دست آورید.

ستون «الف»	ستون «ب»	ستون «ج»	ستون «د»	
بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی	خروجی ستون «الف»	خروجی ستون «ب» به توان ۲	خروجی ستون «ج» به اضافه معکوسش	ورودی
A	B	C	D	دستور
				خروجی

• عددهای صحیح و گویا •

۱۶. یک مسئله واقعاً کاربردی. بنا به ابلاغ سازمان امور مالیاتی کشور، سقف معافیت‌های مالیاتی در سال ۱۳۹۴ تا حقوق ماهیانه مبلغ یک میلیون و صد و پنجاه هزار تومان (۱,۱۵۰,۰۰۰) است. بر اساس این قانون، تمام کسانی که بیش از یک میلیون و صد و پنجاه هزار تومان و کمتر از هشت میلیون و پنجاه هزار تومان (۸,۰۵۰,۰۰۰) دریافتی ماهیانه دارند، با محاسبه نرخ ۱۰ درصد مالیات پرداخت می‌کنند و کسانی که ماهیانه بیش از هشت میلیون و پنجاه هزار تومان حقوق می‌گیرند، مازاد این مبلغ را به نرخ ۲۰ درصد مالیات پرداخت می‌کنند.

جدول مالیات بر حقوق به صورت زیر است.

معاف	تا سقف ۱,۱۵۰,۰۰۰ تومان
۱۰ درصد	مازاد بر ۱,۱۵۰,۰۰۰ و تا سقف ۸,۰۵۰,۰۰۰ تومان
۲۰ درصد	مازاد بر ۸,۰۵۰,۰۰۰ تومان

برای مثال، اگر شخصی ۱۰ میلیون تومان حقوق ماهیانه دریافت کند، باید یک میلیون و هشتاد هزار تومان (۱,۰۸۰,۰۰۰) مالیات پرداخت کند که محاسبه آن به صورت زیر است.

$$\text{مشمول ۲۰ درصد} \quad ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ - ۸,۰۵۰,۰۰۰ = ۱,۹۵۰,۰۰۰$$

$$\text{مشمول ۱۰ درصد} \quad ۸,۰۵۰,۰۰۰ - ۱,۱۵۰,۰۰۰ = ۶,۹۰۰,۰۰۰$$

$$\begin{aligned} \text{مالیات محاسبه شده} &= \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۱,۹۵۰,۰۰۰ + \frac{۱۰}{۱۰۰} \times ۶,۹۰۰,۰۰۰ = ۳۹۰,۰۰۰ + ۶۹۰,۰۰۰ \\ &= ۱,۰۸۰,۰۰۰. \end{aligned}$$

حقوق چند نفر (به تومان) در زیر آمده است. مالیات بر حقوق هر یک را محاسبه کنید.

الف) ۱,۰۰۰,۰۰۰

ب) ۴,۴۲۰,۰۰۰

ج) ۸,۰۰۰,۰۰۰

د) ۱۲,۵۰۰,۰۰۰

۱۷. بنابر احکام اسلامی تقسیم ارث:

- قبل از اینکه اموال شخص بین وراث تقسیم شود، باید تمام بدهی‌های شخص مرحوم پرداخت شود.
- هر شخص قبل از مرگش می‌تواند $\frac{1}{4}$ کل اموال خود را وصیت کند و بقیه اموال، یعنی $\frac{3}{4}$ آن، باید بین وراث تقسیم شود.
- از $\frac{3}{4}$ اموالی که باید بین وراث تقسیم شود، $\frac{1}{8}$ بین همه همسران به‌طور مساوی تقسیم می‌شود و در صورت زنده بودن پدر و مادر شخص مرحوم، به هر کدام $\frac{1}{6}$ اموال به ارث می‌رسد و باقی‌مانده ارث به فرزندان تعلق می‌گیرد به‌طوری‌که هر پسر دو برابر هر دختر ارث می‌برد.

وراث باید مطابق جدول زیر، مالیات بر ارث بپردازند.

تا سقف ۵ میلیون تومان	۵ درصد
مازاد بر ۵ میلیون تومان و تا سقف ۲۰ میلیون تومان	۱۵ درصد
مازاد بر ۲۰ میلیون تومان و تا سقف ۵۰ میلیون تومان	۲۵ درصد
مازاد بر ۵۰ میلیون تومان	۳۵ درصد

حاج ناصر قبل از مرگش، خودرویی به قیمت ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان خرید ولی ۲۰ درصد از قیمت خودرو را پرداخت نکرده بود. حاج ناصر برای $\frac{1}{4}$ اموال خود، بعد از ارزش‌گذاری تمام دارایی‌ها و اموالش، وصیت کرد:

یک‌دهم از ثلث اموالم را به همسر اولم بدهید.
یک‌هشتم آن را به نوه عزیزم صدرا بدهید و
بقیه را به انسان‌های خیلی خوب بدهید.



• عده‌های صحیح و گویا •

پدر و مادر مرحوم حاج ناصر هنوز زنده هستند. حاج ناصر ۲ همسر، ۳ پسر و ۲ دختر داشت و اموال وی بیست میلیارد و سیصد و هجده میلیون تومان بود.

الف) قبل از محاسبه مقدار ارث هر شخص، می‌توانید بگویید که ارث صدرا با ارث چه کسی برابر می‌شود؟

ب) به هر کدام از وراث چند تومان ارث می‌رسد؟

ج) اداره مالیات از مرگ حاج ناصر چقدر کسب درآمد کرده است؟

حکایتی از گلستان سعدی

پادشاهی را مهمتی پیش آمد. گفت: اگر انجام این حالت به مراد من برآید، چندین درم دهم زاهدان را. چون حاجتش برآمد و تشویش خاطرش برفت، وفای نذرش به وجود شرط، لازم آمد. یکی را از بندگان خاص، کیسه‌ای درم داد تا صرف کند بر زاهدان. گویند: غلامی عاقل و هشیار بود. همه روز بگردید و شبانگه باز آمد و درم‌ها بوسه داد و پیش مَلِک بنهاد و گفت: زاهدان را چندان که گردیدم، نیافتم. گفت: این چه حکایت است؟ آنچه من دانم در این مَلِک چهارصد زاهد است. گفت: ای خداوند جهان، آن که زاهد است، نمی‌ستاند و آن که می‌ستاند، زاهد نیست. مَلِک بخندید و ندیمان را گفت: چندان که مرادر حق خداپرستان ارادت است و اقرار، مر این شوخ دین را عداوت است و انکار و حق به جانب او است.

زاهد که درم گرفت و دینار زاهد تر از او کسی به دست آر

۱۸. صدرا یک صندوقچه قدیمی در زیرزمین خانه حاج ناصر پیدا کرد که برگه زیر، در آن بود. این برگه را تصحیح کنید.

• نیم لتری از هر شکل عاشور خورده است؟ (۱)

• معکوس هر عدد را بنویس.

(۲)

(۳) $\frac{25}{11} + \frac{12}{18} = 41$ (۴)

• حاصل عبارت را به ساده ترین شکل ممکن بنویس.

۶) $\frac{18}{5} \times \frac{5}{18} \times \frac{18}{5} \times \frac{5}{18} = 5$

۷) $\frac{5^{13}}{11^3} \times \frac{11}{2} \times \frac{2}{11} \times \frac{11}{2} = \frac{5^5}{2}$

۸) $\frac{3^3 + 2}{2 \times 5} \times \frac{5}{2 \times 5} = \frac{27}{5}$

۹) $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$

۱۰) $1\frac{3}{4} + 2\frac{3}{4} = 4\frac{6}{4} = 5\frac{3}{2}$

• مسئله‌ی زیر را پاسخ گو.

(۱۱) با طای، یک مربع ساخته ایم. طاب را با بازی کنیم و از آن مستطیلی می‌سازیم که عرض آن، $\frac{2}{3}$ ضلع مربع باشد. طول این مستطیل چقدر است؟

• حاصل عبارت زیر را پیدا کن.

۱۲) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{13}{7} = \frac{95}{14}$

• مسئله‌ی زیر را حل کن.

(تعمیم) سوال‌های ۱ تا ۵ هر کدام $\frac{1}{10}$ نمره، سوال‌های ۶ تا ۱۰ هر کدام $\frac{1}{5}$ نمره و سوال‌های ۱۱ و ۱۲ هر کدام $\frac{3}{4}$ نمره دارند. این آزمونی که چند نمره دارد؟

$5 \times \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$5 \times \frac{1}{5} = 1$

$2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$

$2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$

$1 + 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 4$

عددهای اول

$$4 = \begin{cases} 1+1+1+1 \\ 1+1+2 \\ 1+3 \end{cases} \quad 5 = \begin{cases} 2+3 \\ 1+1+3 \\ 1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1 \end{cases} \quad 6 = \begin{cases} 1+5 \\ 1+2+3 \\ 1+1+1+3 \\ 1+1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1 \end{cases}$$

پسیناں folgen nix genau observationes p. dem.
San Bonnan:

Si v. sit functio ipsius x. eiusmodi ut facta
cuique, determinari possit x per c. et reliquas con-
one expresas, poterit etiam determinari valor
quatione $v^{x+1} = (2v+1)(v+1)^{x-1}$

Si concipiatur curvas cuius abscissa sit x. appli-
summa seriei $\frac{x^n}{n \cdot 2^{2n}}$ posita n. pro exponente termi
applicata = $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2^3} + \frac{x^4}{4 \cdot 2^4} + \text{etc.}$ dico, si
abscissa = 1. applicatam fore = $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

گلدباخ در سال ۱۷۴۲ میلادی در نامه‌ای به اوپلر

مساله‌ای درباره عددهای اول مطرح کرد که هنوز کسی

موفق به حل آن نشده است.

Moscow 1. Jan. 11. 1742.

گفت‌وگو

در دفتر دبیران به جز مدیر و معلم ریاضی که دوست صمیمی مدیر بود، کسی نبود.

مدیر: امسال نیاز به یک معلم ریاضی دیگر هم داریم. به نظر شما برای انتخاب معلم جدید به چه چیزی بیشتر اهمیت بدهم؟ به سواد ریاضی‌اش؟ یا به هنر تدریس معلمی‌اش؟

معلم ریاضی: هر دو مهم است. [پس از اندکی مکث] سودِ هنر تدریس را همهٔ دانش‌آموزانِ کلاس می‌برند و سود سواد ریاضی را دانش‌آموزهای نخبه.

مدیر: پس کلاً به نظر شما هنر تدریس مهم‌تر است!

معلم ریاضی: نه! بستگی به این دارد که شاگردهای کلاس چقدر باهوش باشند. اگر یک کلاس با سطح یادگیری متوسط داشته باشیم، حتماً هنر تدریس مهم‌تر است؛ اما اگر یک کلاس با دانش‌آموزهای باهوش داشته باشیم، باید سواد معلم را لحاظ کنیم.

مدیر: جسارتاً من این حرف شما را قبول ندارم. من خودم رشته‌ام مهندسی برق بوده است، ولی چند سال ریاضی درس داده‌ام. همه راضی بودند؛ هم دانش‌آموزهای نخبه و هم کلاً همهٔ دانش‌آموزها.

معلم ریاضی: مثلاً در فصل اعداد، به دانش‌آموزهای نخبه چه خوراک علمی می‌دادید؟

مدیر: [با خنده ریز] آن روزها هر کسی دربارهٔ عدد‌های اول خیلی کنجکاوی می‌کرد، به او می‌گفتم برود فرمول اعداد اول را کشف کند!!

معلم ریاضی: فرمول اعداد اول؟! یعنی هیچ مسئلهٔ مناسب‌تری سراغ نداشتید که به او پیشنهاد بدهید؟ عملاً آنها را سرکار می‌گذاشتید!

• عددهای اول •

مدیر: آها! حالا فهمیدم منظور شما چیه! من همیشه کلی مسئله داشتم که به هر دانش‌آموزی که علاقه داشت می‌دادم. برای بعضی از مسئله‌ها هم جایزه می‌دادم. کلاً خیلی از شاگردها همیشه در تکاپو بودند.

معلم ریاضی: [با حالتی صمیمانه] تو معلم ریاضی خوبی بودی، اما نه برای دانش‌آموزهای خاص! چیزی که احتمالاً نداشتی یک شناخت کلی از دانش ریاضی است! اگر کسی ده‌ها درس رشته ریاضی دانشگاهی را گذرانده باشد، ممکن است بتواند چنین دانشی را کسب کند، تا حدوداً بفهمد هدف مطالعه گرایش‌های مختلف در رشته ریاضی چه هستند؛ تفاوتشان با هم چیست؛ تا حالا درباره چه ایده‌هایی در این گرایش‌ها کار شده و از این جور چیزها.

مدیر: می‌فرمایید یک مهندس برق که کلی ریاضی خوانده، معنای ریاضی را نفهمیده است؟

معلم ریاضی: واقعیت این است که یک مهندس برق خیلی ریاضی نخونده است! او حداکثر کاربردهایی از ریاضی را دیده است.

معلم ریاضی کمی مکث کرد که ببیند بین همه آنچه که می‌خواهد بگوید کدام یک را انتخاب کند.

معلم ریاضی: شما می‌دانید که اعداد را، هم می‌شود تحلیلی مطالعه کرد و هم جبری؟ یعنی هم در ساختارهای پیوسته مطالعه‌شان کرد و هم در ساختارهای گسسته.

مدیر: دانستن این موضوع چه فایده‌ای برای دانش‌آموزها دارد؟

معلم ریاضی: برای تقریباً همه دانش‌آموزها، تقریباً هیچی! اما ممکن است در سی سال تدریس، به یک دانش‌آموز نابغه برخورد کنید که گفتن این جمله به او، دیدش را از زمین تا آسمان تغییر دهد. این همان دانش‌آموزی است که ممکن است در آینده یک ریاضیدان بزرگ شود.

یادآوری عددهای اول

۱. بیشترین تعداد اعداد طبیعی دو رقمی پشت سر هم که هیچ‌کدام از آنها اول نباشند، چند تا است؟

۲. چند عدد طبیعی دو رقمی وجود دارد که اعداد قبل و بعد از آن، یکی مربع کامل و دیگری عدد اول باشد؟

۳. عددهای طبیعی m و n در تساوی $۶۵n = ۵۶m$ صدق می‌کنند. ثابت کنید $m + n$ عددی مرکب است.

• در دو مسئله بعد، به دو عدد همسایه می‌گوییم هرگاه خانه‌های آنها در یک ضلع مشترک باشند.



۴. اعداد ۱ تا ۹ را طوری در جدول زیر بچینید که هر دو عدد همسایه نسبت به هم اول باشند.

	۸		۱۶
۴		۱۲	
	۶		۱۴
۲		۱۰	

۵. الف) نمی‌توان اعداد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳ و ۱۵ را طوری در خانه‌های خالی جدول روبرو قرار داد که هر دو عدد همسایه نسبت به هم اول باشند. چرا؟
ب) آیا می‌توان اعداد ۱ تا ۱۶ را از نو (و بدون تکرار)، طوری در جدول روبرو قرار داد که هر دو عدد همسایه نسبت به هم اول باشند؟

• عددهای اول •

۶. الف) همه اعداد یک رقمی را بنویسید که نسبت به ۱۴ اول اند.

ب) همه اعداد کوچکتر از ۳۰ را بنویسید که نسبت به ۳۰ اول اند.

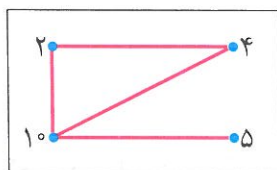
ج) چند عدد کوچکتر از ۱۲۱ وجود دارد که نسبت به ۱۲۱ اول باشد؟

۷. عددی اول، مانند p داده شده است. چند عدد طبیعی وجود دارد که:

الف) از p کوچکتر و نسبت به p اول باشد؟

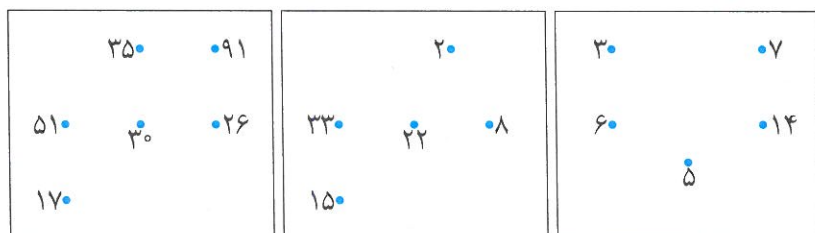
ب) از p^2 کوچکتر و نسبت به p اول باشد؟

۸. در شکل زیر، فقط اعدادی که نسبت به هم اول نیستند را به یکدیگر وصل کرده ایم.



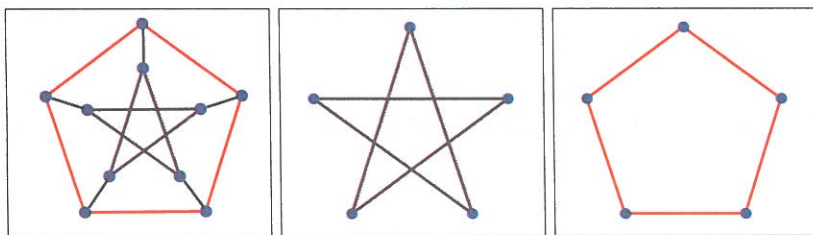
الف) در هر یک از کادرهای زیر، اعدادی که نسبت به هم اول نیستند را به یکدیگر

وصل کنید. سپس عبارت به دست آمده را بخوانید!

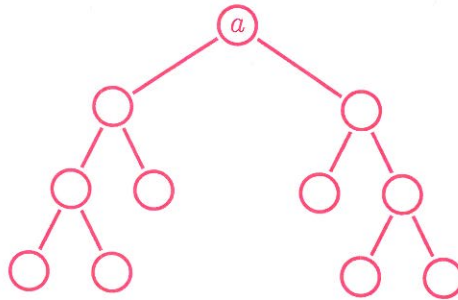


ب) در هر یک از کادرهای زیر، باتوجه به قانون گفته شده، برای هر نقطه عددی

مناسب بیابید.



۹. نمودار درختی زیر، برای تجزیه عدد a رسم شده است. کدامیک از اعداد ۶۴، ۱۳۰×۹۹ ، ۳۵×۳۶ و ۱۶۸ نمی‌تواند برابر a باشد؟



تعیین عددهای اول

۱. یک عدد مرکب را «تقریباً اول» می‌نامیم، هرگاه هر دو شمارنده آن، به غیر از خود عدد، نسبت به هم اول باشند. برای مثال عدد ۱۵ یک عدد تقریباً اول است، زیرا هر دو شمارنده از شمارنده‌های ۱، ۳ و ۵ نسبت به هم اول‌اند؛ ولی عدد ۱۲ نسبتاً اول نیست، زیرا شمارنده‌های ۲ و ۶ نسبت به هم اول نیستند.

الف) اعداد نسبتاً اول کوچک‌تر از ۱۰۰ را بیابید و آنها را به‌ترتیبی که در غربال اعداد کوچک‌تر از ۱۰۰ حذف می‌شوند، مرتب کنید.

ب) چند عدد دو رقمی تقریباً اول وجود دارد که نسبت به ۳۳۰ اول باشد؟

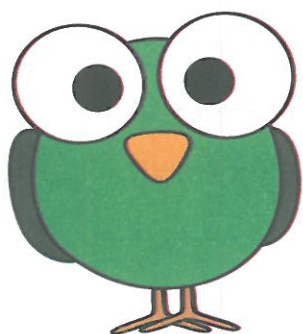
ج) آیا حاصل ضرب دو عدد تقریباً اول، می‌تواند عددی تقریباً اول باشد؟

د) عددی مثال بزنید که هیچ عدد دو رقمی تقریباً اولی نسبت به آن عدد اول نباشد.

ه) در غربال اعداد کوچک‌تر از ۱۰۰۰ آخرین عدد تقریباً اولی که حذف می‌شود، چیست؟

• عددهای اول •

۲. الف) قانون جدول زیر را کشف کنید و جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.



۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	۱۹	$\square n + 1$
۷	۱۲	۱۷	۲۲	۲۷	۳۲	$\square n + 2$
۱۰	۱۷	۲۴	۳۱	۳۸	۴۵	$\square n + 3$
۱۳	۲۲	۳۱	۴۰	۴۹	۵۸	$\square n + 4$
۱۶	۲۷	۳۸	۴۹	۶۰	۷۱	$\square n + 5$
۱۹	۳۲	۴۵	۵۸	۷۱	۸۴	$\square n + 6$

ب) فرض کنید سطرها و ستون‌های این جدول را ادامه داده‌اید. نینا ادعا می‌کند که اگر عددی، مانند m ، در جدول ظاهر شود، آنگاه $2m + 1$ اول نیست؛ و اگر m در جدول ظاهر نشود، آنگاه $2m + 1$ عددی اول است. برای مثال $m = 22$ در جدول ظاهر می‌شود، بنابراین برای $m = 22$ داریم،

$$2m + 1 = 2 \times 22 + 1 = 45,$$

که ۴۵ عددی اول نیست. اما $m = 6$ در جدول ظاهر نمی‌شود، پس برای $m = 6$ داریم،

$$2m + 1 = 2 \times 6 + 1 = 13,$$

که ۱۳ عددی اول است.

ادعای نینا را برای حداقل پنج عدد دیگر آزمایش کنید.

ج) همه اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۵۰ را که در جدول ظاهر نمی‌شوند، بیابید.

۳. اگر $1 \leq n < 4000$ ، ثابت کنید عدد اولی مانند p وجود دارد که $n < p \leq 2n$.

۴. پروژ. اگر $n \geq 1$ ، ثابت کنید عدد اولی مانند p وجود دارد که $n < p \leq 2n$.

با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

۵. جدولی از اعداد طبیعی را به صورت زیر تشکیل دهید:

- در ستون سمت چپ آن اعداد اول را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسید.
- در هر ردیف مضرب‌های طبیعی عدد اول آن ردیف را از کوچک به بزرگ (از چپ به راست) بنویسید.
- هر ردیف را با عدد اول آن نام‌گذاری کنید. برای مثال ردیفی را که در آن اعداد $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, \dots$

آمده است، ردیف ۵ بنامید.

الف) عدد ۲۰ در کدام ردیف‌ها ظاهر می‌شود؟ عدد ۳۰ چطور؟

ب) عدد a فقط در ردیف‌های ۳، ۷، ۱۷ و ۲۳ ظاهر شده است. a چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

ج) آیا می‌توان سه عدد در ردیف ۱۱ پیدا کرد که فقط در ردیف ۱۱ دیده شوند؟

د) در هر ردیف اولین عدد مرکبی را بیابید که در ردیف‌های بالایی ظاهر نشده باشد. آیا این اعداد خاصیت مشترکی دارند؟

ه) هر یک از اعداد ۹۱، ۱۱۹، ۱۴۳، ۱۳۳، ۲۹۹، ۲۴۷ و ۶۶۷ برای اولین بار در کدام ردیف ظاهر می‌شوند؟

و) می‌دانیم a عددی مرکب و کوچکتر از ۳۰۰ است. دربارهٔ درستی یا نادرستی جملهٔ زیر بحث کنید.

«عدد a در ردیف ۱۷ یا یکی از ردیف‌های قبل از ردیف ۱۷ ظاهر می‌شود.»

۶. باتوجه به تمرین قبل، توضیح دهید که چرا برای تعیین اول بودن عدد n ، کافی است بخش‌پذیری عدد n بر اعداد اول کوچک‌تر از $\sqrt{n}$ را بررسی کنیم.

• عددهای اول •

۷. سهیلا با روش غربال، اعداد اول کوچکتر از ۲۵۰۰ را مشخص کرده است. او با چه ترتیبی اعداد زیر را خط زده است؟

• ۱۹۰۹ • ۱۷۱۷ • ۱۶۵۱ • ۲۴۷۱

۸. به نظم رقم‌ها در الگوی عددی زیر دقت کنید.

۳۱, ۳۳۱, ۳۳۳۱, ۳۳۳۳۱, ۳۳۳۳۳۱, ۳۳۳۳۳۳۱,

تاکنون هیچ الگوی عددی که دارای رقم‌های منظم باشد، پیدا نشده است که همه اعداد آن اول باشند. اولین عدد مرکب الگوی داده شده را بیابید. برای این کار می‌توانید مانند ریاضی‌دان‌های حرفه‌ای از نرم‌افزارهای ریاضی، استفاده کنید. برای آشنایی با نرم‌افزارهای ریاضی به www.webmath.ir بیایید.

ماشین کانوی

کسرهای زیر را در نظر بگیرید.

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}
$\frac{7}{3}$	$\frac{99}{98}$	$\frac{13}{49}$	$\frac{39}{35}$	$\frac{36}{91}$	$\frac{10}{143}$	$\frac{49}{13}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{91}{1}$

عدد ۱۰ را در کسرهای فوق به ترتیب از چپ به راست ضرب می‌کنیم تا به یک عدد طبیعی برسیم. حاصل ضرب ۱۰ در کسرهای F_1 تا F_8 عددی طبیعی نیست ولی حاصل ضرب ۱۰ در F_9 یک عدد طبیعی و برابر ۵ است.

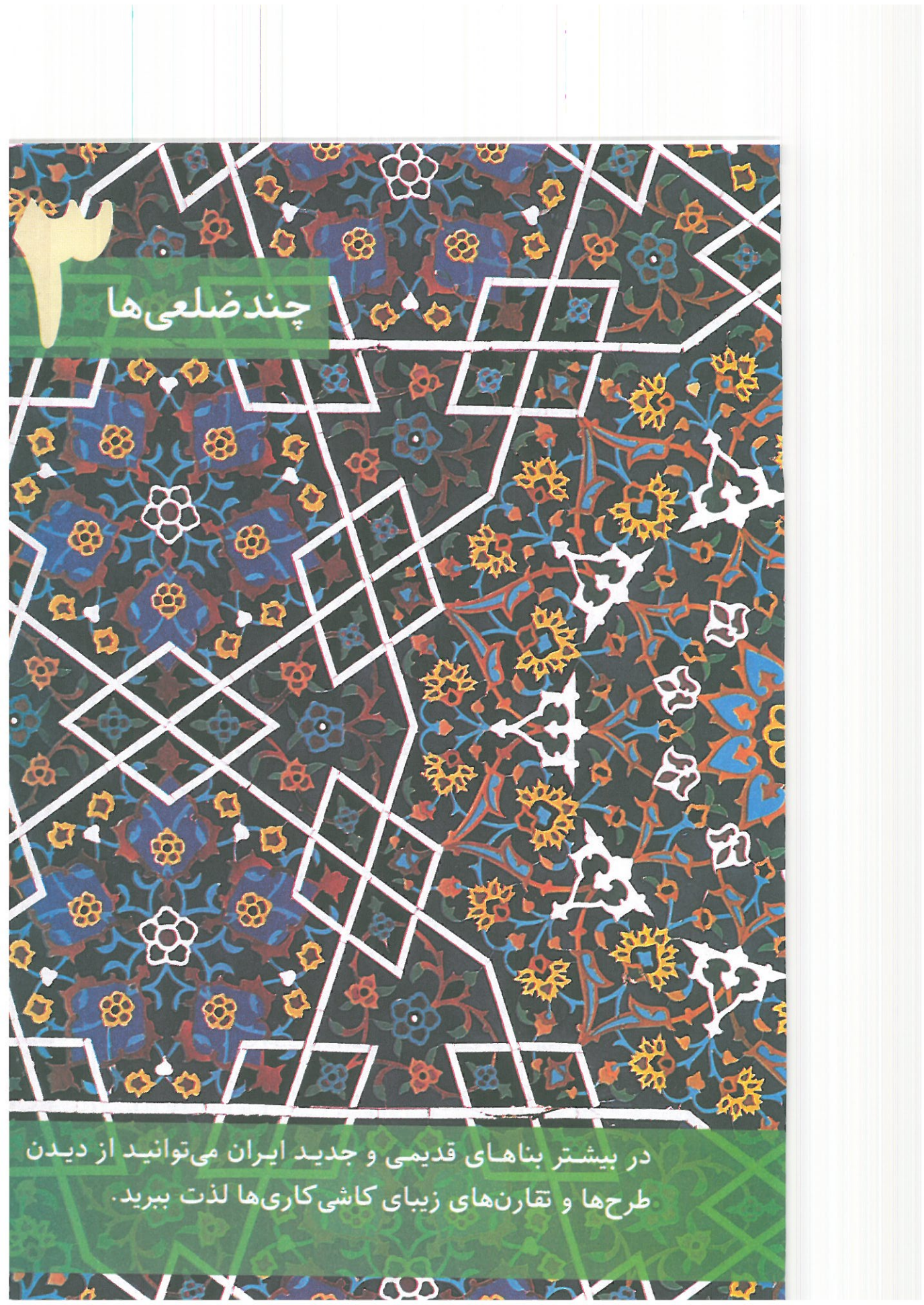
اکنون ۵ را در کسرهای جدول از چپ به راست ضرب می‌کنیم تا به یک عدد طبیعی برسیم. اولین عدد طبیعی از حاصل ضرب ۵ در کسر F_{10} به دست می‌آید که ۴۵۵ است.

حال ۴۵۵ را در کسرهای جدول از چپ به راست ضرب می‌کنیم تا به یک عدد طبیعی برسیم. اولین عدد طبیعی از حاصل ضرب ۴۵۵ در کسر F_4 به دست می‌آید که ۵۰۷ است.

اگر این کار را به همین صورت ادامه دهیم، دنباله‌ای از اعداد طبیعی حاصل می‌شود. در این دنباله توان‌های عدد ۱۰، اعداد اول هستند که به ترتیب همه آنها ساخته می‌شوند. یعنی اولین عددی که

از توان‌های ۱۰ ساخته خواهد شد ۱۰^۲ است که به عنوان شانزدهمین عدد در دنباله ساخته می‌شود. دومین عددی که از توان‌های ۱۰ ساخته خواهد شد ۱۰^۳ است که به عنوان شصت و هفتمین عدد در دنباله ساخته می‌شود. ۱۰^۵ به عنوان دویست و پنجاه و ششمین عدد، ۱۰^۷ به عنوان ششصد و هفتمین عدد و به همین ترتیب بقیه توان‌های عدد ۱۰ ساخته می‌شوند.

۵, ۴۵۵, ۵۰۷, ۱۱۸۳, ۴۶۸, ۱۰۹۲, ۲۵۴۸, ۲۵۷۴, ۶۰۰۶, ۱۴۰۱۴, ۱۴۱۵۷, ۳۳۰۳۳, ۷۷۰۷۷, ۲۰۴۴۹, ۱۴۳۰, ۱۰۰, ۵۰, ۲۵, ۲۲۷۵, ۲۵۳۵, ۵۹۱۵, ۶۵۹۱, ۱۵۳۷۹, ۶۰۸۴, ۱۴۱۹۶, ۳۳۱۲۴, ۳۳۴۶۲, ۷۸۰۷۸, ۱۸۲۱۸۲, ۱۸۴۰۴۱, ۴۲۹۴۲۹, ۱۰۰۲۰۰۱, ۲۶۵۸۳۷, ۱۸۵۹۰, ۱۳۰۰, ۴۹۰۰, ۴۹۵۰, ۱۱۵۵۰, ۲۶۹۵۰, ۲۷۲۲۵, ۶۳۵۲۵, ۱۴۸۲۲۵, ۳۹۳۲۵, ۲۷۵۰, ۱۷۵۰, ۱۹۵۰, ۴۵۵۰, ۵۰۷۰, ۱۱۸۳۰, ۱۳۱۸۲, ۳۰۷۵۸, ۱۲۱۶۸, ۲۸۳۹۲, ۶۶۲۴۸, ۶۶۹۲۴, ۱۵۶۱۵۶, ۳۶۴۳۶۴, ۳۶۸۰۸۲, ۸۵۸۱۵۸, ۲۰۰۴۰۰۲, ۲۰۲۴۴۵۱, ۴۷۲۳۷۱۹, ۱۱۰۲۲۰۱۱, ۲۹۲۴۲۰۷, ۲۰۴۴۹۰, ۱۴۳۰۰, ۱۰۰۰, ۵۰۰, ۲۵۰, ۱۲۵, ۱۱۳۷۵, ۱۲۶۷۵, ۲۹۵۷۵, ۳۲۹۵۵, ۷۶۸۹۵, ۸۵۶۸۳, ۱۹۹۹۲۷, ۷۹۰۹۲, ۱۸۴۵۴۸, ۴۳۰۶۱۲, ۴۳۵۰۰۶, ۱۰۱۵۰۱۴, ۲۳۶۸۳۶۶, ۲۳۹۲۵۳۳, ۵۵۸۲۵۷۷, ۱۳۰۲۶۰۱۳, ۳۴۵۵۸۸۱, ۲۴۱۶۷۰, ۱۶۹۰۰, ۶۳۷۰۰, ۶۴۳۵۰, ۱۵۰۱۵۰, ۳۵۰۳۵۰, ۳۵۳۹۲۵, ۸۲۵۸۲۵, ۱۹۲۶۹۲۵, ۵۱۱۲۲۵, ۳۵۷۵۰, ۲۵۰۰, ۱۲۵۰, ۶۲۵, ۵۶۸۷۵, ۶۳۳۷۵, ۱۴۷۸۷۵, ۱۶۴۷۷۵, ۳۸۴۴۷۵, ۴۲۸۴۱۵, ۹۹۹۶۳۵, ۱۱۱۳۸۷۹, ۲۵۹۹۰۵۱, ۱۰۲۸۱۹۶, ۳۲۹۹۱۲۴, ۵۵۹۷۹۵۶, ۵۶۵۵۰۷۸, ۱۳۱۹۵۱۸۲, ۳۰۷۸۸۷۵۸, ۳۱۱۰۲۹۲۹, ۷۲۵۷۳۵۰۱, ۱۶۹۳۳۸۱۶۹, ۴۴۹۲۶۴۵۳, ۳۱۴۱۷۱۰, ۲۱۹۷۰۰, ۸۲۸۱۰۰, ۸۳۶۵۵۰, ۱۹۵۱۹۵۰, ۴۵۵۴۵۵۰, ۴۶۰۱۰۲۵, ۱۰۷۳۵۷۲۵, ۲۵۰۵۰۰۲۵, ۶۶۴۵۹۲۵, ۴۶۴۷۵۰, ۳۲۵۰۰, ۱۲۲۵۰۰, ۱۲۳۷۵۰, ۲۸۸۷۵۰, ۶۷۳۷۵۰, ۶۸۰۶۲۵, ۱۵۸۸۱۲۵, ۳۷۰۵۶۲۵, ۹۸۳۱۲۵, ۶۸۸۷۵۰, ۴۳۷۵۰, ۴۸۷۵۰, ۱۱۳۷۵۰, ۱۲۶۷۵۰, ۲۹۵۷۵۰, ۳۲۹۵۵۰, ۷۶۸۹۵۰, ۸۵۶۸۳۰, ۱۹۹۹۲۷۰, ۲۲۲۷۷۵۸, ۵۱۹۸۱۰۲, ۲۰۵۶۳۹۲, ۴۷۹۸۲۴۸, ۱۱۱۹۵۹۱۲, ۱۱۳۱۰۱۵۶, ۲۶۳۹۰۳۶۴, ۶۱۵۷۷۵۱۶, ۶۲۲۰۵۸۵۸, ۱۴۵۱۴۷۰۰۲, ۳۳۸۶۷۶۳۳۸, ۳۴۲۱۳۲۲۱۹, ۷۹۸۳۰۸۵۱۱, ۱۸۶۲۷۱۹۸۵۹, ۴۹۴۱۹۰۹۸۳, ۳۴۵۵۸۸۱۰, ۲۴۱۶۷۰۰, ۱۶۹۰۰۰, ۶۳۷۰۰۰, ۶۴۳۵۰۰, ۱۵۰۱۵۰۰, ۳۵۰۳۵۰۰, ۳۵۳۹۲۵۰, ۸۲۵۸۲۵۰, ۱۹۲۶۹۲۵۰, ۱۹۴۶۵۸۷۵, ۴۵۴۲۰۳۷۵, ۱۰۵۹۸۰۸۷۵, ۲۸۱۱۷۳۷۵, ۱۹۶۶۲۵۰, ۱۳۷۵۰۰, ۸۷۵۰۰, ۹۷۵۰۰, ۲۲۷۵۰۰, ۲۵۳۵۰۰, ۵۹۱۵۰۰, ۶۵۹۱۰۰, ۱۵۳۷۹۰۰, ۱۷۱۳۶۶۰, ۳۹۹۸۵۴۰, ۴۴۵۵۵۱۶, ۱۰۳۹۶۲۰۴, ۴۱۱۲۷۸۴, ۹۵۹۶۴۹۶, ۲۲۳۹۱۸۲۴, ۲۲۶۲۰۳۱۲, ۵۲۷۸۰۷۲۸, ۱۲۳۱۵۵۰۳۲, ۱۲۴۴۱۱۷۱۶, ۲۹۰۲۹۴۰۰۴, ۶۷۷۳۵۲۶۷۶, ۶۸۴۲۶۴۴۸, ۱۵۹۶۶۱۷۰۲۲, ۳۷۲۵۴۳۹۷۱۸, ۳۷۶۳۴۵۴۴۰۹, ۸۷۸۱۳۹۳۶۲۱, ۲۰۴۸۹۹۱۸۴۴۹, ۵۴۳۶۱۰۰۸۱۳, ۳۸۰۱۴۶۹۱۰, ۲۶۵۸۳۷۰۰, ۱۸۵۹۰۰۰, ۱۳۰۰۰۰, ۴۹۰۰۰۰, ۴۹۵۰۰۰, ۱۱۵۵۰۰۰, ۲۶۹۵۰۰۰, ۲۷۲۲۵۰۰, ۶۳۵۲۵۰۰, ۱۴۸۲۲۵۰۰, ۱۴۹۷۳۷۵۰, ۳۴۹۳۸۷۵۰, ۸۱۵۲۳۷۵۰, ۸۲۳۵۵۶۲۵, ۱۹۲۱۶۳۱۲۵, ۴۴۸۳۸۰۶۲۵, ۱۱۸۹۵۸۱۲۵, ۸۳۱۸۷۵۰, ۵۲۹۳۷۵۰, ۵۸۹۸۷۵۰, ۱۳۷۶۳۷۵۰, ۱۵۳۳۶۷۵۰, ۳۵۷۸۵۷۵۰, ۳۹۸۷۵۵۵۰, ۹۳۰۴۲۹۵۰, ۱۰۳۶۷۶۴۳۰, ۲۴۱۹۱۱۶۷۰, ۲۶۹۵۵۸۷۱۸, ۶۲۸۹۷۰۳۴۲, ۲۴۸۸۲۳۴۳۲, ۵۸۰۵۸۸۰۰۸, ۱۳۵۴۷۰۵۳۵۲, ۱۳۶۸۵۲۸۸۷۶, ۳۱۹۳۳۳۴۰۴۴, ۷۴۵۰۸۷۹۴۳۶, ۷۵۲۶۹۰۸۸۱۸, ۱۷۵۶۲۷۸۷۲۴۲, ۴۰۹۷۹۸۳۶۸۹۸, ۴۱۳۹۷۹۹۸۴۹۹, ۹۶۵۹۵۳۲۹۸۳۱, ۲۲۵۳۸۹۱۰۲۹۳۹, ۵۹۷۹۷۱۰۸۹۴۳, ۴۱۸۱۶۱۶۰۱۰, ۲۹۲۴۲۰۷۰۰, ۲۰۴۴۹۰۰۰, ۱۴۳۰۰۰۰, ۱۰۰۰۰۰۰.



چند ضلعی‌ها

در بیشتر بناهای قدیمی و جدید ایران می‌توانید از دیدن طرح‌ها و تقارن‌های زیبای کاشی‌کاری‌ها لذت ببرید.

گفت و گو

پس از یک روز طولانی و خسته کننده، معلم ریاضی در دفتر دبیران نشسته بود و در این هنگام معلم دیگری وارد دفتر دبیران شد.

معلم دیگر: از این خسته شدم که همه جا در کتاب های درسی نوشته، مثلاً فلان ابن فلان یک دانشمند ایرانی یا مسلمان بوده که در قدیم زندگی می کرده است و چه ها کرده است. این حرف ها را باید تمام کرد. ما باید علم جدید را یاد بگیریم. معلم ریاضی: خُب، چه اشکالی دارد که هم علم جدید یاد بگیریم و هم یاد بگیریم که گذشتگان ما چه نقشی در علم داشتند؟

معلم دیگر: اصلاً من اعتقاد دارم آن ها هیچ کار مهمی انجام ندادند. جایی می خواندم که «نقش دانشمندان اسلامی انتقال دانش از یونان باستان به اروپای رنسانس^۱ بوده است. مسلمان ها دانشمند درست و حسابی نداشتند. نهایتاً امانت دارهای خوبی بودند که کتاب های دانشمندان بزرگ یونان را گرفتند و به دانشمندان بزرگ اروپایی تحویل دادند»!

معلم ریاضی: شما که این قدر اهل مطالعه هستید، جایی نخوانده اید که مثلاً خوارزمی، ابن سینا و ابوریحان چه اشخاصی بوده اند و چه کارهایی انجام داده اند؟ یا ابن خلدون یا ...، باز هم بگوییم؟

معلم دیگر: حالا این چند نفر را استثنا می کنیم. بقیه چی؟ واقعاً دیگر بس است! کمی هر دو ساکت شدند، تا اینکه سکوت فضا دوباره شکسته شد.

معلم دیگر: [با لحنی گلایه آمیز] تازه امروز در همین مدرسه استعداد های درخشان، یکی

^۱ رنسانس یا دوره نوزایش، جنبش فرهنگی مهمی بوده است که آغازگر دورانی از پیشرفت های همه جانبه در اروپا شد.

از دانش‌آموزانم به من می‌گوید که تصمیم گرفته است که برود و تاریخ علم گذشتگان را مطالعه کند. من هم نه گذاشتم و نه برداشتم. سریع بهش گفتم که: «هر چه تا حالا بوده کشف شده! در گذشته ما دیگر چیزی پیدا نمی‌شود! برو آینده این مملکت را بساز!». [با تأکید] بد گفتم؟!!

معلم ریاضی: البته باید خیلی‌ها آینده این مملکت را بسازند. ولی گذشته، یعنی تاریخ یک ملت. که این هم خیلی مهم است. بد نیست در هر نسل، چند نفری بروند و در این مورد تحقیق کنند.

معلم دیگر: واقعاً به نظر شما چیز مهمی برای تاریخ کشفیات ما باقی مانده است؟

معلم ریاضی: شما تا حالا اصفهان رفتید؟

معلم دیگر: [بی حوصله] بله! چند باری رفتم. آثار تاریخی شهر را حفظ هستم! شما فکر می‌کنید من که این حرف‌ها را می‌زنم از هیچ جای ایران خبر ندارم؟!!

معلم ریاضی: شما که به اصفهان سفر کرده‌اید، تا حالا «امامزاده درب امام»^۱ رفته‌اید؟

معلم دیگر: خیر! این چه جور اسمی است؟

معلم ریاضی: حدوداً ۴۰ سال پیش یک دانشمند انگلیسی روشی برای کاشی‌کاری کشف کرد که خیلی عجیب و جدید بود. او توانست یک روش کاشی‌کاری «فقط نامتناوب» ارائه بدهد.

همین چند سال پیش چند نفر گردشگر از هزاران کیلومتر آن طرف‌تر آمدند اصفهان. رفته بودند برای دیدن کاشی‌های این امامزاده و فهمیده بودند حدود ۵۰۰ سال پیش از کشف آن روش کاشی‌کاری عجیب، معمار گمنام این امامزاده روش کاشی‌کاری تقریباً مشابهی ارائه داده بوده است.

^۱واقع در اصفهان، خیابان عبدالرزاق، بازار حاج محمدجعفر، کوی درب امام. به راستی چند نفر از خوانندگان این کتاب، این اثر تاریخی را دیده‌اند؟

اکنون «معلم دیگر» فقط گوش می‌کرد.

معلم ریاضی: یک سوال؛ این باعث شرمساری ما نیست که یکی از آن سر دنیا بیاید و بگوید تاریخ ما ایرانی‌ها چه بوده است؟

[با لبخندی معنی دار] فکر کنم کسی که گفته نقش دانشمندان ما انتقال دانش از یونان باستان به اروپای رنسانس بوده یا معنی انتقال را نمی‌فهمیده یا معنی دانش را!

برای دیدن عکس‌های «امام‌زاده درب امام» و آشنایی با روش کاشی‌کاری فقط نامتناوب به www.webmath.ir مراجعه کنید.

کارگاه بازی

مثلث

شش نقطه به شکل زیر، روی یک صفحه هستند. نفر اول دو نقطه را انتخاب می‌کند و با یک پاره‌خط این دو نقطه را به هم وصل می‌کند. نفر دوم نیز، دو نقطه را انتخاب و به هم وصل می‌کند. هرکس که اولین مثلث را بسازد باخته است. منظور از مثلث سه‌ضلعی است که رأس‌های آن یکی از شش نقطه داده شده باشد.



چندضلعی‌ها و تقارن

۱. در بازی مثلث که در بخش قبل معرفی شد،

الف) نفر اول چگونه بازی کند که همیشه برنده باشد؟

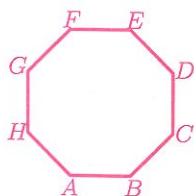
ب) فرض کنید بازی را با n نقطه ($n > 4$) از رأس‌های یک n -ضلعی منتظم انجام

می‌دهید. برای چه n ‌هایی نفر اول همیشه می‌تواند برنده باشد؟ برای چه n ‌هایی

نفر دوم می‌تواند همیشه برنده باشد؟

۲. چند تا چندضلعی منتظم درون هشتضلعی منتظم زیر می‌توان رسم کرد که همه

راس‌های هر یک از آنها روی راس‌های هشتضلعی منتظم زیر باشند؟



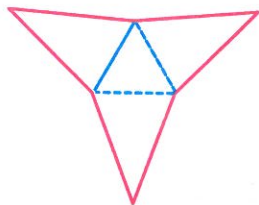
۳. یک هشتضلعی مقعر با ضلع‌های برابر بسازید. هشتضلعی مقعر دیگری با ضلع‌های

برابر بسازید که با هشتضلعی اول هم‌نهشت نباشد.

۴. فرض کنید n عددی زوج و بزرگ‌تر از ۴ باشد.

الف) باتوجه به شکل زیر، روشی برای رسم یک n -ضلعی مقعر با ضلع‌های برابر پیدا

کنید. برای چه n ‌هایی، n -ضلعی مقعر ساخته شده مرکز تقارن دارد؟



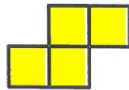
ب) روش دیگری برای ساخت یک n -ضلعی مقعر با ضلع‌های برابر که محور و

مرکز تقارن ندارند، پیدا کنید.

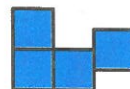
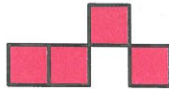
۵. فرض کنید n عددی فرد و بزرگتر از ۳ باشد. آیا می‌توانید حداقل دو روش برای ساختن یک n -ضلعی مقعر با ضلع‌های برابر ارائه دهید؟

۶. شکلی مثال بزنید که محور تقارن داشته باشد ولی مرکز تقارن نداشته باشد.

۷. به شکل‌هایی در صفحه که از به هم چسباندن یک (یا چند) ضلع مربع‌های واحد به یکدیگر ساخته می‌شوند، چندخانه‌ای می‌گویند. برای مثال، سه شکل زیر، چندخانه‌ای (۴-خانه‌ای) هستند.



ولی سه شکل زیر چندخانه‌ای (۴-خانه‌ای) نیستند.



الف) همه ۴-خانه‌ای‌های غیر هم‌نهشت را رسم کنید.

ب) کدامیک از ۴-خانه‌ای‌ها مرکز تقارن دارند؟

ج) کدامیک از ۴-خانه‌ای‌ها محور تقارن دارند؟

۸. می‌دانیم که باز شده یک مکعب یک ۶-خانه‌ای است.

الف) همه ۶-خانه‌ای‌هایی را که باز شده یک مکعب هستند، رسم کنید.

ب) کدامیک از ۶-خانه‌ای‌های قسمت «الف» مرکز تقارن دارند؟

ج) کدامیک از ۶-خانه‌ای‌های قسمت «الف» محور تقارن دارند؟

۹. همه عددهای فارسی دورقمی را بیابید که مرکز تقارن دارند.

۱۰. فرض کنید دو شکل دارید که هر یک مرکز تقارن دارند.

الف) این شکل‌ها را طوری در یک صفحه قرار دهید که شکل جدید نیز مرکز تقارن داشته باشد.

ب) درباره تعداد جواب‌های قسمت «الف» بحث کنید.

چندضلعی‌ها

۱۱. در یک کاغذ شطرنجی، چهارضلعی با رأس‌های $[-3]$ ، $[-2]$ ، $[1]$ ، $[-2]$ را رسم کنید. دستوره‌ای زیر را در نظر بگیرید.

A : تقارن نسبت به خط گذرنده از نقطه‌های $[-4]$ و $[-4]$.

B : دوران 180° در جهت عقربه‌های ساعت نسبت به نقطه $[5]$.

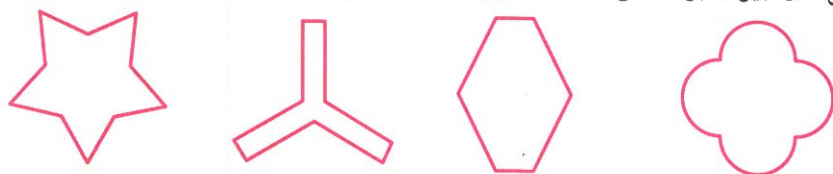
C : تقارن نسبت به خط گذرنده از نقطه‌های $[1]$ و $[3]$.

در هر یک از قسمت‌های زیر دستوره‌ای داده شده را به ترتیب از چپ به راست اجرا کنید و مختصات رأس‌های شکل حاصل را به دست آورید. آیا شکل‌های به دست آمده در هر قسمت یکسان می‌شوند؟

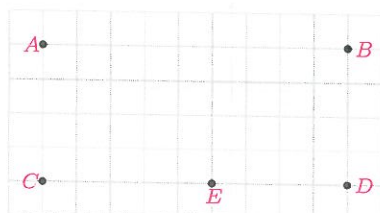
الف) $A \rightarrow B \rightarrow C$

ب) $B \rightarrow C \rightarrow A$

۱۲. شکل‌های زیر را بر اساس تعداد محور تقارن از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



توازی و تعامد

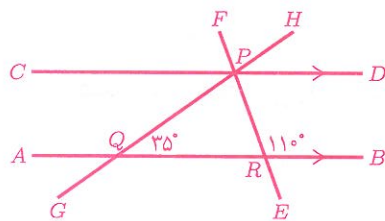


۱. در شکل روبرو، چند نقطه، مانند F ، روی

پاره خط AB وجود دارد به طوری که،

الف) دوزاویه BFE و DEF مکمل باشند؟

ب) دوزاویه BFE و DEF برابر باشند؟



۲. در شکل روبه‌رو،

الف) کدام زاویه‌ها برابر 35° است؟

ب) کدام زاویه‌ها برابر 110° است؟

۳. دربارهٔ درستی یا نادرستی جملهٔ زیر بحث کنید.

«اگر دو ضلع یک زاویه با دو ضلع زاویه‌ای دیگر موازی باشند،

آنگاه آن دو زاویه با هم برابرند.»

۴. آیا جملهٔ زیر همواره درست است؟

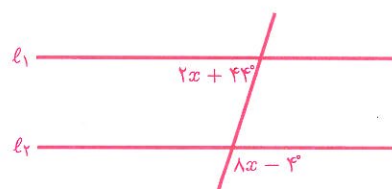
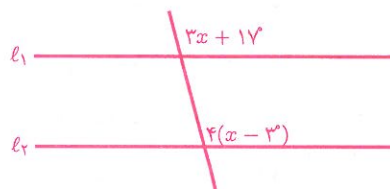
«هر دو زاویهٔ برابر، متقابل به‌رأس‌اند.»

۵. عبارت‌های نوشته شده در کادرهای زیر، همواره درست‌اند. نوشته‌های این دو کادر

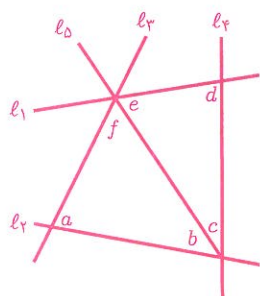
چه تفاوتی با یکدیگر دارند؟

اگر خط d دو خط ℓ_1 و ℓ_2 را قطع کند و زاویه‌های A_1 و B_1 پدید آیند به‌طوری‌که $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$، آنگاه ℓ_1 و ℓ_2 موازی‌اند.	اگر خط d دو خط موازی ℓ_1 و ℓ_2 را قطع کند و زاویه‌های A_1 و B_1 را پدید آورد، آنگاه $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$.
---	---

۶. در هر یک از شکل‌های زیر، x چقدر باشد که داشته باشیم $\ell_1 \parallel \ell_2$ ؟



چندضلعی‌ها

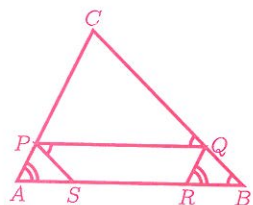


۷. در شکل، کدام خطوط موازی‌اند اگر،

الف) $c = 68^\circ$ و $f = 68^\circ$ ، $a = 90^\circ$

ب) $c = 48^\circ$ و $b = 42^\circ$ ، $d = 90^\circ$

ج) $b = 46^\circ$ و $f = 54^\circ$ ، $e = 46^\circ$



۸. با توجه به شکل، ثابت کنید:

الف) $PQ \parallel AB$

ب) $AC \parallel RQ$

ج) $PS \parallel BC$

۹. در چهارضلعی $ABCD$ ، زاویه‌های A و B مکمل‌اند. همچنین زاویه‌های A و D

مکمل‌اند. ثابت کنید $AB \parallel CD$ ، $AD \parallel BC$ و $\hat{A} = \hat{C}$

۱۰. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، $D = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، $E = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و

$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مقدار عبارت زیر را به دست آورید.

$$O\hat{A}P + O\hat{B}P + O\hat{C}P + O\hat{D}P + O\hat{E}P.$$

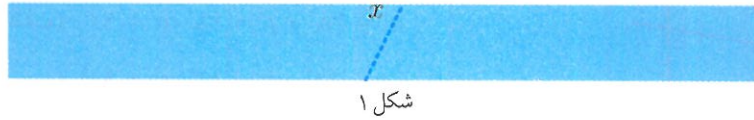
۱۱. یک توپ بلیارد روی نقطه‌ای از میز مستطیلی شکل بلیارد قرار دارد. به این توپ

ضربه‌ای زده شده است. بررسی کنید که پس از چندبار برخورد توپ با دیواره‌های

میز، مسیر توپ با مسیر اولیه‌اش موازی می‌شود.



۱۲. روی یک نوار کاغذی مستطیلی، زاویه‌ای به اندازه x داریم. (شکل ۱).



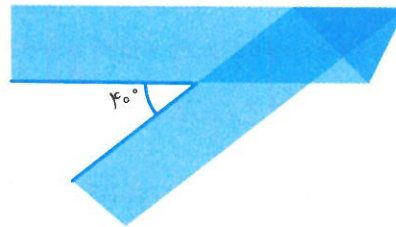
شکل ۱

ابتدا نوار را روی ضلع زاویه تا می‌زنیم (شکل ۲).



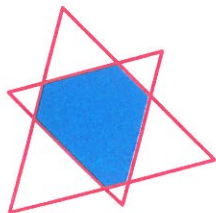
شکل ۲

سپس آن را از روی ضلع خودش تا می‌زنیم (شکل ۳). اگر زاویه‌ای که در شکل آخر تشکیل می‌شود 40° درجه باشد، آنگاه x چقدر است؟



شکل ۳

۱۳. دو مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع‌های a و b طوری روی هم قرار گرفته‌اند که هر ضلع مثلث اول با یکی از اضلاع مثلث دوم موازی است. محیط شش ضلعی آبی را بر حسب a و b به دست آورید.



چهارضلعی‌ها

۱. یک چهارضلعی به غیر از لوزی مثال بزنید که قطرهای آن برهم عمود باشند.
۲. محور تقارن یک چهارضلعی، قطر آن است. ثابت کنید قطرهای این چهارضلعی برهم عمودند.
۳. ثابت کنید که اگر یک متوازی‌الاضلاع محور تقارن داشته باشد، آن متوازی‌الاضلاع یا مستطیل است و یا لوزی.
۴. در یک چهارضلعی دو قطر برهم عمودند. تعداد محورهای تقارن این چهارضلعی چه اعدادی می‌تواند باشد؟ برای هر عدد یک مثال بیاورید.
۵. الف) آیا یک چهارضلعی غیر از مربع وجود دارد که دقیقاً چهار محور تقارن داشته باشد؟
ب) آیا شکلی غیر از مربع وجود دارد که دقیقاً چهار محور تقارن داشته باشد؟
۶. حسن یک مثلث داشت. او یک ضلع مثلثش را به آینه چسباند و یک مربع تشکیل شد! مثلث حسن چه خاصیتی دارد؟
۷. آیا می‌توانید یک چهارضلعی به غیر از مربع مثال بزنید که قطرهای آن باهم برابر و برهم عمود باشند؟
۸. آیا می‌توانید یک چهارضلعی به غیر از متوازی‌الاضلاع مثال بزنید که قطرهای آن یکدیگر را نصف کنند؟
۹. یک چهارضلعی به غیر از متوازی‌الاضلاع مثال بزنید که دو جفت ضلع برابر داشته باشد.
۱۰. یک چهارضلعی با دو جفت ضلع برابر و قطرهای عمود برهم و دو زاویه قائمه مثال بزنید که متوازی‌الاضلاع نباشد.

۱۱. یک چهارضلعی با دو ضلع موازی، دو ضلع مساوی و دو جفت زاویه برابر مثال بزنید که متوازی الاضلاع نباشد.

زاویه های داخلی و خارجی

۱. نازنین برای اینکه ثابت کند مجموع زاویه های مثلث 180° درجه است، یک مثلث کاغذی ساخت و ارتفاع آن را رسم کرد. سپس رأسی را که ارتفاع از آن رسم شده بود، روی پای ارتفاع گذاشت و کاغذ را تا زد.



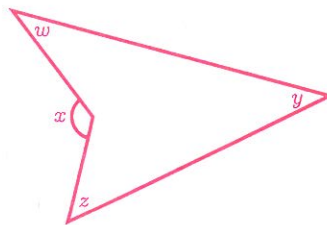
سپس هر یک از دو رأس دیگر مثلث را نیز روی پای ارتفاع رسم شده گذاشت و کاغذ را تا زد.

الف) درباره درستی روش نازنین بحث کنید.

ب) یک مثلث کاغذی دلخواه تهیه کنید. با استفاده از تا کردن کاغذ، عمود منصف های سه ضلع این مثلث را رسم کنید. آیا عمود منصف ها هم رس اند؟

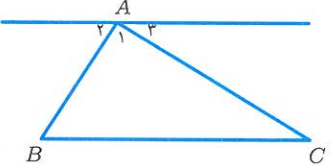
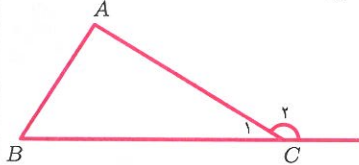
ج) با استفاده از یک مثلث کاغذی دلخواه و تا کردن آن، نشان دهید که ارتفاع ها، میانه ها و نیم سازه های مثلث هم رس اند.

۲. در شکل زیر ثابت کنید $x = y + z + w$.



چندضلعی‌ها

۳. هادی و هدی می‌خواهند ثابت کنند مجموع زاویه‌های مثلث 180° درجه است.

راه حل هدی:	راه حل هادی:
	
$\left. \begin{array}{l} A_2 = B \\ A_2 = C \\ A_1 + A_2 + A_3 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow A + B + C = 180^\circ$	$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} = \hat{C}_1 \\ \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow A + B + \hat{C}_1 = 180^\circ$

هر دو راه حل بالا ایراد دارند. در صورت امکان آنها را اصلاح کنید.

۴. در یک پنج ضلعی منتظم $ABCDE$ ،

(الف) زاویه بین دو قطر AD و BE چند درجه است؟

(ب) زاویه بین دو قطر AC و CE در محل تقاطع آنها، چند درجه است؟

۵. یک چندضلعی محدب، حداکثر چند زاویه داخلی حاده (تند) دارد؟

۶. یک مثلث دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. نقاط D و E را به ترتیب روی BC

و AD طوری انتخاب کنید که با رسم پاره خط‌های AD و CE ، تعداد زاویه‌های با اندازه مختلف کمترین تعداد ممکن باشد. (پنج نقطه A, B, C, D و E را متمایز در نظر بگیرید.)

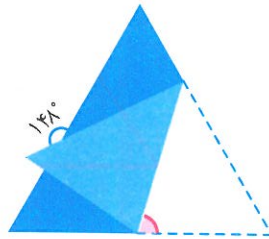
۷. در چهارضلعی محدب $ABCD$ امتداد ضلع‌های AD و BC یکدیگر را در نقطه E ،

و امتداد ضلع‌های AB و CD یکدیگر را در نقطه F قطع می‌کنند.

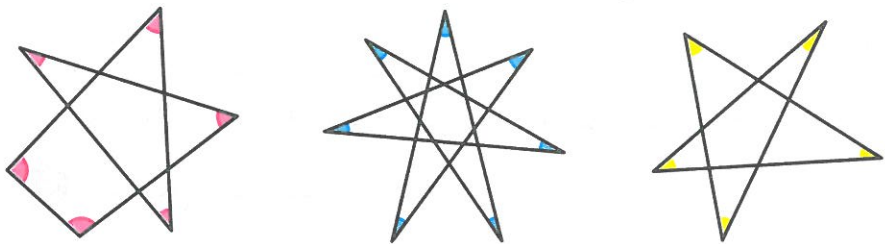
(الف) ثابت کنید اگر دو زاویه E و F برابر باشند، آنگاه $\hat{A} = \hat{C}$.

(ب) اگر $\hat{E} = \hat{F} = 20^\circ$ ، آنگاه تفاضل زاویه‌های B و D را به دست آورید.

۸. یک مثلث متساوی‌الاضلاع مانند شکل زیر تا شده است. اندازه زاویه‌ی صورتی چند درجه است؟



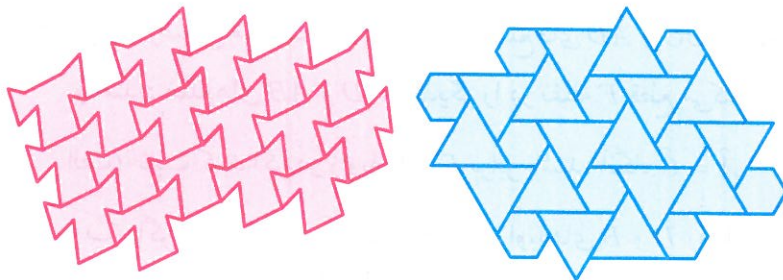
۹. در شکل‌های زیر، مجموع زاویه‌های رنگ شده را به دست آورید.



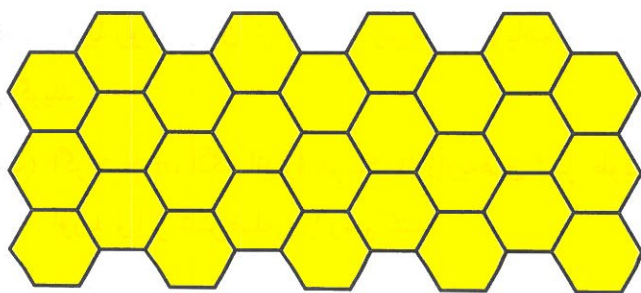
۱۰. تعدادی چندضلعی در نظر بگیرید. به پوشاندن یک صفحه با این چندضلعی‌ها (و یا چندضلعی‌های هم‌نهشت با آنها) به طوری که این چندضلعی‌ها روی هم قرار نگیرند و شکافی بین آنها ایجاد نشود، «کاشی‌کاری» می‌گویند.

اگر هر دو چندضلعی یک کاشی‌کاری، یا هیچ نقطه‌ی مشترکی با هم نداشته باشند، یا فقط در یک رأس مشترک باشند، و یا فقط در یک ضلع مشترک باشند، آن کاشی‌کاری را، «کاشی‌کاری ضلع به ضلع» می‌نامیم.

الف) چرا هر یک از الگوهای زیر کاشی‌کاری ضلع به ضلع نیستند؟



ب) الگوی زیر یک کاشی‌کاری ضلع به ضلع است. چرا؟



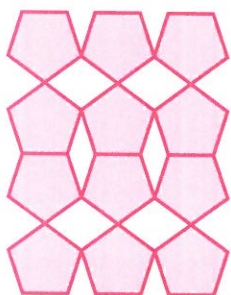
۱۱. الف) نشان دهید که مجموع زاویه‌های یک n -ضلعی محدب مساوی با $n - 2$ برابر مجموع زاویه‌های یک مثلث است.

ب) چرا با افزایش تعداد اضلاع چندضلعی منتظم، اندازه زاویه‌های آن بیشتر می‌شود؟

ج) چرا اگر n عددی بزرگ‌تر از شش باشد، با تعدادی n -ضلعی منتظم نمی‌توان کاشی‌کاری ضلع به ضلع کرد؟

د) چرا با تعدادی پنج‌ضلعی منتظم نمی‌توان کاشی‌کاری ضلع به ضلع کرد؟

ه) ثابت کنید که فقط سه نوع چندضلعی منتظم هستند که با تعدادی از آنها می‌توان کاشی‌کاری ضلع به ضلع کرد.



۱۲. الف) در شکل روبه‌رو، با کمک تعدادی پنج‌ضلعی

منتظم و دو نوع چندضلعی، یک کاشی‌کاری

ضلع به ضلع ارائه شده است. چرا این دو نوع

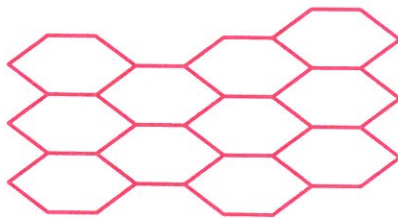
کاشی، لوزی هستند؟

ب) با کمک تعدادی پنج‌ضلعی منتظم و تنها یک نوع شکل دیگر روشی برای کاشی‌کاری ضلع به ضلع ارائه دهید.

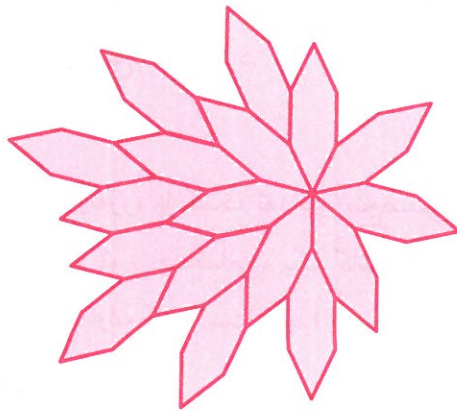
۱۳. فرض کنید n عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۲ باشد. به شش ضلعی متساوی‌الاضلاعی که دو زاویه روبه‌روی آن $\frac{360^\circ}{n}$ و بقیه زاویه‌های آن باهم برابر باشند، «شش طولانی»^۱ می‌گویند.

الف) اگر $n = 7$ ، آنگاه اندازه هر یک از زاویه‌های شش طولانی مربوطه را به دست آورید و این شش ضلعی را رسم کنید.

ب) چرا با کمک هر یک از انواع شش طولانی می‌توان با روش زیر کاشی‌کاری ضلع به ضلع کرد؟



ج) نشان دهید اگر $n = 7$ ، آنگاه با کمک شش طولانی ساخته شده، می‌توان به روش زیر کاشی‌کاری ضلع به ضلع کرد.



د) آیا برای هر یک از انواع شش طولانی می‌توان یک کاشی‌کاری ضلع به ضلع، شبیه شکل بالا ارائه داد؟

^۱ نام نوعی کاشی که معماران و هنرمندان ایرانی به کار می‌برده‌اند.

چندضلعی‌ها

۱۴. در هر یک از موارد زیر بررسی کنید که آیا با تعدادی چندضلعی منتظم (به طول واحد) می‌توان کاشی‌کاری ضلع به ضلع کرد یا خیر. (توجه کنید که در هر مورد باید از هر نوع کاشی، حداقل یک بار استفاده شود).

(الف) چهارضلعی منتظم، شش ضلعی منتظم و ۱۲ ضلعی منتظم

(ب) سه ضلعی منتظم، هفت ضلعی منتظم و ۴۲ ضلعی منتظم

۱۵. در بخشی از یک کاشی‌کاری ضلع به ضلع، k تا چندضلعی منتظم کنارهم قرار گرفته‌اند و همه رأس مشترکی دارند. اگر تعداد هر یک از این اشکال را به ترتیب با a, b, c و ... نشان دهیم،

(الف) ثابت کنید اگر $k = 3$ ، آنگاه:

$$3 - 2 = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

(ب) ثابت کنید اگر $k = 4$ ، آنگاه:

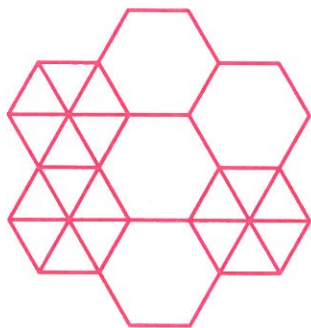
$$4 - 2 = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

(ج) برای $k = 5$ و $k = 6$ به ترتیب به چه معادله‌هایی می‌رسیم؟

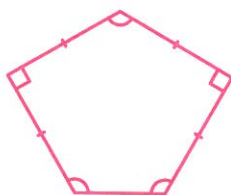
(د) چرا امکان ندارد « $k > 6$ »؟

(ه) با کمک شکل زیر چند جواب متفاوت برای معادله‌های داده شده و یا خواسته

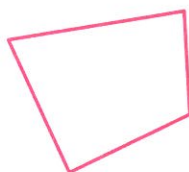
شده در قسمت‌های «الف»، «ب» و «ج» می‌توانید بیابید؟



۱۶. به شکل زیر، «پنج باز»^۱ می‌گویند. نشان دهید که تنها با کمک تعدادی پنج باز می‌توان کاری ضلع به ضلع کرد.

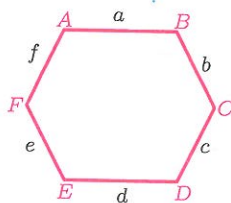


۱۷. الف) دو چهارضلعی زیر را ببینید. چطور می‌توان با کمک هر یک از آنها کاشی‌کاری ضلع به ضلع کرد؟



ب) نشان دهید با هر نوع چهارضلعی می‌توان کاشی‌کاری ضلع به ضلع کرد.

۱۸. در اوایل قرن بیستم، ریاضی‌دانی نتیجه بسیار جالبی را ثابت کرد و نشان داد که با تنها سه نوع شش ضلعی محدب می‌توان کاشی‌کاری ضلع به ضلع کرد. او ضلع‌ها و زاویه‌های یک شش ضلعی محدب را به صورت زیر نام‌گذاری کرد و آن سه دسته را چنین معرفی کرد:

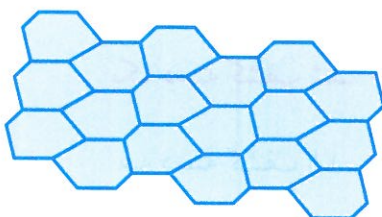
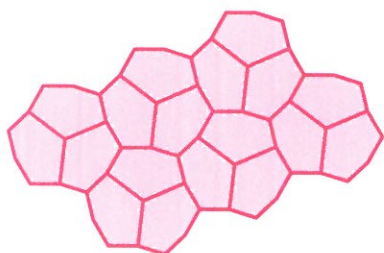


- ویژگی‌های دسته اول: $a = d, \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 360^\circ$
- ویژگی‌های دسته دوم: $c = e, a = d, \hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 360^\circ$
- ویژگی‌های دسته سوم: $e = f, c = d, a = b, \hat{A} = \hat{C} = \hat{E} = 120^\circ$

^۱ نام نوعی که معماران و هنرمندان ایرانی به کار می‌برده‌اند.

چندضلعی‌ها

- پس از پژوهش‌های این ریاضی‌دان و دیگران، امروزه همه مطالب اساسی دربارهٔ کاشی‌کاری با تنها یک نوع شش ضلعی را می‌دانیم.
- (الف) از هر دسته بالا، شکلی به عنوان مثال رسم کنید.
- (ب) شش ضلعی منتظم جزء کدام یک از دسته‌هاست؟
- (ج) مشخص کنید که هر یک از دو شکل زیر، روش کاشی‌کاری کدام یک از دسته‌ها را نشان می‌دهد؟

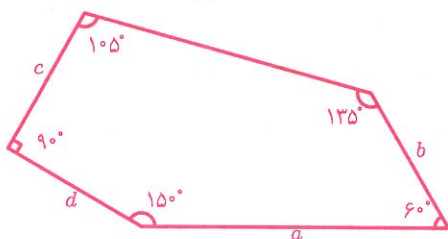


(د) روش کاشی‌کاری دسته‌ای را که در شکل بالا نیامده است، بیابید.

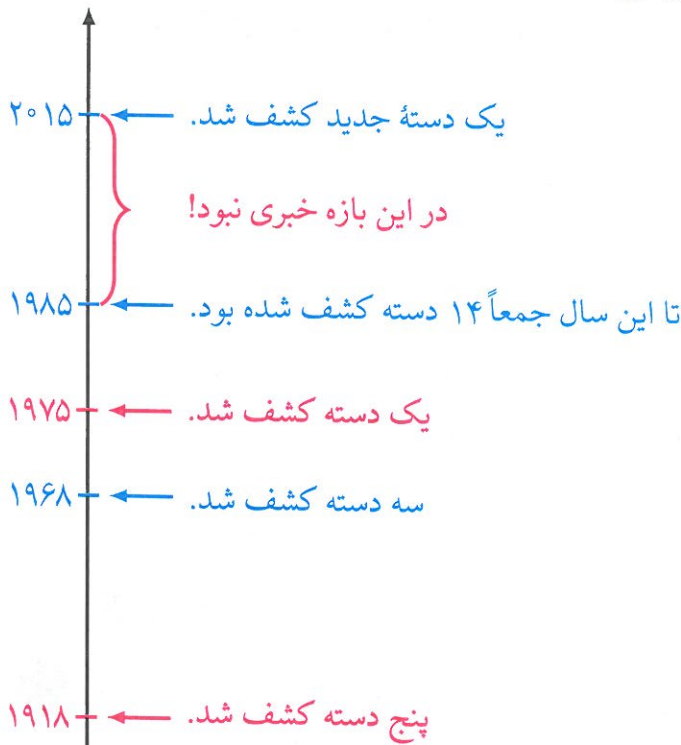
پروژه ۲۹. مسئله مهم، کاشی‌کاری با تنها یک نوع چندضلعی محدب است.

از بین چندضلعی‌ها تکلیف سه ضلعی‌ها از همان ابتدا معلوم بوده است؛ همچنین چهارضلعی‌ها. از پنج ضلعی‌ها موقتاً بگذریم. تکلیف شش ضلعی‌ها را هم که در سؤال قبل فهمیدیم. متأسفانه اگر $n > 6$ ، آنگاه با هیچ n -ضلعی محدبی نمی‌توان کاشی‌کاری کرد. در نتیجه تنها شناسایی پنج ضلعی‌های محدبی که با آنها می‌توان کاشی‌کاری کرد، می‌ماند.

نگاهی به جلد کتاب بیاندازید. یک نمونه کاشی‌کاری با پنج ضلعی‌ها می‌بینید که در سال ۲۰۱۵ کشف شده است! ویژگی این پنج ضلعی به صورت زیر است:



تاریخ کشف این نوع پنج ضلعی ها جالب است:



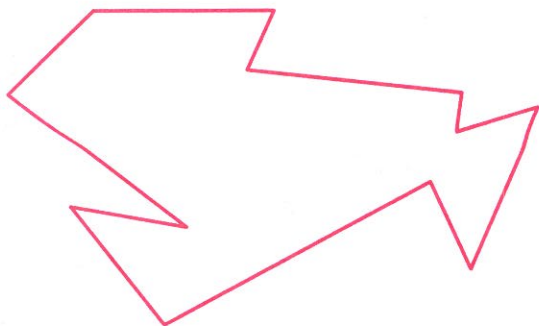
الف) به جز مثال های داده شده، یک پنج ضلعی محدب که بتوان با آن کاشی کاری کرد بیابید، سپس با مراجعه به وبگاه «www.webmath.ir» ببینید که آیا دسته شما با دسته های موجود در این وبگاه متفاوت است یا نه؟

ب) آیا شما همان کسی هستید که دسته بعدی را کشف و کار جاودانه ای در ریاضیات خواهد کرد؟ کسی چه می داند!

۲۰. درون مربعی ۵۷ نقطه وجود دارد. می خواهیم این مربع را با کاشی های مثلثی شکل بپوشانیم به طوری که فقط این ۵۷ نقطه و چهار رأس مربع، رئوس کاشی ها باشند. برای این کار به چند کاشی مثلثی نیاز داریم؟ (توجه کنید که کاشی های مثلثی لزوماً یکسان نیستند.)

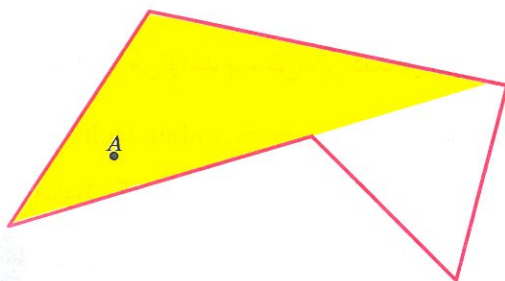
چندضلعی‌ها

۲۱. الف) می‌خواهیم چندضلعی زیر را با کاشی‌های مثلثی طوری بپوشانیم که رئوس کاشی‌ها فقط روی رأس‌های چندضلعی قرار گیرند. برای این کار حداقل به چند کاشی نیاز داریم؟ (توجه کنید که کاشی‌های مثلثی لزوماً یکسان نیستند.)

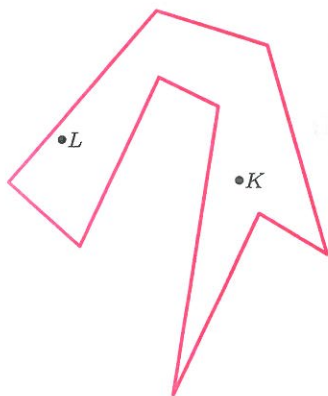


ب) مجموع زاویه‌های داخلی شکل بالا، چند درجه است؟

۲۲. در شکل زیر، فرض کنید نقطه A یک لامپ است. این لامپ ناحیه‌ای از چندضلعی را روشن (زرد رنگ) کرده است.



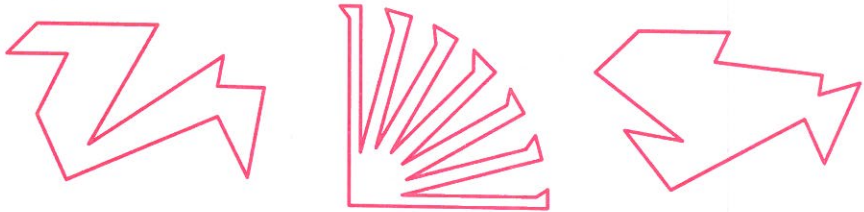
الف) در شکل روبه‌رو، لامپ‌های L و K چه ناحیه‌ای از چندضلعی را روشن می‌کنند؟ آن ناحیه‌ها را با رنگ زرد مشخص کنید.



ب) لامپ‌های شکل روبه‌رو را طوری جابه‌جا کنید که تمام چندضلعی روشن شود.

ج) آیا می‌توان فقط با یک لامپ، این چندضلعی را روشن کرد؟

۲۳. شکل های زیر، نقشه های ساختمان سه موزه هستند. می خواهیم در این موزه ها دوربین های مدار بسته کار بگذاریم. اگر هر دوربین قابلیت دید 360° درجه داشته باشد، با حداقل چند دوربین می توان تمام نقاط هر یک از موزه ها را پایید؟



۲۴. پروژه. می خواهیم درباره n ضلعی های مقعر بیشتر بدانیم. برای مثال، می توانیم بپرسیم:

- مجموع زاویه های داخلی یک n - ضلعی مقعر چقدر است؟
- یک n - ضلعی مقعر حداکثر چند زاویه بیش از 180° درجه دارد؟

الف) آیا می توانید به این پرسش ها پاسخ دهید؟

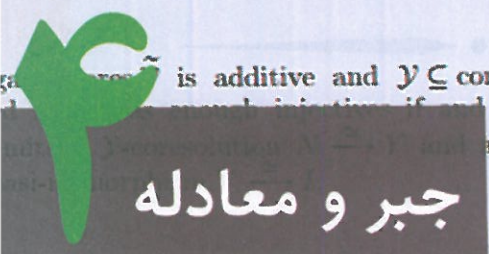
ب) آیا می توانید پرسش های دیگری مطرح کنید؟

در «www.webmath.ir» لینکی قرار داده شده تا کار شما را برای انجام این پروژه ساده تر کند. با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

۲۵. پروژه. اگر یک موزه n - ضلعی داشته باشیم، برای پاییدن آن حداقل به چند دوربین نیازمندیم؟ به عبارت دیگر برای پاییدن هر موزه با n دیوار چند دوربین کافی است؟



با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.



is additive and $\mathcal{Y} \subseteq \text{cores } \tilde{\mathcal{Y}}$. Injective coresolutions are always $\mathcal{I}$ -proper, and $\mathcal{I}$ -proper injectives if and only if $\text{cores } \tilde{\mathcal{I}} = \mathcal{A}$. If N is an object in $\mathcal{A}$ that admits an injective resolution $N \xrightarrow{\sim} I$, then there exists a

The next lemmata are standard or have standard proofs; for Lemma 1.6 see the proof of [Theorem 2.3], for Lemma 1.7 see the proof of [3, Proposition 2.1], for Lemma 1.8 repeatedly apply Definition 1.1, and for the ‘horseshoe lemma’, Lemma 1.9, see [9, proof of Lemma 8.2.1].

LEMMA 1.6. Let $0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$ be an exact sequence in $\mathcal{A}$.
(a) If $A_3 \perp \mathcal{W}$, then $A_1 \perp \mathcal{W}$ if and only if $A_2 \perp \mathcal{W}$. If $A_1 \perp \mathcal{W}$ and $A_2 \perp \mathcal{W}$, then $A_3 \perp \mathcal{W}$ and only if the given sequence is $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{W})$ exact.
(b) If $\mathcal{V} \perp A_1$, then $\mathcal{V} \perp A_2$ if and only if $\mathcal{V} \perp A_3$. If $\mathcal{V} \perp A_2$ and $\mathcal{V} \perp A_3$, then $\mathcal{V} \perp A_1$ if and only if the given sequence is $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{V}, -)$ exact.

LEMMA 1.7. If $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$, then $\mathcal{X} \perp \text{res } \hat{\mathcal{Y}}$ and $\text{cores } \hat{\mathcal{X}} \perp \mathcal{Y}$.

LEMMA 1.8. If $\mathcal{W}$ is an injective cogenerator for $\mathcal{X}$, then every object X in $\mathcal{X}$ admits a proper $\mathcal{W}$ -coresolution, and so $\mathcal{X} \subseteq \text{cores } \tilde{\mathcal{W}}$. If $\mathcal{V}$ is a projective generator for $\mathcal{Y}$, then every object Y in $\mathcal{Y}$ admits a proper $\mathcal{V}$ -resolution, and so $\mathcal{Y} \subseteq \text{res } \tilde{\mathcal{V}}$.

LEMMA 1.9. Let $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ be an exact sequence in $\mathcal{A}$.
(a) Assume that A' and A'' admit proper $\mathcal{X}$ -resolutions $X' \xrightarrow{\sim} A'$ and $X'' \xrightarrow{\sim} A''$. If the given sequence is $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exact, then A is in $\text{res } \tilde{\mathcal{X}}$ with proper $\mathcal{X}$ -resolution $X \xrightarrow{\sim} A$ such that there exists a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{(\text{id}_{X'})} & X & \xrightarrow{(0 \text{ id}_{X''})} & X'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

in which the top row is degreewise split exact and

$$\partial_n^X = \begin{pmatrix} \partial_n^{X'} & f_n \\ 0 & \partial_n^{X''} \end{pmatrix}.$$

خوارزمی برای نوشتن مسائل جبری از هیچ نمادی استفاده نمی‌کرد. اما امروزه در مقاله‌های ریاضی نمادهای زیادی به‌کار برده می‌شود. این یک مقاله جبر است که در سال ۲۰۰۸ با همکاری ریاضی‌دانان ایرانی و خارجی نوشته و منتشر شده است.

ساده کردن عبارات‌های جبری

۱. ده عدد بعدی الگوی زیر را بنویسید.

۲, ۴, ۸, ...

پاسخ چند نفر به این پرسش در زیر آمده است.

پاسخ مرضیه:

۲, ۴, ۸, ۱۰, ۱۴, ۱۶, ۲۰, ۲۲, ۲۶, ۲۸, ۳۲, ۳۶, ۳۸.

پاسخ مریم:

۲, ۴, ۸, ۱۲, ۱۸, ۲۴, ۳۲, ۴۰, ۵۰, ۶۰, ۷۲, ۸۴, ۹۸.

پاسخ نیره:

۲, ۴, ۸, ۳۲, ۲۵۶, ۸۱۹۲, ۲۶۱, ۲۳۴, ۲۵۵, ۲۸۹, ۲۱۴۴, ۲۲۳۳, ۲۳۷۷.

پاسخ زهرا:

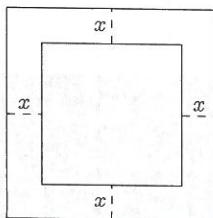
۲, ۴, ۸, ۱۴, ۲۶, ۴۸, ۸۸, ۱۶۲, ۲۹۸, ۵۴۸, ۱۰۰۸, ۱۸۵۴, ۳۴۱۰.

الف) کشف کنید که هر یک از این چهار نفر با چه قانونی ده عدد بعدی را نوشته‌اند؟

ب) حداقل سه جواب دیگر برای مسئله پیدا کنید و برای یکی از آنها، جمله n ام را بنویسید.

۲. در شکل زیر، طول ضلع مربع بزرگ ۳ واحد است. مساحت مربع کوچک را بر حسب

x به دست آورید.



۳. الف) حاصل عبارت زیر را بر حسب n بیابید.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n.$$

ب) الگوی زیر را با دقت بینید.

$$1 + 2 = 3$$

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

$$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$$

$$25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 31 + 32 + 33 + 34 + 35$$

$$36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 = 43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48$$

اگر این الگو را تا سطر n ام ادامه دهیم، با ذکر دلیل مشخص کنید که آیا تساوی برای سطر n ام نیز برقرار است؟

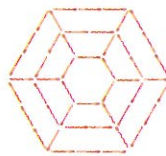
۴. الگوی زیر را با دقت بینید. الهام می‌خواست تعداد چوب‌کبریت‌های شکل ۱۵ و مائده می‌خواست تعداد چوب‌کبریت‌های شکل ۱۰ را حساب کند.



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

راه‌حل الهام:

$$15 \times (6 \times 15) - (1 \times 6) - (2 \times 6) - (3 \times 6) - (4 \times 6) - \dots - (13 \times 6).$$

راه‌حل مائده:

$$6 + (2 \times 6 + 6) + (3 \times 6 + 6) + (4 \times 6 + 6) + \dots + (10 \times 6 + 6).$$

الف) درباره راه‌حل الهام و مائده بحث کنید.

ب) برای یافتن تعداد چوب‌کبریت‌های شکل n ام روش دیگری بیابید.

۵. میثم و مهسا با روش‌های زیر حاصل ضرب $(2x + 3)(x^2 - 5x + 4)$ را به دست آوردند.

روش میثم:

$$\begin{aligned}(2x + 3)(x^2 - 5x + 4) &= 2x(x^2 - 5x + 4) + 3(x^2 - 5x + 4) \\ &= (2x^3 - 10x^2 + 8x) + (3x^2 - 15x + 12) \\ &= 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12.\end{aligned}$$

روش مهسا:

$$\begin{array}{r}x^2 - 5x + 4 \\ 2x + 3 \\ \hline 3x^2 - 15x + 12 \\ 2x^3 - 10x^2 + 8x \\ \hline 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12\end{array}$$

الف) درباره دو راه حل بالا بحث کنید.

ب) ابتدا دو عدد ۳۸ و ۱۵۴ را به صورت گسترده بنویسید. سپس یک بار با روش میثم و بار دیگر با روش مهسا حاصل 38×154 را بیابید.

ج) حاصل ضرب عدد دو رقمی $\overline{ab}$ در $\overline{ba}$ را به دست آورید.

۶. عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(x - 3)(x^2 - 3x + 9)$

ب) $(4x - 5y)(3x - y)$

ج) $(1 + 2x)(x^2 - 3x + 1)$

د) $(2x + y)(2x + y + 3)$

ه) $(x + y - z)(x - z)$

و) $(a^2 + b)(c - b + d - a^2)$

ز) $(z^2 - 5)(z + 1)(z^2 + 2z + 1)$

ح) $(a^2 + b)(c^2 - d)(5 - 2e)$

ط) $x(x^2 - \frac{7}{4})(4x^2 - x + 1)$

ی) $(x^3 - 1)(x^2 - 25)(z + 1)^2$

۷. یک عدد سه رقمی کوچکتر از ۹۰۰ انتخاب کنید. اختلاف این عدد با عدد ۹۹۹ را سمت راست آن بنویسید. عدد شش رقمی به دست آمده بر ۳۷ بخش پذیر است؛ خارج قسمتی که به دست می آید بر ۲۷ بخش پذیر است و خارج قسمت دوم یک واحد از عدد سه رقمی انتخاب شده بیشتر است.

برای مثال، اگر ۱۶۷ را انتخاب کنیم، داریم:

$$۹۹۹ - ۱۶۷ = ۸۳۲, \quad \frac{۱۶۷۸۳۲}{۳۷} = ۴۵۳۶, \quad \frac{۴۵۳۶}{۲۷} = ۱۶۸, \quad ۱۶۸ = ۱۶۷ + ۱.$$

الف) چرا مراحل بالا برای هر عدد سه رقمی کوچکتر از ۹۰۰ درست است؟

ب) قانون بالا را طوری اصلاح کنید که این قانون برای هر عدد سه رقمی دلخواه برقرار باشد.

۸. صالح برای محاسبه توان دوم یک عدد دو رقمی که یکان آن ۵ است، ابتدا عدد دهگان را در عدد بعدی اش ضرب می کند و سپس در سمت راست حاصل ضرب به دست آمده عدد ۲۵ را می نویسد. برای مثال:

$$(۷۵)^2 = ۵۶۲۵ \quad (۵۶ = ۷ \times ۸).$$

صالح مدعی است که چنین روشی برای یافتن مربع هر عدد سه رقمی با یکان ۵ نیز کار می کند. برای مثال:

$$(۱۰۵)^2 = ۱۱۰۲۵ \quad (۱۱۰ = ۱۰ \times ۱۱).$$

آیا ادعای صالح درست است؟ چرا؟



پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری

۱. مقدار عبارت جبری $n^2 + n + 41$ را برای $n = 1, n = 2, n = 3, \dots$ و $n = 20$ به دست آورید. اعداد به دست آمده چه خاصیت مشترکی دارند؟

۲. از بهنام، احسان، حامد و شکیب پرسیدند:

اگر $a > 0, b < 0, c < 0$ ، آنگاه چندتا از عبارت‌های زیر منفی هستند؟

• ab^2c	• $(b-a)^3$	• $(ac-b^2c)$	• $\frac{a^2b^3}{b^6c^2}$
-----------	-------------	---------------	---------------------------

آنها به پرسش بالا این‌گونه پاسخ داده‌اند:

احسان: حداکثر سه تا

بهنام: حداقل سه تا

شکیب: کمتر از سه تا

حامد: بیشتر از سه تا

درباره درستی یا نادرستی هر یک از پاسخ‌های بالا بحث کنید.

۳. اگر $x + 2y = 4$ ، آنگاه مجموع عبارت‌های جبری زیر را به دست آورید.

$$3x + 5y, 2x + 3y, x + 2y, x + 4y, 2y, x.$$

۴. می‌دانیم x, y و z سه عدد متفاوت هستند و یکی از آنها ۳، دیگری ۴ و یکی دیگر ۵ است. بیشترین و کمترین مقدار هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $-x^y - z$

ب) $-x^y - \frac{1}{z}$

۵. دستوره‌های زیر را در نظر بگیرید.

A: قرینه و معکوس ورودی

B: ضرب در، یک واحد کمتر از قرینه ورودی

C: تقسیم بر قرینه مجذور ورودی

D: منهای معکوس مجذور قرینه ورودی

● جبر و معادله ●

الف) خروجی هر ستون از جدول زیر را بر حسب x به دست آورید.

ستون «الف»	ستون «ب»	ستون «ج»	ستون «د»
ورودی	x	خروجی ستون «ب» به توان ۲	خروجی ستون «ج» به اضافه معکوسش
دستور	A	B	D
خروجی			

ب) در جدول بالا، x چه اعدادی نمی تواند باشد؟

ج) اگر در خانه زیر خانه D بنویسیم $35y^2$ و عملیات را به طور معکوس انجام دهیم،

در خانه بالای خانه A چه عبارتی بر حسب y به دست می آید؟

۶. اگر a و b دو عدد باشند، حاصل $a \perp b$ برابر $a - \frac{b}{4}$ ، و حاصل $a \top b$ برابر $\frac{a}{4} - b$ می شود.

برای مثال:

$$2 \perp 4 = 2 - \frac{4}{4} = 0, \quad 2 \top 4 = \frac{2}{4} - 4 = -3.$$

الف) حاصل هر یک از عبارت های زیر را بیابید.

- $(3 \top 5) \perp 7$
- $3 \top (5 \perp 7)$
- $-4 \perp (3 \top (-1))$
- $(2 \top 6) \perp (-3 \top (-2))$

ب) حاصل $x + y$ با کدام یک از موردهای زیر برابر است؟

- $(2x) \top (-y)$
- $(x) \perp (-2y)$
- $2(x \perp (x - y))$
- $2(x \top (x - y))$

ج) درباره درستی یا نادرستی هر یک از ادعاهای زیر، بحث کنید.

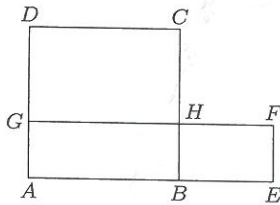
● اگر $a \top b = a \perp b$ ، آنگاه a و b قرینه یکدیگرند.

● اگر $a \top b = b \top a$ ، آنگاه a و b باهم برابرند.

د) بیشترین و کمترین مقداری را که با پرانتزگذاری عبارت $2 \perp 2 \top 2 \perp 2$ حاصل

می شود، بیابید.

۷. همه مستطیل‌های به محیط ۲۰ سانتی‌متر و طول اضلاع صحیح را رسم کنید. کدام مستطیل بیشترین مساحت را دارد؟



۸. در شکل روبه‌رو، محیط مربع $ABCD$ با محیط مستطیل

$AEFG$ برابر است. طول ضلع مربع $ABCD$ را برابر a و عرض مستطیل $AEFG$ را برابر b در نظر بگیرید.

(الف) طول DG را بر حسب a و b به دست آورید.

(ب) طول BE بر حسب a و b چیست؟

(ج) مساحت $BEFH$ و $GHCD$ را بر حسب a و b به دست آورید.

(د) ثابت کنید مساحت $CDGH$ از مساحت $BEFH$ بیشتر است.

(ه) ثابت کنید مساحت مربع $ABCD$ از مساحت مستطیل $AEFG$ بیشتر است.

۹. اگر کلیه مستطیل‌هایی که اندازه محیط آنها برابر $4a$ است را رسم کنیم، کدام مستطیل

بیشترین مساحت را دارد؟ چرا؟

راهنمایی: از تمرین قبل استفاده کنید.

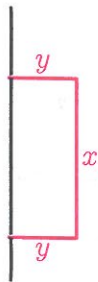
۱۰. آقا فرامرز می‌خواهد با سیم توری، در زمین کشاورزی خود حصاری به شکل مستطیل

بکشد. طول سیم توری او ۶۰۰ متر است. مطابق شکل زیر، یک ضلع مستطیل به

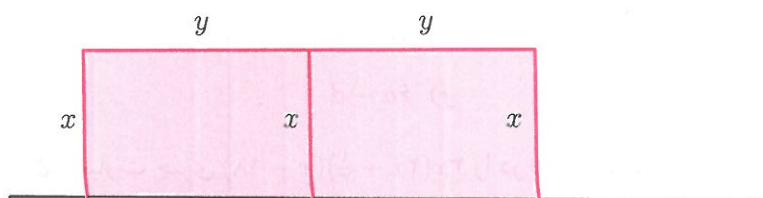
دیوار محصور است. (فرض کنید خط سیاه زیر همان دیوار و خطوط صورتی حصار

هستند!) مقدارهای x و y را طوری تعیین کنید که مساحت داخل حصار بیشترین

مقدار ممکن باشد.



۱۱. فرض کنید f مقداری ثابت باشد و $f = 3x + 2y$ و x و y را طوری تعیین کنید که مساحت صورتی رنگ بیشترین مقدار ممکن باشد.



۱۲. می‌خواهیم استوانه‌ای به حجم a بسازیم. شعاع قاعده و ارتفاع این استوانه چه شرایطی داشته باشند تا مساحت جانبی استوانه کمترین مقدار ممکن باشد؟

تجزیه عبارت‌های جبری

۱. کدام یک از تساوی‌های زیر، تجزیه یک عبارت جبری را نشان می‌دهد؟

الف) $x^2 + x + 1 = x(x + 1) + 1$ ب) $x + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} + 1)^2$

ج) $(x - 1)a - a(1 - x) = a(x - 2)$ د) $2y^2 + 5y = 2y(y + \frac{5}{2})$

۲. با تبدیل به ضرب، صورت و مخرج هر کسر را ساده کنید.

الف) $\frac{x \times 2^a - y \times 2^a}{x - y}, (x \neq y)$ ب) $\frac{42xy^3 - 35x^2y}{7xy}, (xy \neq 0)$

۳. هر یک از عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $(u + 1)^2 - 3(u + 1)$

ب) $(a - 18)^2 + (18 - a)$

ج) $(a + 5)a - a(7 - a)$

د) $(b - 2)(b - 4) + 4b - 8$

ه) $(t - 1)^2 + t(t - 1) + 8(t - 1)$

و) $ab - a + b - 1$

ز) $xz + xw - yz - yw$

ح) $tv - tr - kv + kr$

ط) $xw - 2xz - yw + 2yz$

ی) $5ac - 35bc - 14bd + 2ad$

۴. در تجزیه عبارت $12ac + 12bd - 24bc - 6ad$ کدام عبارت زیر نمی تواند ظاهر شود؟

الف) $2c - d$

ب) $2d - 4c$

ج) $2b - a$

د) $3a - 6b$

ه) $12c - 6b$

و) $6a - d$

۵. عبارت جبری $(x - 18)(3x(2x - \frac{1}{3}))$ را در نظر بگیرید.

الف) این عبارت جبری را ساده کنید.

ب) مقدار این عبارت جبری را برای $x = \frac{1}{6}$ به دست آورید.

ج) دو عدد بیابید که برای آنها، حاصل عبارت جبری با حاصل قسمت «ب» برابر باشد.

د) یک عبارت جبری با تنها یک نوع متغیر بیابید که با جایگذاری چهار مقدار عددی متفاوت، به عدد ۳- برسیم.

۶. در زیر، از $x = 1$ نتیجه شده $1 = 0$. ایراد کجاست؟

$$x = 1 \Rightarrow x^2 = x$$

$$\Rightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x(x - 1)}{x - 1} = \frac{0}{x - 1}$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow 1 = 0.$$



۷. برای مرکب بودن هر یک از اعداد زیر دلیل بیاورید.

الف) $1 + 2 + 3 + \dots + 97$

ب) $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 97 + 83$

ج) $3^{101} + 1$

د) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 31^2$

۸. آیا ممکن است مجموع پنج عدد طبیعی متوالی، عددی اول باشد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۹. فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند که $n > 2$ و $m > 3$. ثابت کنید حاصل عبارت‌های زیر عددی مرکب است.

- الف) $1 + 2 + 3 + \dots + n$ ب) $1 \times 2 \times \dots \times m + m - 2$
 ج) $n^3 - 2n^2$ د) $mn - n - m + 1$
 ه) $m^2n - mn + n - m^2 + m - 1$ و) $mn^2 + m - n^2 - 1$
 ز) $2mn - 4n - m + 2$ ح) $mn - 2n + m - 2$

۱۰. برای درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر دلیل بیاورید.

الف) حاصل ضرب دو عدد فرد، عددی فرد است.

ب) حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی مضرب ۳ است.

ج) برای هر عدد طبیعی n ، مقدار $2n^2 + 29$ عددی اول است.

د) مجموع سه عدد زوج متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

ه) حاصل ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۲۴ است.

و) برای هر عدد طبیعی m که m مضرب ۴۱ نباشد، مقدار $m^2 + m + 41$ عددی اول است.

ز) اگر a و b دو عدد صحیح باشند که باقی‌مانده تقسیم آنها بر ۶ برابر ۵ باشد، آنگاه باقی‌مانده تقسیم ab بر ۶ برابر ۱ است.

ح) اگر از مربع یک عدد فرد یک واحد کم کنیم، حاصل بر ۸ بخش پذیر است.

ط) تفاضل دو عدد مربع کامل، مضرب ۴ است.

ی) هر مضرب ۴ را می‌توان به صورت تفاضل مربع دو عدد صحیح نوشت.

۱۱. عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(z^2 - 5) - (z + 1)(z^2 + 2z + 1)$

ب) $(x^3 - 1)(x^2 - 25) - (x + 1)^2$

ج) $(z^2 - 5)(z + 1) - (z^2 + 2z + 1)$

د) $(x^3 - 1) - (x^2 - 25)(x + 1)^2$

۱۲. آیا مثالی برای دو عدد صحیح a و b وجود دارد که تعداد جملات عبارت $(x^2 + ax + 1)(x + b)$ پس از ساده کردن اعداد زیر باشند؟

الف) ۷

ب) ۶

ج) ۵

د) ۴

ه) ۳

و) ۲

در صورت عدم وجود مثال برای a و b ، دلیل بیاورید.

۱۳. در این مسئله منظور از P یک جمله است که در آن فقط متغیر a با توان ۱ به کار رفته است. برای مثال P می‌تواند برابر a ، $-a$ ، $2a$ ، $-\sqrt{3}a$ یا $\frac{2}{3}a$ باشد؛ ولی P نمی‌تواند برابر a^2 ، $a^2 + a$ ، $-ab$ ، $3b$ ، $a + 2$ یا 5 باشد. در این مسئله منظور از R نیز یک جمله است که در آن فقط متغیر b با توان ۱ به کار رفته است.

الف) باتوجه به تعریف بالا، P برابر کدامیک از عبارت‌های زیر می‌تواند باشد؟ R برابر کدامیک از عبارت‌های زیر می‌تواند باشد؟

$$-3a, 5b, a + b, ab, 12a, b + 1, -18, b^2, -a^2, \frac{1}{4}a, \sqrt{2}b.$$

ب) در جدول صفحه بعد، باتوجه به تعریف بالا، در هر پرانتز P و R را طوری تعیین کنید که تعداد جمله‌های حاصل ضرب عبارت جبری هر ردیف، برابر با عدد ستون سمت راست باشد. توجه کنید که لازم نیست جمله‌ای که به جای P یا R در پرانتز اول و دوم هر عبارت جبری استفاده می‌کنید برابر باشد.

تعداد جمله‌های حاصل ضرب	عبارت جبری
۹	$(P + R + c)(P + d + e)$
۸	$(P + R + c)(P + R + d)$
۷	$(P + R + c)(P + R + d)$
۶	$(P + R + c)(P + R + c)$
۵	$(P + R - c)(P + R + c)$
۴	$(P + R + c)(P + R + c)$
۳	$(a^2 + P + 1)(a^2 + a + 1)$
۲	$(2a^2 + P + 1)(2a^2 + P + 1)$
۲	$(a^2 + P + 1)(a^2 + P + 1)$

برای نمونه، دو جواب برای قسمت اول به دست می‌آوریم:

$$\bullet (a + b + c)(-a + d + e)$$

$$= a(-a + d + e) + b(-a + d + e) + c(-a + d + e)$$

$$= -a^2 + ad + ae - ab + bd + be - ac + cd + ce,$$

$$\bullet (a + b + c)(a + d + e)$$

$$= a(a + d + e) + b(a + d + e) + c(a + d + e)$$

$$= a^2 + ad + ae + ab + bd + be + ac + cd + ce.$$

۱۴. باتوجه به تمرین ۲ صفحه ۲۳، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) آیا ادعای نینا برای هر عدد طبیعی m درست است؟ چرا؟

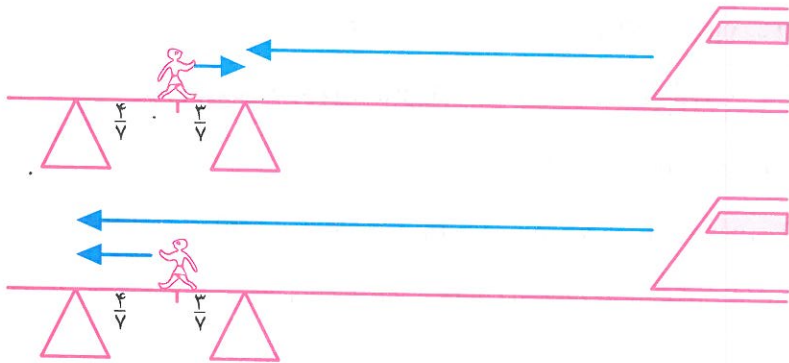
ب) آیا ادعای نینا ارتباطی با روش غربال اعداد اول دارد؟

معادله

۱. $\frac{2}{3}$ عددی از $\frac{1}{5}$ آن $\frac{2}{7}$ بیشتر است. آن عدد چیست؟

۲. چند عدد طبیعی وجود دارد که حاصل ضرب آن عدد در عدد قبلی اش برابر حاصل ضرب آن عدد در عدد بعدی اش شود؟

۳. ریزعلی^۱ روی پلی که ریل راه آهن از آن عبور می کرد، در حال حرکت بود. او بعد از اینکه $\frac{4}{7}$ مسافت روی پل را پیمود، قطاری دید که از روبه رو به سمت او می آید. ریزعلی تشخیص داد که اگر به سمت قطار بدود در لبه پل به قطار می رسد و می تواند از ریل خارج شود؛ همچنین اگر برگردد و به سمت دیگر پل بدود باز هم در لبه پل قطار به او می رسد و می تواند به موقع از ریل خارج شود. اگر سرعت دویدن ریزعلی ۲۰ کیلومتر در ساعت باشد، سرعت قطار چقدر بوده است؟

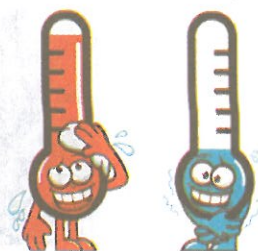


۴. چه عددی است که اگر آن را در ۳ ضرب کنیم، سپس $\frac{3}{4}$ حاصل ضرب را به آن اضافه کنیم، بعد بر ۷ تقسیم کنیم، $\frac{1}{4}$ خارج قسمت را از آن کم کنیم، حاصل را در خودش ضرب کنیم، ۵۲ واحد از آن کم کنیم، بعد از جذر گرفتن از حاصل، ۸ واحد به آن اضافه کنیم و بر ۱۰ تقسیم کنیم، نتیجه مساوی ۲ شود؟

۱ به یاد ریزعلی خواجهی مشهور به دهقان فداکار که در سال ۱۳۴۱ توانست شب هنگام جان مسافران یک قطار را نجات دهد. به گفته او پس از توقف قطار، مردم ناراضی از قطار پیاده شدند و او را کتک زدند! پس از آنکه مسافران با چشم خود ریزش کوه را دیدند، به تشکر و عذرخواهی از او روی آوردند.

۵. برای اندازه‌گیری دما در برخی کشورها از واحد سانتی‌گراد (C) و در برخی کشورها از واحد فارنهایت (F) استفاده می‌شود. آب در صفر درجه سانتی‌گراد و 32 درجه فارنهایت یخ می‌زند. در جدول زیر، تبدیل شده دماهایی از سانتی‌گراد به فارنهایت را مشاهده می‌کنید.

C	-30°	-20°	-10°	0°	100°
F	-22°	-4°	14°	32°	212°



الف) رابطه بین C و F به صورت $F = mC + n$ است. با توجه به جدول بالا، اعداد m و n را بیابید.

ب) در چه درجه‌ای سانتی‌گراد و فارنهایت یک عدد را نشان می‌دهند؟

۶. الف) کدام یک از موارد زیر می‌تواند صورت مسئله‌ای باشد که معادله‌اش به صورت

$$2x + 3 = 5x \text{ است؟}$$

• دو دونه روزی سه کیلومتر می‌دوند. پنج دونه روزی چند کیلومتر می‌دوند؟

• قیمت پنج کیلو سیب، سه هزار تومان بیشتر از قیمت دو کیلو از همان سیب است. قیمت سه کیلو سیب چند هزار تومان است؟

• سه روز بعد از دو روز دیگر، پنج‌شنبه خواهد بود. امروز چند شنبه است؟

• اندازه زاویه‌ای که دو برابر اندازه‌اش، سه واحد بیشتر از پنج برابر اندازه‌اش است، چقدر است؟

ب) با کمک هم‌کلاسی‌های‌تان حداقل ۵ مسئله بسازید که معادله آنها به صورت $2x + 3 = 5x$ باشد.

۷. جناب خان گفته که او و شش نفر از دوستانش با هم ۷۰۷ لبو فروخته‌اند. می‌دانیم تعداد لبوهای فروخته شده هیچ دوتای آنها یکی نیست و تعداد لبوهای کسی که بیشترین لبو را فروخته است، شش لبو بیشتر از کسی است که کمترین لبو را فروخته است. کسی که کمترین لبو را فروخته، چه تعداد لبو فروخته است؟



۸. معادله $x + 2y = 50$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

۹. الف) امیرحسین هر روز صبح با دوچرخه از خانه به مدرسه می‌رود. او صبح‌ها مسیر خانه تا مدرسه را با سرعت ۳۰ کیلومتر در ساعت و بعد از ظهرها مسیر مدرسه تا خانه را با سرعت ۹۰ کیلومتر در ساعت رکاب می‌زند. میانگین سرعت امیرحسین چقدر است؟

ب) مسئله را در حالت کلی که سرعت‌های ۳۰ و ۹۰ به ترتیب با v و u جانشین شوند، حل کنید.



۱۰. من و چهار نفر از دوستانم مقداری پول خرج کرده‌ایم. به طور متوسط هر کدام از ما ۸۰۰۰ تومان خرج کرده است. من ۱۰۰۰۰ تومان خرج کرده‌ام. هر کدام از دوستانم به طور متوسط چقدر خرج کرده‌اند؟

۱۱. تعدادی از مؤلفان کتاب‌های تکمیلی ویژه استعدادهای درخشان در جلسه‌ای حضور داشتند. میانگین سن این افراد برابر تعدادشان بود. شخصی که ۲۹ ساله بود، به این جلسه اضافه شد. باز هم میانگین سن افراد حاضر در جلسه برابر تعدادشان بود. در ابتدا چند نفر در جلسه حضور داشتند؟



۱۲. شانزده عدد طبیعی متمایز که میانگین آنها ۱۶ باشد را در نظر بگیرید. در بین این اعداد بزرگ‌ترین عدد ممکن، چه عددی است؟

۱۳. علیرضا در آزمونی شرکت کرد که ۴۰ سؤال داشت. روی دفترچه آزمون نوشته شده بود: «هر پاسخ درست ۵٪ نمره مثبت و هر پاسخ نادرست ۱ نمره منفی دارد.» علیرضا در پایان آزمون خوشحال بود که به تمام سؤال‌ها پاسخ داده است؛ اما بعد از اعلام نتایج نمره علیرضا ۲ شد! او به چند سؤال پاسخ درست داده بود؟

۱۴. اگر قیمت بی‌تخفیف سه تلفن همراه از یک نوع برابر قیمت با تخفیف پنج تلفن همراه از همان نوع باشد، تخفیف چند درصد است؟



۱۵. احمد و محمود هر کدام تعدادی سکه داشتند. احمد ۵ سکه از پدر بزرگش گرفت و سکه‌هایش دو برابر سکه‌های محمود شد. سپس ۱۲ سکه به مادر بزرگش داد و تعداد سکه‌هایش نصف تعداد سکه‌های محمود شد. احمد در ابتدا چند سکه داشته است؟

۱۶. یکی از همسایه‌های طاهره خانم، سن او را پرسید. طاهره خانم گفت: «سن من دوسوم سال‌هایی است که مانده تا ۱۰۰ ساله شوم.» سن طاهره خانم چقدر است؟

۱۷. چند عدد حسابی یک رقمی مانند a و b در معادله $ab = 10 + a$ صدق می‌کنند؟

۱۸. هومن پول‌هایش را جمع می‌کند تا رایانه‌ای ۵,۴۰۰,۰۰۰ تومانی بخرد. وقتی شروین از او پرسید: «چقدر پول جمع کرده‌ای؟» هومن گفت: «اگر یک‌پنجم بیشتر از پول الانم را داشتم، یک‌چهارم کمتر از پولی که برای خرید رایانه لازم دارم، نیاز داشتم.» هومن چقدر پول جمع کرده است؟

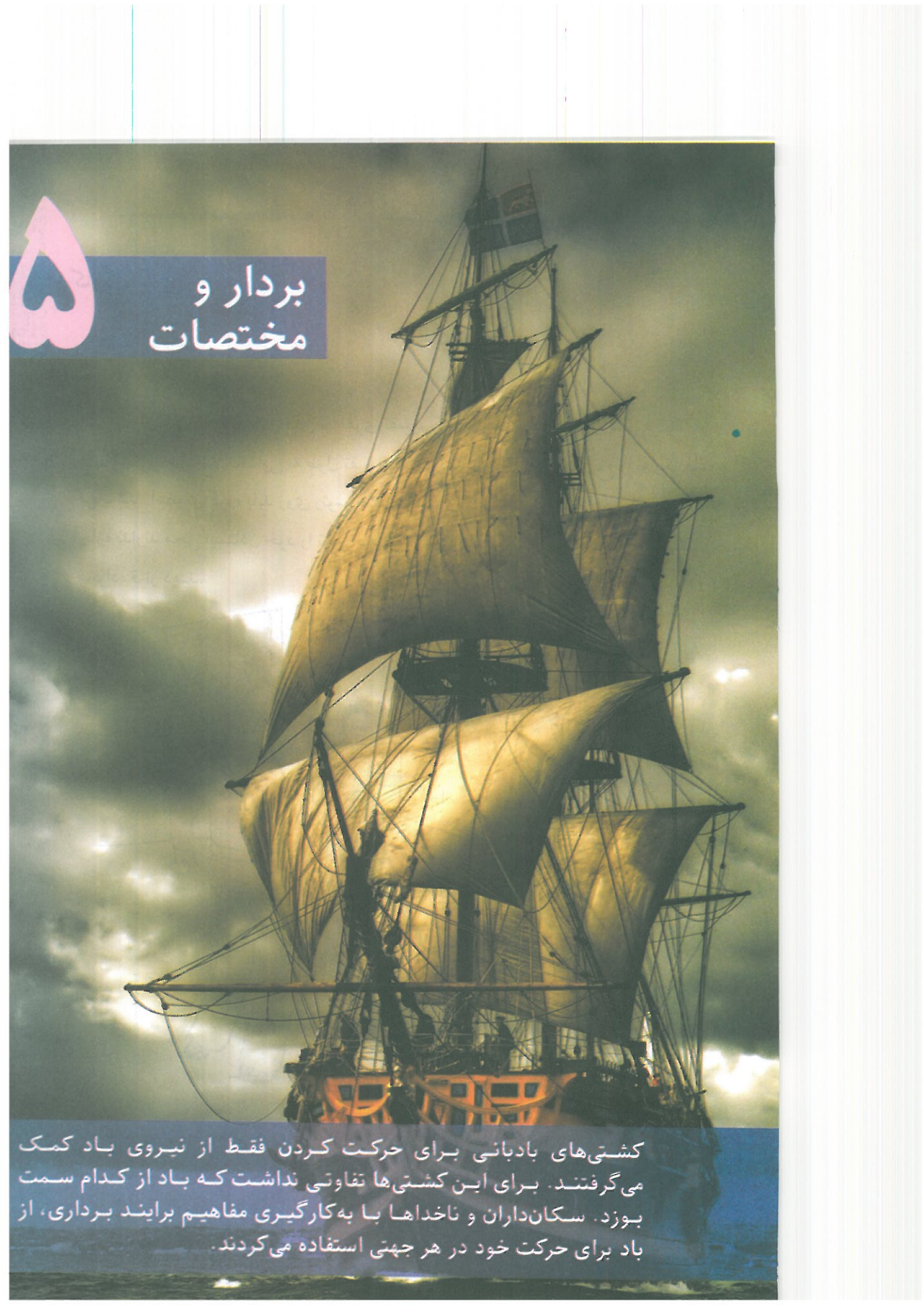
۱۹. رضا می‌خواست دو عدد دو رقمی را در هم ضرب کند. متأسفانه عدد اولی را در مقلوب عدد دومی ضرب کرد. جواب رضا ۳۸۱۶ واحد بیشتر از جواب درست بود. جواب درست را بیابید.

۲۰. عددی به ما داده شده است. آن را دو برابر می‌کنیم و یک واحد از نتیجه کم می‌کنیم. اگر نتیجه $1 + 2^{100}$ باشد، با چه عددی شروع کرده‌ایم؟

۲۱. حاصل جمع پنج عدد طبیعی متوالی برابر با حاصل جمع سه عدد طبیعی متوالی بعدی است. بزرگ‌ترین عدد از این هشت عدد را به دست آورید.

۲۲. صبح دیروز نرخ تبدیل دلار در سه صرافی برابر بود. ظهر، صرافی اول ۱٪ به نرخ دلار اضافه کرد و عصر ۱٪ از نرخ جدید آن کم کرد. صرافی دوم، ظهر ۱٪ از نرخ دلار کم کرد و عصر ۱٪ به نرخ جدید آن اضافه کرد. صرافی سوم نرخ دلار را تغییر نداد. عصر دیروز نرخ دلار در کدام صرافی از بقیه بیشتر بود؟





بردار و مختصات

کشتی‌های بادبانی برای حرکت کردن فقط از نیروی باد کمک می‌گرفتند. برای این کشتی‌ها تفاوتی نداشت که باد از کدام سمت بوزد. سکان‌داران و ناخداها با به‌کارگیری مفاهیم برابری، از باد برای حرکت خود در هر جهتی استفاده می‌کردند.

کارگاه بازی

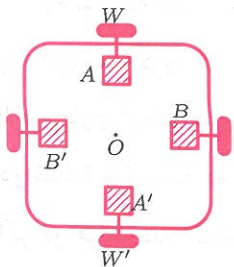
دانش‌آموزان کلاس را به گروه‌های سه نفری تقسیم کنید. مطابق شکل دور کمر هر یک از اعضای گروه یک نخ کاموایی به طول تقریبی ۲ متر ببندید و سر دیگر این نخ را به یک قلم گره بزنید. اعضای گروه باید روی رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی بایستند و در طول مسابقه اجازه ندارند محل ایستادن خود را تغییر دهند. در وسط این مثلث فرضی یک بطری نوشابه خانواده قرار دهید.



مدت زمانی را که هر گروه قلم را بدون استفاده از دست و صرفاً با حرکت بدن به درون بطری هدایت می‌کند، ثبت کنید. گروهی برنده است که در زمان کمتری بتواند این کار را انجام دهد. جایزه نفرات تیم برنده، افزایش نیم نمره به نمرهٔ آزمون میان‌ترم‌شان خواهد بود.

دریچه‌ای به روبوکاپ

سال گذشته دیدید که گروهی از دانش‌آموزان، روباتی به نام روپاد ساختند که می‌توانست در راستای شمال-جنوب و شرق-غرب حرکت کند.

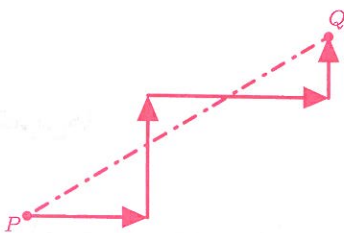


در شکل بالا، به نقطه O مرکز کف روپاد می‌گوییم. در این شکل همچنین نمایی از چهار موتور و چهار چرخ روپاد را می‌بینید. برای مثال با حرکت همزمان ساعتگرد موتور A و پادساعتگرد موتور A' به اندازه یک واحد، هر دو چرخ W و W' مجموعاً روپاد را یک واحد به سمت شرق جابه‌جا می‌کنند.

روپاد با دریافت دستوری مانند

$$(48N)(100E)$$

ابتدا ۱۰۰ واحد به سمت شرق و سپس ۴۸ واحد به سمت شمال حرکت می‌کرد. مدل حرکت روپاد به صورت پاره‌خط‌های موازی دو محور افقی و عمودی بود؛ زیرا روپاد دستورات را مرحله به مرحله اجرا می‌کرد و این کار باعث هدر رفتن انرژی و زمان می‌شد. برای مثال، روپاد برای رسیدن از نقطه P به نقطه Q مسیری مثل مسیر زیر را طی می‌کرد، درحالی‌که کوتاه‌ترین مسیر ممکن مسیر مستقیم (که با خط‌چین نشان داده شده) است.



با همفکری، اعضای گروه به این نتیجه رسیدند که اگر هر دو دستهٔ موتور A و A' و همچنین B و B' همزمان حرکت کنند، از نظر فیزیکی روپاد می‌تواند مسیری مورب را طی کند. بنابراین تصمیم گرفتند که دست به‌کار شوند.

لازم نبود که مسئول مکانیک گروه روپاد تغییرات زیادی ایجاد کند؛ اما مسئول برنامه‌نویسی و الکترونیک گروه باید این فکر را عملی می‌کردند. آنها با مرور مفاهیم مختصات و بردار و الگوبرداری از نمادهای رایج کتاب درسی تغییراتی در روش برنامه دادند به‌طوری‌که تنها از دو نماد i و j استفاده می‌شد. در این زمان مسئول الکترونیک، روپاد را جوری تغییر داد که اگر در هر مرحله مقدار حرکت راستای شمالی-جنوبی و یا شرقی-غربی مشخص می‌شد، روپاد دستور را اجرا کند. همزمان برنامه‌نویس هم دست به‌کار شد. او برنامه را جوری تغییر داد که دستورات به‌صورت رشته‌ای وارد شوند و هر بار دستورات بین دو پُرانتز همزمان به موتورها ارسال شود. در این حالت روپاد مثلاً با دریافت دستور

$$(3i - j)(2i + 7j)(-4j - 5i)$$

ابتدا همزمان سه واحد به سمت شرق و یک واحد به سمت جنوب، سپس همزمان دو واحد به سمت شرق و هفت واحد به سمت شمال و در آخر همزمان چهار واحد به سمت جنوب و پنج واحد به سمت غرب می‌رفت.

سپس آنها توانستند با تغییراتی در برنامه و حذف نمادهای « i » و « j » و استفاده از نماد ویرگول ریاضی (یعنی « $,$ ») شکل دستورات را ساده‌تر کنند. در این حالت مثلاً دستور بالا به‌صورت زیر نوشته می‌شد:

$$(3, -1)(2, 7)(-5, -4).$$

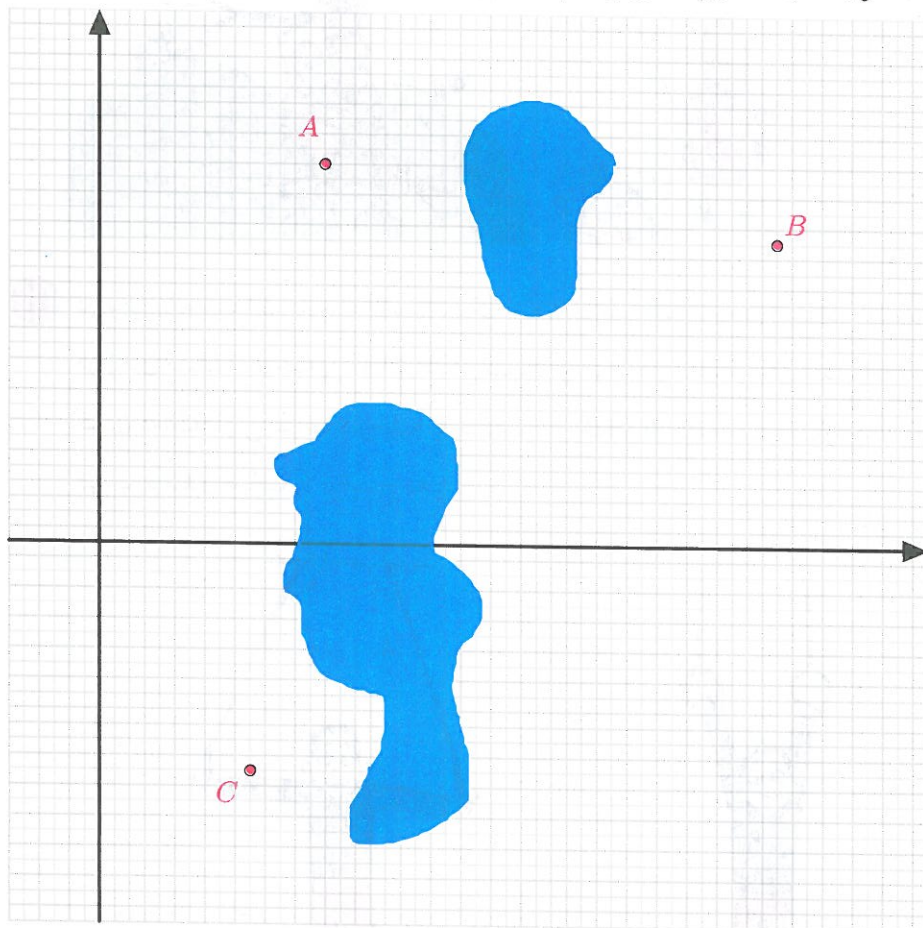
تمرین‌ها

۱. چرا مسیر مستقیم نشان داده شده در صفحهٔ قبل کوتاه‌ترین مسیر ممکن است؟

• بردار و مختصات •

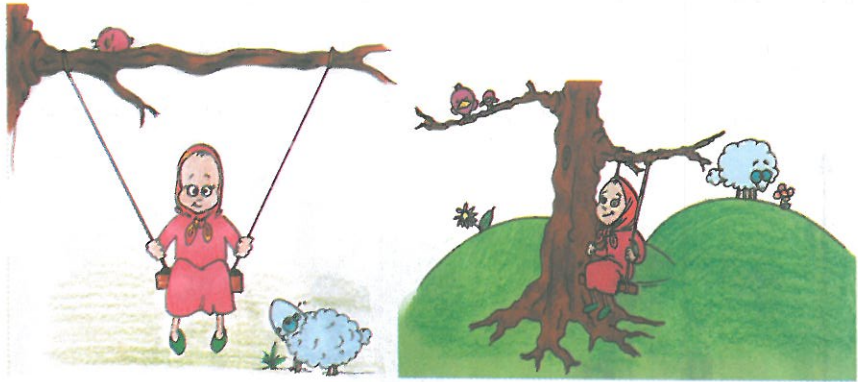
۲. اگر روپاد در نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ باشد و دستور $(-5, 2)(2, -8)(-3, 9)(4, 5)$ را اجرا کنیم، روپاد در چه نقطه‌ای متوقف می‌شود؟

۳. اگر پهناي روپاد ۲۰ سانتی‌متر باشد و هر یک از دو دستور $(1, 0)$ و $(0, 1)$ بتوانند روپاد را تنها یک میلی‌متر حرکت دهند، بر روی شکل مسیری پیشنهاد دهید که مرکز روپاد را که در ابتدا روی مبدأ مختصات است، به ترتیب به نقاط A ، B و C برساند. توجه کنید که روپاد نمی‌تواند به ناحیه‌های تیره‌رنگ درون شکل وارد شود.

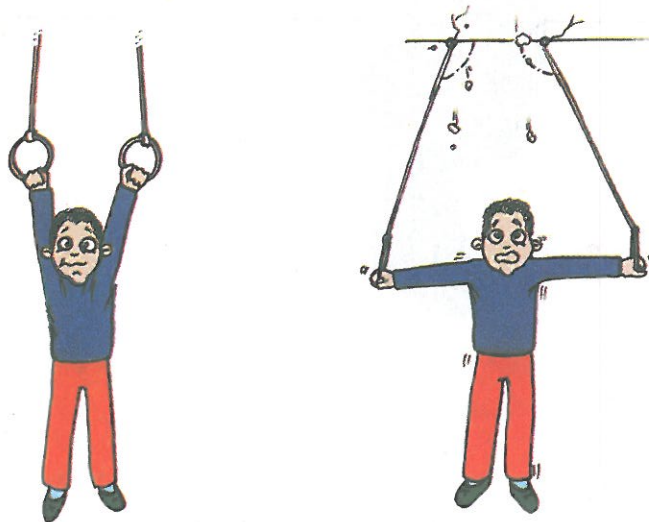


کاربردهایی از بردارها

۱. پدر دریا می‌خواهد تابی برای او درست کند. او شاخه قطوری را انتخاب کرده است. کدامیک از دو حالت داده شده برای دریا تاب ایمن‌تری محسوب می‌شود؟



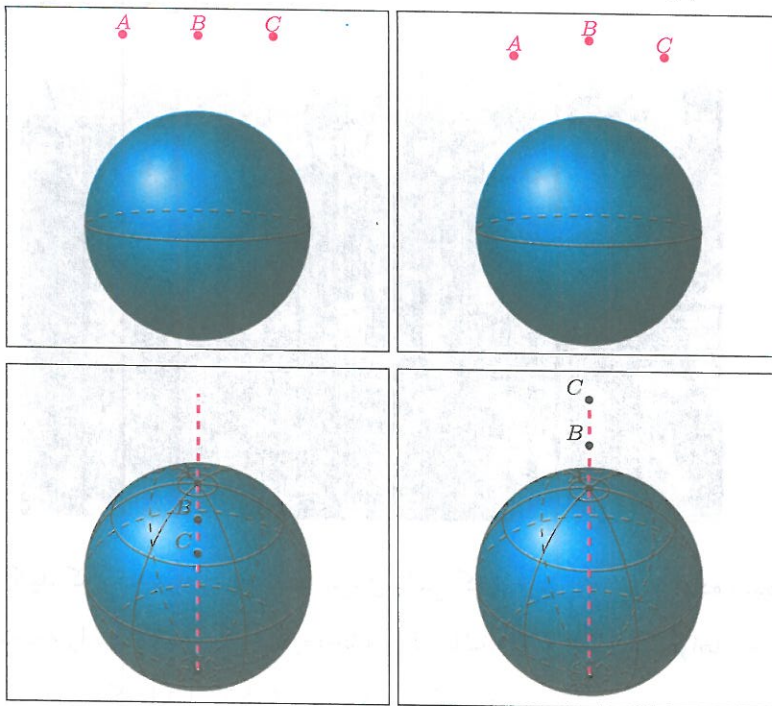
۲. در یکی از مسابقات دارحلقه ژیمناستیک از طناب غیر استاندارد استفاده شده بود. در زمان مسابقه، نوجوانی مطابق شکل سمت چپ از دارحلقه آویزان شده، اما با باز کردن دست‌هایش طناب دارحلقه پاره شد و ورزشکار از ادامه مسابقه بازماند. علت فنی پاره شدن طناب را توضیح دهید.



۳. الف) با جستجوی اینترنتی توصیفی از قانون جاذبه در علم نیوتن را بخوانید.

ب) با جستجوی اینترنتی معنی وزن اجسام را بخوانید.

ج) اگر کره‌های زیر، بیانگر کره زمین باشند، در هر یک از حالت‌های زیر تعیین کنید وزن یک جسم مشخص به ترتیب در کدام یک از نقاط A ، B یا C بیشتر است؟ چرا؟



۴. پروژه. صدها سال پیش، اگر یک کشتی بادبانی می‌خواست به سمت ساحل حرکت کند، حتی اگر باد در جهت مخالف مسیر کشتی می‌وزید، بازهم ناخدای کشتی طوری آن را هدایت می‌کرد که کشتی ساحل برسد! این نوع کشتی‌ها فقط در صورتی نمی‌توانستند حرکت کنند که باد نوزد! حرکت کشتی‌های بادبانی را با استفاده از مفاهیم بردارها توجیه کنید.

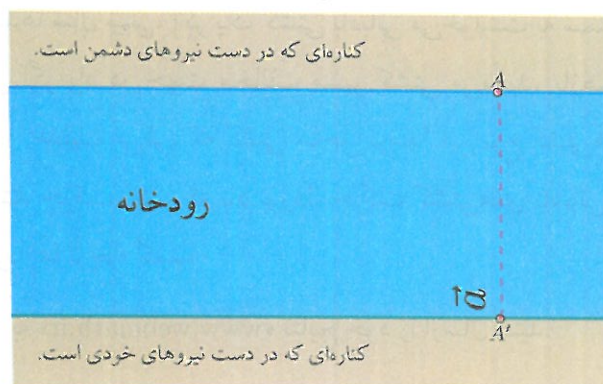
با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

بردار، رودخانه و غواص

مسائل این بخش یادبودی از شهدای غواص جنگ هشت ساله ایران است که در آن به کاربردی از بردارها می‌پردازد. در جنگ گاهی نیاز بود که غواص‌های خط‌شکن در تاریکی شب و سکوت، با شنا کردن در عرض رودخانه‌ای خروشان، خود را به نقاط معینی از کناره رودی که در تصرف دشمن است، برسانند.



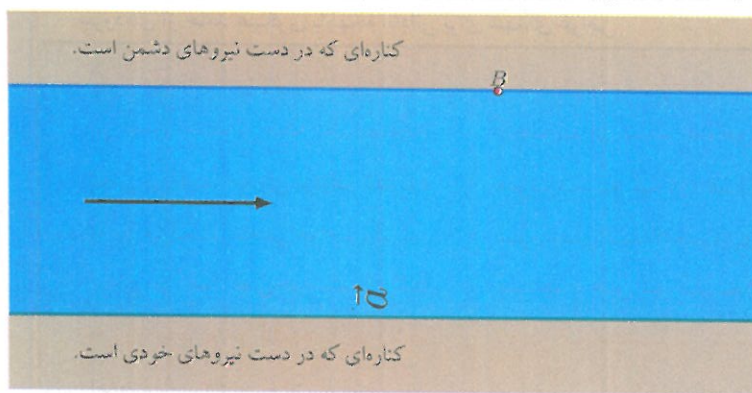
فرض کنید که یک غواص بتواند با نیروی ثابتی که با بردار $\vec{a}$ نشان داده شده است، عرض رودخانه را شنا کند. اگر آب رودخانه را کد باشد (!) و غواص بخواهد به نقطه A برسد، واضح است که باید از نقطه A' شروع به حرکت کند.



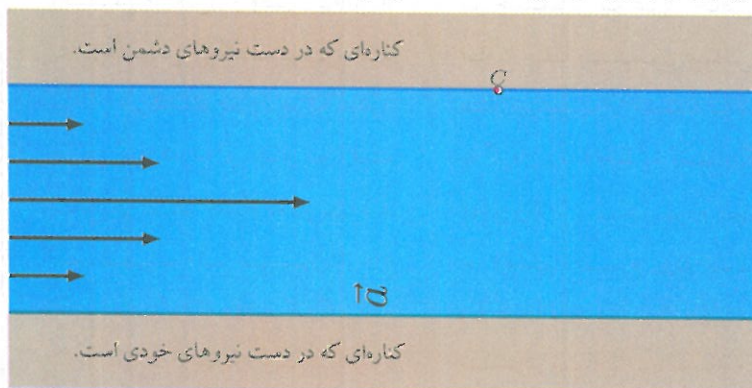
• بردار و مختصات •

با وجود حل این مسئله، حلّ چنین مسائلی در زندگی واقعی بی‌ارزش است (!) زیرا آب رودخانه همیشه در جریان است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که رودخانه نیرویی مثل $\vec{b}$ (که در شکل با جهت افقی نشان داده شده است) را به غواص وارد می‌کند.

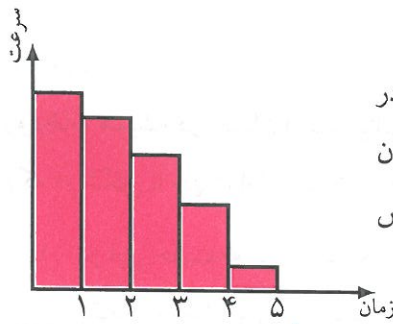
۱. در این حالت تعیین کنید که برای رسیدن به نقطه B غواص باید از کدام نقطه کناره مقابل رودخانه شروع به شنا کردن کند؟



حتی مسئله اخیر هم کمی غیر واقعی است، زیرا در رودخانه‌ها هر چه از کناره‌ها به وسط رودخانه نزدیک شویم سرعت حرکت آب بیشتر می‌شود؛ بنابراین مثلاً می‌توان فرض کرد که بردارهای نیروی وارد بر غواص در امتداد عرض رودخانه به صورت زیر باشند.



۲. در این حالت برای رسیدن به نقطه C ، غواص شای خود را باید از کدام نقطه آغاز کند؟



در واقع در دنیای واقعی، قدرت بدنی غواص در طول مسیر رفته رفته کم می شود. بنابراین می توان فرض کرد مثلاً نمودار مقدار سرعت غواص به صورت روبه رو است.

سروده ای از حامد عسکری با لهجه آبادانی برای شهدای غواص

رو بازوش دس کشید مثل همیشه	ننهش می گفت بُواش قناده شو دید
گیمونم ای پسر غواص میشه	می گفت دستاش مته بال نهنگه
می ترسیدم که دور شه از کنارم	ننهش می گفت: همهش نزدیک شط بود
پرُم سی لیلا مرواری بیارم	به مو می گفت: ننه می خوام بزرگ شُم
میدیدم هی تو قلبم التهابه	ننهش می گفت نمی خواستم بره شط
نفس مو بیشتر از جاسم تو آبه	یه روز اومد به مو گفت: پِل پرُم شط
مته خرچنگ افتادن تو کارون	زد و نامردای بعضی رسیدن
تموم شهر شد غرقابه خون	کهورا سوختن، نخلا شکستن
پسین بود؟ صبح بود؟ یادم نمیاد	ننهش می گفت روزی که داشت می رفت
دفاع از شط شناسنامه نمی خواد	مو گفتم: بچه ای... لیخند زد گفت:
تو چشماش یه غرور خاص بوده	رفیقاش میگن: از وقتی که اومد
ماها هف پشتمون غواص بوده	به فرماندهش می گفته پِل پرُم شط
مته مرغابیای خسته برگشت	ننهش می گفت جیوون برگ سیدرُم
یه گردان زد به خط یه دسته برگشت	شبِی که کربلای چار لو رفت
دوای زخم نمک سودم نیومد	ننهش می گفت: چشم به در سیا شد
جیوونم دلبرُم رو دُم نیومد	مسلمونا دُلم می سوزه از داغ
یه خنده رو لب باباش نیومد	عشیره می گن از وقتی که گم شد
شبای ساحلو دقام می زد	تا از موجا جنازه پس بگیره
دوباره شهر غرق یاس می شه	یه گردان اومده با دست بسته
مو گفتم ای پسر غواص می شه	ننهش بندا رو وامی کرد باباش گفت:

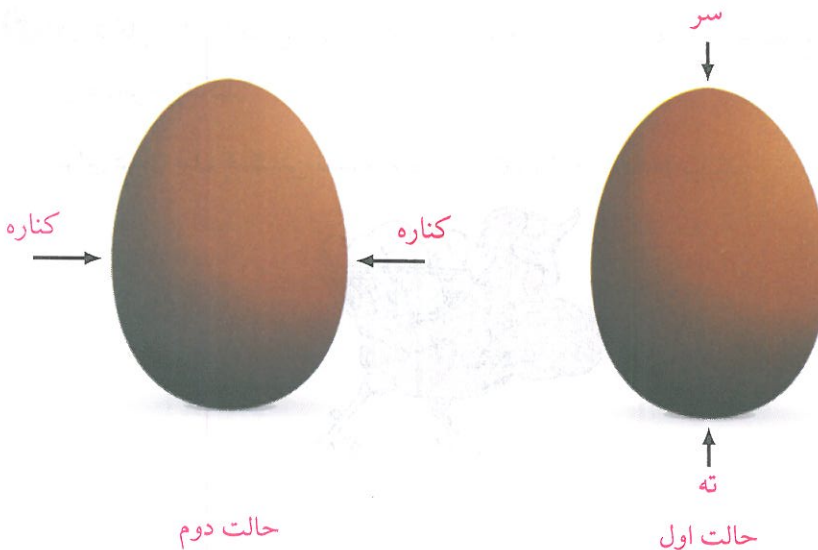
۳. اکنون برای رسیدن به نقطه C ، غواص باید چه مکانی را برای شروع شنا انتخاب کند؟

پروژه. با مقایسهٔ جواب چهار مسئلهٔ اخیر مشاهده می‌کنید که چقدر استفاده از داده‌های دنیای واقعی و به کار بستن دانش ریاضی می‌تواند خطرناک باشد. به نظر شما چگونه می‌توان این مسئله را در دنیای واقعی بهتر مدل کرد؟
با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

ریاضیات تخم مرغی

می‌خواهیم با کمک تعدادی تخم مرغ شکسته شده آزمایشی انجام دهیم. در کنار خود یک کاسهٔ تمیز آماده کنید تا تخم مرغ شکسته را در آن بریزید و سپس تحت نظارت والدین خود با آن یک نیمروی خوشمزه درست کنید.

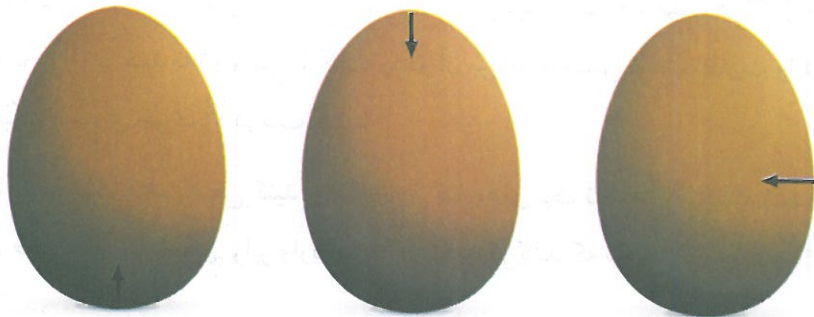
با کمک یک قاشق سعی کنید به سر، ته و کناره‌های یک تخم مرغ شکسته نشده و بدون ترک، ضربه‌هایی با نیروی برابر وارد کنید. مشاهده می‌کنید که تخم مرغ از کناره‌ها راحت‌تر می‌شکند.



۱. با کمک خط‌کش مدرج ضخامت پوسته تخم مرغ را در سر، ته و کناره‌ها اندازه بگیرید. آیا ضخامت پوسته تخم مرغ در سه قسمت به دست آمده متفاوت است؟

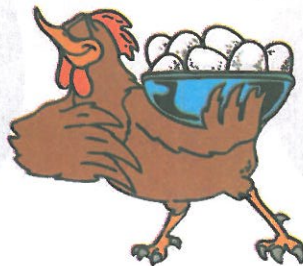
برای اینکه به علت تفاوت آسانی و سختی شکستن تخم مرغ در دو حالت گفته شده پی ببرید، از روش هوشمندانه‌ای استفاده می‌کنیم. فرض کنید پوسته تخم مرغ از قطعات ریز به هم چسبیده‌ای ساخته شده است. این قطعات می‌تواند آن قدر ریز باشد که حتی با چشم هم دیده نشوند. هر قطعه می‌تواند (بخشی از) نیروی وارد شده به خود را به قطعه‌های کناری‌اش منتقل کند.

۲. در شکل‌های زیر، راستای تقریبی تجزیه بردار نیروی وارد بر کناره، سر و ته پوسته تخم مرغ را رسم کنید.



۳. در شکل بالا، با تجزیه بردارهای نیرو، توضیح دهید که چرا تخم مرغ از کناره‌ها راحت‌تر می‌شکند.

برای دیدن فیلم شکستن تخم مرغ به «www.webmath.ir» بیایید.



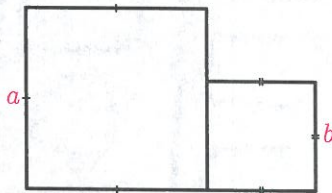


مثلث

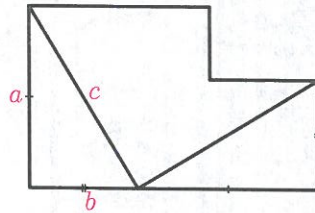
یکی از کتیبه‌های کشف‌شده از قدیمی‌ترین تمدن جهان، در کنار صندل جیرفت در استان کرمان، نشان می‌دهد که بشر از حدود ۵۰۰۰ سال پیش با تصاویر هندسی ساده، مربع، مثلث و دایره به‌خوبی آشنا بوده است.

رابطه فیثاغورس

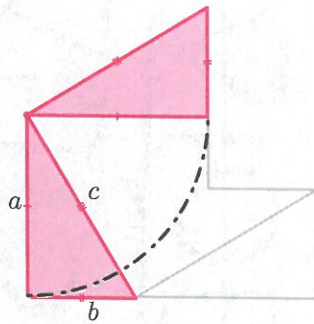
۱. شکل‌های زیر مراحل یکی از اثبات‌های قضیه فیثاغورس را نشان می‌دهد. با توجه به شکل‌ها، اثبات را بنویسید.



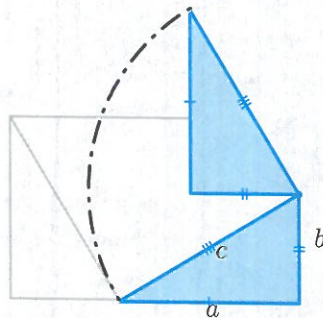
شکل ۱



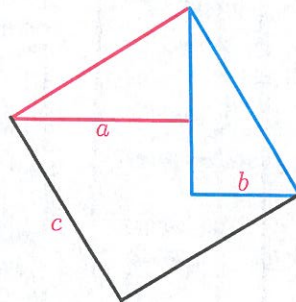
شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴

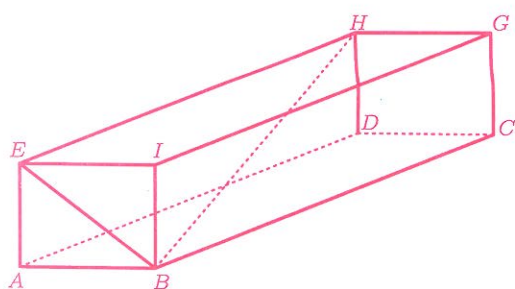


شکل ۵

۲. پروژه. روی وب‌گاه «www.webmath.ir» اثبات‌های متعددی از رابطه فیثاغورس قرار داده شده است. این اثبات‌ها را بررسی کنید و مشخص کنید کدام یک از آنها مشابه یکدیگرند؟

۳. شخصی ۱ کیلومتر به سمت شمال، ۲ کیلومتر به سمت شرق، ۳ کیلومتر به سمت شمال و ۴ کیلومتر به سمت شرق حرکت می‌کند. او از نقطه شروع چه فاصله‌ای دارد؟

۴. در مکعب مستطیل زیر، $AE = 3$ ، $AB = 4$ و $BC = 12$. محیط مثلث BED چقدر است؟



۵. نقاط $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $E = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ را روی کاغذ شطرنجی نشان دهید. سپس ثابت کنید زاویه‌های $\widehat{ABC}$ و $\widehat{CDE}$ برابرند.

۶. محیط مثلث ABC به مختصات رأس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

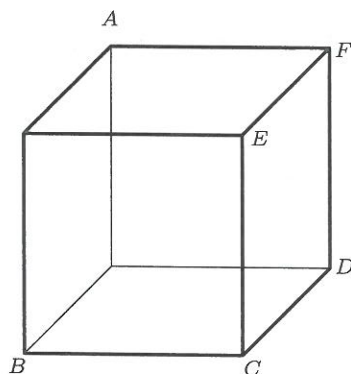
۷. الف) ثابت کنید اگر m و n دو عدد طبیعی باشند و $m > n$ ، آنگاه $m^2 + n^2$ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که اضلاع آن $2mn$ و $m^2 - n^2$ هستند.

ب) با استفاده از روش «الف» شش مثلث قائم‌الزاویه غیر هم‌نهشت با طول اضلاع طبیعی بسازید.

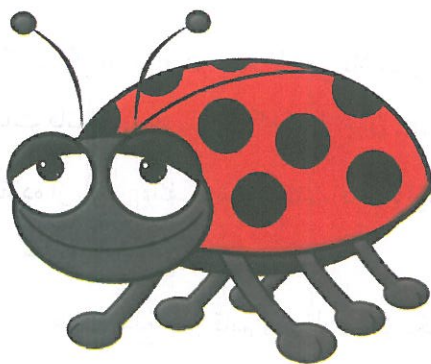
ج) اگر p و q طول ضلع‌های قائم و r طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه باشد، نشان دهید برای هر عدد طبیعی k ، اعداد kp ، kq و kr طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

د) با استفاده از روش «ج» شش مثلث غیر هم‌نهشت (متفاوت از مثلث‌های قسمت «ب») بسازید.

۸. در مکعب زیر، چند مثلث متساوی الاضلاع می توان ساخت به طوری که رأس های آن A, B, C, D, E, F یا باشند؟ همه این مثلث ها را نام ببرید.



۹. یک کفش دوزک درون یک اتاق مکعبی شکل به طول یال ۱، حرکت می کند. او از یک کنج اتاق شروع به حرکت می کند و تا کنج دیگری که در هیچ وجهی با کنج اول مشترک نیست، از طریق سقف و دیوار می رود. اگر او کوتاه ترین مسیر را پیموده باشد، چه مسافتی را طی کرده است؟



۱۰. در مثلث قائم الزاویه MOQ ، $(\hat{O} = 90^\circ)$ ، نقطه P روی ضلع OQ چنان قرار دارد که $MP = PQ$ و $MO = OP$. اگر $MO = a$ ، آنگاه طول ضلع MQ را بر حسب a به دست آورید.

● مثلث ●

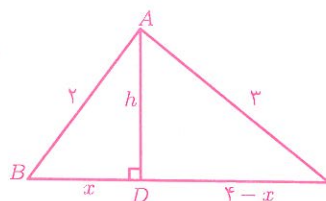
۱۱. نقطه E خارج از مربع $ABCD$ قرار دارد به گونه‌ای که مثلث DCE متساوی‌الاضلاع است. نقطه F درون مربع $ABCD$ قرار دارد به گونه‌ای که مثلث BCF متساوی‌الاضلاع است. اگر $AB = ۱$ ، آنگاه طول EF را به دست آورید.

۱۲. مثلثی با اضلاع ۲، ۳ و ۴ مفروض است. مساحت این مثلث را حساب کنید.

بیژن و خسرو این مسئله را به صورت زیر حل کرده‌اند.

راه حل بیژن:

از رابطه فیثاغورس در مثلث ABD نتیجه می‌شود:



$$h^2 = 2^2 - x^2.$$

از رابطه فیثاغورس در مثلث ACD نتیجه می‌شود:

$$h^2 = 3^2 - (4-x)^2.$$

باتوجه به دو رابطه‌ای که در بالا به دست آمد، داریم:

$$2^2 - x^2 = 3^2 - (4-x)^2 \Rightarrow 4 - x^2 = 9 - (16 - 4x - 4x + x^2)$$

$$\Rightarrow 4 - x^2 = 9 - 16 + 8x - x^2$$

$$\Rightarrow 11 = 8x$$

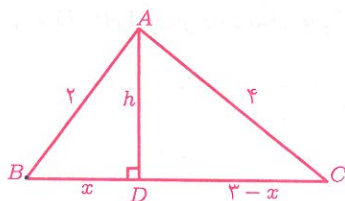
$$\Rightarrow x = \frac{11}{8}.$$

با جایگذاری مقدار x در رابطه فیثاغورس مثلث ABD داریم:

$$h^2 = 4 - \left(\frac{11}{8}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{3\sqrt{15}}{8}.$$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{3\sqrt{15}}{4}$.

راه حل خسرو:



$$\left. \begin{aligned} h^2 &= 2^2 - x^2 \\ h^2 &= 4^2 - (3-x)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2^2 - x^2 = 4^2 - (3-x)^2$$

$$\Rightarrow 4 - x^2 = 16 - (9 - 3x - 3x + x^2)$$

$$\Rightarrow 4 - x^2 = 16 - 9 + 6x - x^2$$

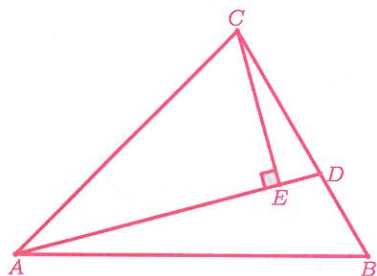
$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

پس $h = \frac{\sqrt{15}}{2}$ و بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{2} \times 4 = \sqrt{15}.$$

درباره دو راه حل بالا بحث کنید و سعی کنید راه حل نادرست را اصلاح کنید.

۱۳. در شکل زیر، AD بر CE عمود است. اگر $AE = \sqrt{3}$ ، $BC = 3$ ، $AC = \sqrt{6}$ ، $\hat{ADB} = 120^\circ$ و $DE = 1$ را به دست آورید.



۱۲. پروژه. عدد ۱۰ را می‌توان به صورت مجموع مربعات دو عدد طبیعی نوشت:

$$10 = 1^2 + 3^2.$$

عدد ۷ را می‌توان به صورت تفاضل مربع دو عدد طبیعی نوشت:

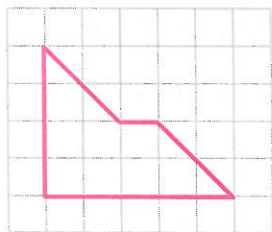
$$7 = 4^2 - 3^2.$$

(الف) چه اعدادی را می‌توان به صورت مجموع مربعات دو عدد طبیعی نوشت؟

(ب) چه اعدادی را می‌توان به صورت تفاضل مربع دو عدد طبیعی نوشت؟

هم‌نهشتی

۱. هر یک از شکل‌های زیر را به دو قسمت هم‌نهشت تقسیم کنید. در هر مورد مشخص کنید چه تبدیل‌هایی چندضلعی‌های هم‌نهشت را به یکدیگر تبدیل می‌کنند.



۲. یک مربع رسم کنید و آن را به دو پنج‌ضلعی هم‌نهشت تقسیم کنید. سپس مشخص کنید چه تبدیل‌هایی چندضلعی‌های هم‌نهشت را به یکدیگر تبدیل می‌کنند.

سعی کنید برای این مسئله بیش از یک راه‌حل بیابید.

۳. یک مثلث کاغذی بسازید. مثلث را با قیچی به دو مثلث تقسیم کنید. آیا می‌توانید با

کنارهم قرار دادن این دو مثلث، مثلثی بسازید که با مثلث اولیه هم‌نهشت نباشد؟

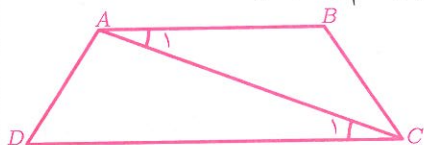
۴. در مثلث ABC می‌دانیم طول AB ، AC و BC سه عدد متفاوت هستند. ثابت کنید

هیچ خطی مانند AM وجود ندارد که دو مثلث ABM و ACM هم‌نهشت باشند.

۸. اگر دو ضلع و زاویه غیر بین آن دو ضلع از یک مثلث با دو ضلع و زاویه غیر بین آن دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر برابر باشند، آیا این دو مثلث همواره هم‌نهشت‌اند؟ شقایق و افرا این مسئله را این‌گونه حل کرده‌اند:

راه‌حل شقایق:

با یک مثال نشان می‌دهیم این دو مثلث همواره هم‌نهشت نیستند.



در دوزنقه $ABCD$ ، $AB \parallel CD$ موازی است و $AD = BC$.

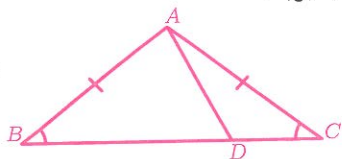
چون $AB \parallel CD$ و AC مورب است پس $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$. پس دو ضلع و زاویه غیر بین از مثلث ABC با دو ضلع و زاویه غیر بین از مثلث ADC نظیر به نظیر برابرند:

$$AC = AC, \quad AD = BC, \quad \hat{A}_1 = \hat{C}_1.$$

اما در دوزنقه ضلع‌های موازی، مساوی نیستند ($AB \neq CD$). بنابراین دو مثلث ABC و ADC هم‌نهشت نیستند.

راه‌حل افرا:

در شکل زیر، دو مثلث ABD و ACD را در نظر بگیرید.



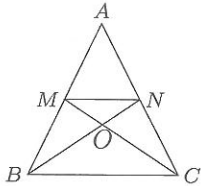
$$AB = AC, \quad \hat{B} = \hat{C}, \quad AD = AD \quad (*)$$

اگر نقطه D وسط ضلع BC نباشد، آنگاه $BD \neq CD$. پس دو مثلث ABD و ACD هم‌نهشت نیستند؛ در حالی که بنابه روابط (*) دو ضلع و زاویه غیر بین از مثلث ABD با دو ضلع و زاویه غیر بین از مثلث ACD نظیر به نظیر برابرند.

الف) درباره راه‌حل شقایق و راه‌حل افرا بحث کنید.

ب) راه‌حل دیگری برای این مسئله ارائه دهید.

● مثلث ●



۹. قاعده دو مثلث متساوی الساقین AMN و ABC

به ترتیب MN و BC است. ثابت کنید:

الف) $\triangle ANB \cong \triangle AMC$

ب) $\triangle OCN \cong \triangle OBM$

۱۰. ثابت کنید در هر مثلث متساوی الساقین،

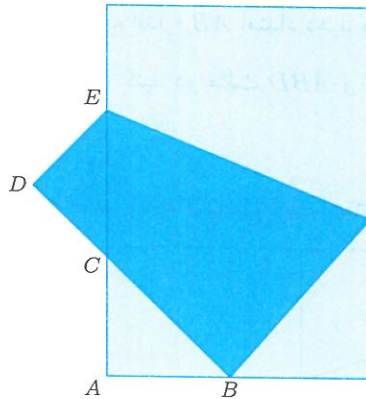
الف) نیم سازهای پای ساق با هم برابرند.

ب) میانههای وارد بر ساقها با هم برابرند.

۱۱. یک کاغذ مستطیلی به عرض ۲۰ سانتی متر را مانند شکل زیر طوری تا کرده ایم که

یکی از رأسها روی وسط ضلع دیگر افتاده است. حال دو مثلث ABC و CDE

هم نهشت شده اند. طول این مستطیل را بیابید.



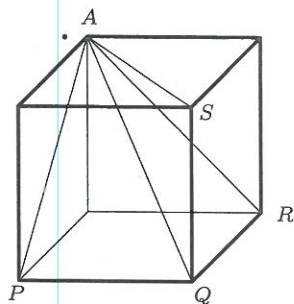
۱۲. ثابت کنید اگر یکی از میانههای مثلثی، نیم سازه نیز باشد، آنگاه این مثلث متساوی الساقین است.

راهنمایی: میانه را به اندازه خودش ادامه دهید.

۱۳. نقطه M وسط ضلع AC از مثلث ABC است. نقطه D چنان روی ضلع BC قرار

دارد که $\widehat{BMA} = \widehat{DMC}$ و $CD + DM = BM$. ثابت کنید $\widehat{ACB} + \widehat{ABM} = \widehat{BAC}$.

۱۴. در مکعب زیر، در بین مقدار زاویه‌های PAQ ، PAR ، PAS ، QAR ، QAS و RAS چند مقدار مختلف وجود دارد؟

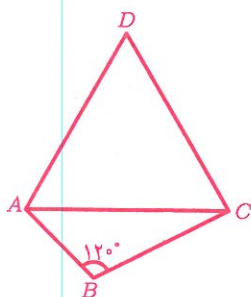


۱۵. در شکل روبه‌رو، $\hat{B} = 120^\circ$ و مثلث ACD

متساوی‌الاضلاع است. ثابت کنید:

الف) پاره‌خط BD نیم‌ساز زاویه B است.

ب) $BD = AB + BC$.

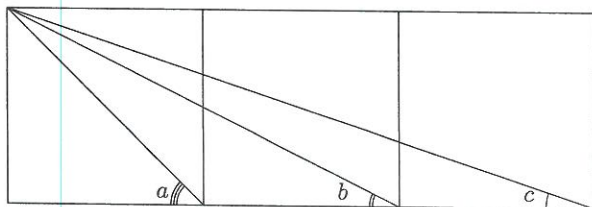


راهنمایی: BC را از طرف B به اندازه AB امتداد دهید و نقطه

انتها را E بنامید. سپس ثابت کنید دو مثلث ABD و AEC

هم‌نهشت‌اند.

۱۶. شکل زیر از سه مربع به ضلع واحد تشکیل شده است. مطلوب است $a + b + c$.



۱۷. یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به

ب) سه مثلث هم‌نهشت

د) شش مثلث هم‌نهشت

الف) دو مثلث هم‌نهشت

ج) چهار مثلث هم‌نهشت

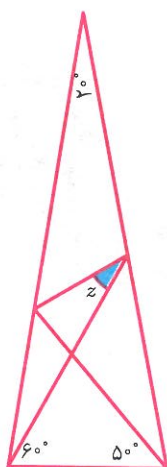
تقسیم کنید.

مثلت

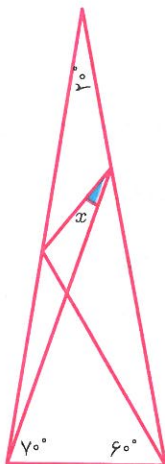
۱۸. چهار نقطه بیابید که اگر فاصله هر دو تا از آنها را حساب کنیم، حداکثر دو عدد مختلف به دست آید.

برای این مسئله حداقل سه جواب بیابید.

۱۹. در زیر دو مثلث متساوی الساقین می بینید که زاویه رأس آنها 20° درجه است. مقدارهای y و z را بیابید.



۲۰. مثلث زیر، یک مثلث متساوی الساقین است. مقدار x را بیابید.



هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه

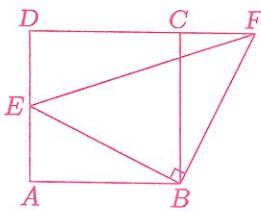
۱. یک سرباز کنار رودخانه ایستاده و می‌خواهد بداند عرض رودخانه چند قدم است. او شنیده است که بدون اینکه وارد آب شود می‌تواند عرض رودخانه را با استفاده از کلاهش به‌طور تقریبی اندازه بگیرد. این سرباز چگونه بفهمد عرض رودخانه چقدر است؟



۲. با ذکر دلیل مشخص کنید که کدامیک از عبارتهای زیر همواره درست است و کدامیک همواره درست نیست.
- الف) اگر دو ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه، با دوضلع از مثلث قائم‌الزاویه دیگر برابر باشد، این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.
- ب) اگر دو ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه، با دوضلع از مثلث قائم‌الزاویه دیگر نظیر به نظیر برابر باشد، این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.
۳. پاره‌خط‌های AB ، CD و EF در نقطه O هم‌رس‌اند. اگر OE و OF به‌ترتیب ارتفاع مثلث‌های AOC و BOD باشند، آیا می‌توان ثابت کرد $\triangle BOF \cong \triangle AOE$ ؟ اگر پاسخ خیر است، چه شرایطی باید به مسئله اضافه کنیم تا بتوان هم‌نهشتی این دو مثلث را ثابت کرد.
۴. در مربع $ABCD$ ، نقطه‌های E و F به‌ترتیب روی اضلاع BC و AB قرار دارند به‌طوری‌که $AE = FC$. اگر $\angle BAE = 15^\circ$ ، آنگاه زاویه $\angle CFE$ چند درجه است؟
۵. ثابت کنید مثلثی که دو ارتفاع برابر دارد متساوی‌الساقین است.

۶. ارتفاع AH ، نیم‌ساز BD و میانه CM از مثلث ABC در نقطه G هم‌رس‌اند. اگر $AG = BG$ ، آنگاه ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۷. در شکل زیر، $ABCD$ مربع است. نقطه E روی AD و F روی امتداد DC قرار دارد به‌طوری‌که EB بر FB عمود است. اگر $AB = ۱۶$ و $BE \times BF = ۴۰۰$ ، آنگاه طول CF چقدر است؟



۸. این دو چه تفاوتی باهم دارند؟ هر یک را کامل کنید و درباره آنها با دوستانتان گفت‌وگو کنید.

اول: خط d عمود منصف پاره‌خط AB است و AB را در نقطه H قطع کرده است. نقطه دلخواه M را روی خط d انتخاب می‌کنیم. دو مثلث AMH و BMH هم‌نهشت‌اند (چرا؟). پس $AM = BM$.	دوم: فاصله M از دو سر پاره‌خط AB یکسان است؛ یعنی $AM = BM$. ارتفاع MH از مثلث AMB را رسم می‌کنیم. دو مثلث AMH و BMH هم‌نهشت‌اند (چرا؟).
---	--

نتیجه: هر نقطه دلخواه روی عمود منصف یک پاره‌خط

و برعکس اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط

۹. در شکل، $XA = YA$ و $XB = YB$.

کدام یک از جمله‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.

الف) AB روی عمود منصف XY است.

ب) XY روی عمود منصف AB است.

$X \bullet$

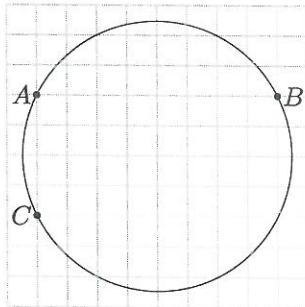
$A \bullet \text{-----} \bullet B$

$Y \bullet$

۱۰. پاره خط AE در نقطه R پاره خط BK را قطع می کند به طوری که $AB = AK$.

آیا می توان ثابت کرد $AE \perp BK$ ؟ اگر پاسخ خیر است، چه شرایطی باید به مسئله اضافه کنیم تا بتوان ثابت کرد $AE \perp BK$ ؟

۱۱. در شکل روبه رو،



الف) داخل دایره، نقاطی را مشخص کنید

که از A و B به یک فاصله اند.

ب) داخل دایره، نقاطی را مشخص کنید

که از A و C به یک فاصله اند.

ج) مرکز دایره کدام نقطه است؟

۱۲. دایره ای به مرکز P و دایره ای به مرکز Q یکدیگر را در دو نقطه X و Y قطع کرده اند.

الف) ثابت کنید PQ عمود منصف پاره خط XY است.

ب) آیا می توان گفت XY عمود منصف PQ است؟ اگر پاسخ خیر است، چه

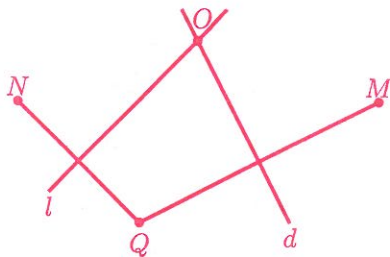
شرایطی به مسئله اضافه کنیم تا XY نیز عمود منصف PQ باشد؟

۱۳. در شکل زیر، خطوط d و ℓ عمود منصف پاره خط های QM و QN هستند.

الف) همه مثلث های متساوی الساقینی که با رأس های M ، Q ، N و O ساخته می شوند

را با ذکر دلیل نام ببرید.

ب) چرا عمود منصف MN از نقطه O می گذرد؟



• مثلث •

۱۴. در مثلث ABC ، $AB = AC$ و $\hat{A} = 100^\circ$. عمود منصف‌های اضلاع AB و AC

ضلع BC را در نقطه‌های E و F قطع می‌کنند. زاویه EAF چند درجه است؟

۱۵. این دو چه تفاوتی باهم دارند؟ هر یک را کامل کنید و درباره آن با دوستانتان گفت‌وگو کنید.

اول: نقطه دلخواه D را روی نیم‌ساز زاویه A انتخاب می‌کنیم. از D دو عمود DH و DK را بر ضلع‌های زاویه A رسم می‌کنیم. دو مثلث AHD و AKD هم‌نهشت‌اند (چرا؟). بنابراین $DH = DK$.	دوم: نقطه M از دو ضلع زاویه A فاصله یکسان دارد؛ یعنی اگر دو عمود MH و MK را بر ضلع‌های زاویه A وارد کنیم، آنگاه $MH = MK$. در این صورت دو مثلث AMH و AMK هم‌نهشت‌اند (چرا؟). پس AM نیم‌ساز زاویه HAK است.
--	--

نتیجه: هر نقطه دلخواه روی نیم‌ساز یک زاویه

و برعکس نقطه‌ای که از دو ضلع یک زاویه

۱۶. در مستطیل $ABCD$ ، نقطه M وسط ضلع CD قرار دارد. نقطه K روی ضلع BC

چنان قرار دارد که KM نیم‌ساز زاویه AKC است. ثابت کنید AM نیم‌ساز زاویه KAD است.

۱۷. در چهارضلعی محدب $ABCD$ قطر AC نیم‌ساز زاویه A است. اگر $AB = 4$ ،

$AD = 5$ و مساحت مثلث ABC برابر ۱۲ باشد، آنگاه مساحت چهارضلعی $ABCD$ چقدر است؟

۱۸. الف) ثابت کنید در دو مثلث هم‌نهشت ارتفاع‌های نظیر برابرند.

ب) دو پاره‌خط برابر AB و CD یکدیگر را در نقطه M قطع کرده‌اند. عمود منصف‌های

دو پاره‌خط AD و BC یکدیگر را در نقطه N قطع کرده‌اند. اگر نقطه N درون

زاویه AMC باشد، آنگاه ثابت کنید MN نیم‌ساز زاویه AMC است.

۱۹. خط ℓ ضلع‌های AB و BC از مستطیل $ABCD$ را قطع کرده است. اگر فاصله نقطه‌های A ، B و C از خط ℓ به ترتیب ۴، ۵ و ۷ سانتی متر باشد، آنگاه فاصله نقطه D از خط ℓ چقدر است؟

تخیلات یک دانش‌آموز در کلاس ریاضی (۱)

نگاهم رو دوخته بودم به چهره آقای آشتیانی ولی به پویانمایی «ظاهر و باطن» (Inside Out) فکر می‌کردم. از خودم پرسیدم: آیا شخصیتِ شادِ درونِ ذهنِ آقای آشتیانی زنده است؟ اگر زنده است، پس چرا ما خندیدن آقای آشتیانی را ندیده‌ایم؟ شاید شخصیتِ شادِ ذهنِ آقای آشتیانی در اعماقِ ذهنِ او گم شده باشد. ممکن است شادی و خشمِ ذهنِ او باهم دعوایشان شده باشد! شاید شخصیتِ خشم، شادیِ ذهنِ او را زندانی کرده باشد! شخصیتِ خشمِ ذهنِ آقای آشتیانی چه شکلی است؟ چقدر شبیه خود آقای آشتیانی است؟ لحظه‌ای چهره‌ی شخصیتِ خشمِ آقای آشتیانی را تصور کردم، قیافه‌ی عجیبی در ذهنم ساخته شد! از این تصور خنده‌ام گرفت؛ خیلی سعی کردم خودم رو کنترل کنم، اما نشد!

آقای آشتیانی با دست راست تسبیحش را از جیبش درآورد و سرش را طوری چرخاند که نگاهش در نگاه من افتاد. او انگشت شستش را پشت دانه‌های تسبیح گذاشت و آنها را فشار داد طوری که تسبیحش به من اشاره می‌کرد، گفت: «به چی می‌خندی؟ کلاس که جای خندیدن نیست؟» می‌دانستم که الان با یک پرسش ریاضی به دام آقای آشتیانی می‌افتم. پرسید: «زود بگو بینم تعداد دانه‌های تسبیح من بیشتر است یا ۴۴؟» سعی کردم دانه‌های تسبیح را بشمارم که آقای آشتیانی گفت: «به چی نگاه می‌کنی؟ می‌خوای دانه‌های تسبیح رو بشماری؟ تسبیح‌ها معمولاً ۱۰۱ دانه دارند.» می‌خواستم ۴۴ را ذهنی حساب کنم، که چند نفر از بچه‌های کلاس دستشان را بالا بردند که جواب بدهند. همین باعث شد تمرکزم به‌هم بریزد و نتوانم محاسبه کنم. آخر سر هم یکی از همین بچه‌ها گفت که ۴۴ می‌شه ۲۵۶. پس ۴۴ از تعداد دانه‌های تسبیح شما بیشتره.

ادامه دارد ... (صفحه ۱۰۱)



توان و جذر



تعداد شاخ و برگ درختان به صورت توانی زیاد
می شوند.

توان

۱. الف) عدد 4^4 را به چه توانی برسانیم که حاصل 8^8 شود؟

ب) عدد 9^9 را به چه توانی برسانیم تا به عدد 27^{12} برسیم؟

۲. حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

الف) $(3^4)^2 \times (5^2)^4 \times 15^4$

ب) $\frac{3^3 \times 8^3 \times 245}{6^3 \times 4^3}$

ج) $\frac{(1/4)^3 \times (0/2)^3 \times 7^3}{(2/8)^6}$

د) $\frac{2^2 \times 48^2 \times 6^3 \times 3^2 \times 8^5}{16^{12}}$

ه) $\frac{38^2 \times 265 \times 11^2}{1312 \times 447 \times 192}$

و) $\frac{3^2 \times 8^4 \times 245}{6^2 \times 4^5}$

ز) $(3^5 + 3^5 + 3^5)(3^{11} + 3^{11} + 3^{11})$

۳. هر یک از اعداد زیر را به صورت تجزیه شده به عوامل اول بنویسید.

الف) $(2^2 \times 3)^4 \times 15^5$

ب) $(18^{19} \times 19^{18})^3 \times 38^6$

ج) $(12^3 \times 14^4)^5 \times (21^2)^3$

۴. در هر یک از تساوی های زیر مقدار x و y را بیابید.

الف) $3^4 = 3 \times 3^x$

ب) $4^3 = 2^3 \times 2^x$

ج) $9^5 = 3^2 \times 81^y$

د) $18^6 = 3^6 \times 2^x \times 6^y$

ه) $245 = 2^x \times 3^y \times 12^3$

و) $12^8 = 3^4 \times x^y$

۵. مقادیر زیر را بیابید.

الف) $33333^3 - 27 \times 11111^3$

ب) $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{200} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{200}$

• توان و جذر •

۶. داخل مربع علامت $\times$ یا $\div$ قرار دهید تا تساوی برقرار شود.

الف) $۶^۲ \square ۱۸^۳ \square ۳^۲ = ۱۸^۵$ ب) $۱۸^۶ \square ۲^۶ \square ۳^۶ = ۲۷^۶$

ج) $۲۴^۴ \square ۲^۶ \square ۲۷ = ۸ \times ۲۴$ د) $۱۸^۵ \square ۳^۲ \square ۹^۳ = ۹^۸$

۷. چهار نفر معادله زیر را حل کردند.

$$۶^۸ = ۳^۴ \times a^b$$

آنها حاصل $a+b$ را مقادیر ۱۶، ۱۴۶، ۱۲۴۶ و ۲۰۷۳۷ اعلام کردند. درستی یا نادرستی هر یک از پاسخ‌ها را بررسی کنید.

۸. اگر m و n دو عدد طبیعی باشند و $m^n = ۲^{۲۰}$ ، آنگاه m و n چه اعدادی می‌توانند باشند؟

۹. در هر یک از عبارت‌های زیر توان عدد ۲ را به‌دست آورید.

الف) $۲^{۳۴}$ ب) $(۲^۳)^۴$ ج) $۲^{۴۳}$ د) $(۲^۴)^۳$

۱۰. می‌دانیم x ، y و z سه عدد متفاوت هستند. اگر این سه عدد ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشند، آنگاه بیشترین و کمترین مقدار x^{y^z} و $(x^y)^z$ را به‌دست آورید.

۱۱. با کمک یک (یا چند) پرانتزگذاری، از عدد داده شده به چند عدد متفاوت می‌توان دست یافت؟

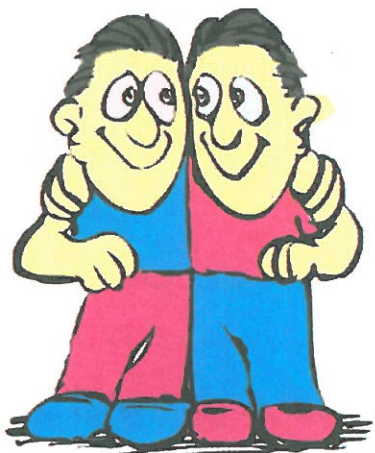
$$۲^{۳۴۵}$$

۱۲. بزرگ‌ترین عدد طبیعی n را بیابید به‌گونه‌ای که:

$$n^{۲۰۰} < ۵^{۳۰۰}.$$

۱۳. در یک مربع، وسط‌های ضلع‌های روبه‌رو را به هم وصل می‌کنیم. در مرحله بعد همین کار را برای هر یک از مربع‌های حاصل انجام می‌دهیم. اگر این کار را شش مرحله انجام دهیم، تعداد کل مربع‌ها چند تا می‌شود؟

اعداد رادیکالی



۱. مجید برای نمایش عدد $\sqrt{7}$ روی محور از تساوی $4^2 = (\sqrt{7})^2 + 3^2$ استفاده کرد. مهرداد برای نمایش عدد $\sqrt{7}$ روی محور اعداد از تساوی $(\sqrt{7})^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2$ استفاده کرد. روش مجید و روش مهرداد را با استفاده از محور اعداد شرح دهید.

۲. هر یک از اعداد زیر را روی محور اعداد نمایش دهید.

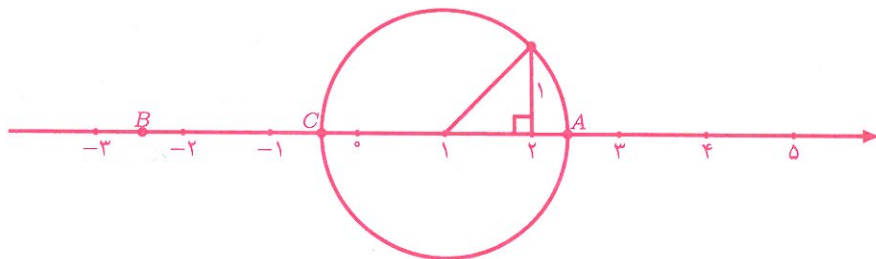
الف) $-2\sqrt{2}$

ب) $7 - 3\sqrt{2}$

ج) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$

د) $-\sqrt{11} + \sqrt{3}$

۳. در شکل زیر، $AB = 3\sqrt{2}$. نقطه‌های B و C چه اعدادی را نشان می‌دهند؟



۴. اگر A و B دو نقطه روی محور اعداد باشند و طول پاره خط AB برابر $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ و

B متناظر با عدد $1 + \sqrt{2}$ باشد، A متناظر با چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۵. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\left(1 + \frac{\sqrt{8} + 2}{1 + \sqrt{2}}\right)^3$$

• توان وجذر •

۶. از نقطه ۲- روی محور اعداد ۳ واحد به طور عمودی بالا رفته ایم تا به نقطه A رسیده ایم. سپس نوک پرگار را روی نقطه ۱ گذاشته ایم و دایره ای رسم کرده ایم که نقطه A می‌گذرد و محور اعداد را در نقطه B قطع می‌کند. نقطه C نقطه ای روی محور اعداد است که با نقطه B به اندازه $2\sqrt{2}$ واحد فاصله دارد. نقطه C متناظر با چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۷. الف) هر جفت از اعداد زیر را مقایسه کنید.

$$\bullet \sqrt{6} + \sqrt{10}, \sqrt{5} + \sqrt{12} \quad \bullet \sqrt{11} + \sqrt{12}, \sqrt{10} + \sqrt{13}$$

ب) فرض کنید a, b, c و d چهار عدد طبیعی باشند به طوری که $a > d$ و $b > c$ و

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{c} + \sqrt{d}) < 0.1.$$

تمام مقادیر ممکن کوچک‌تر از ۳۰ را برای این چهار عدد بیابید.
برای به دست آوردن جواب‌ها، می‌توانید از یکی از نرم‌افزارهای مناسبی که بر روی «www.webmath.ir» معرفی شده است، کمک بگیرید.

تخیلات یک دانش‌آموز در کلاس ریاضی (۲)

آقای آشتیانی گفت: «درسته!» بعد کنار میز معلم رفت، خودنویسش را از جیب پیراهنش درآورد، لیست کلاس را برداشت و داخل آن یادداشتی نوشت. بعد پرسید: «کسی می‌تونه بگه حاصل 4^{4^4} چی می‌شه؟» برای اینکه جبران کنم، سریع قلم و کاغذ برداشتم و شروع کردم به محاسبه! ولی بلافاصله آقای آشتیانی گفت: «لازم نیست دستی حساب کنید. این عدد خیلی بزرگه! با استفاده از جثوجبرا محاسبه اش می‌کنیم.» بعد رایانه کلاس رو روشن کرد و عدد را داخل محیط جثوجبرا نوشت. حاصل عدد خیلی بزرگی بود!

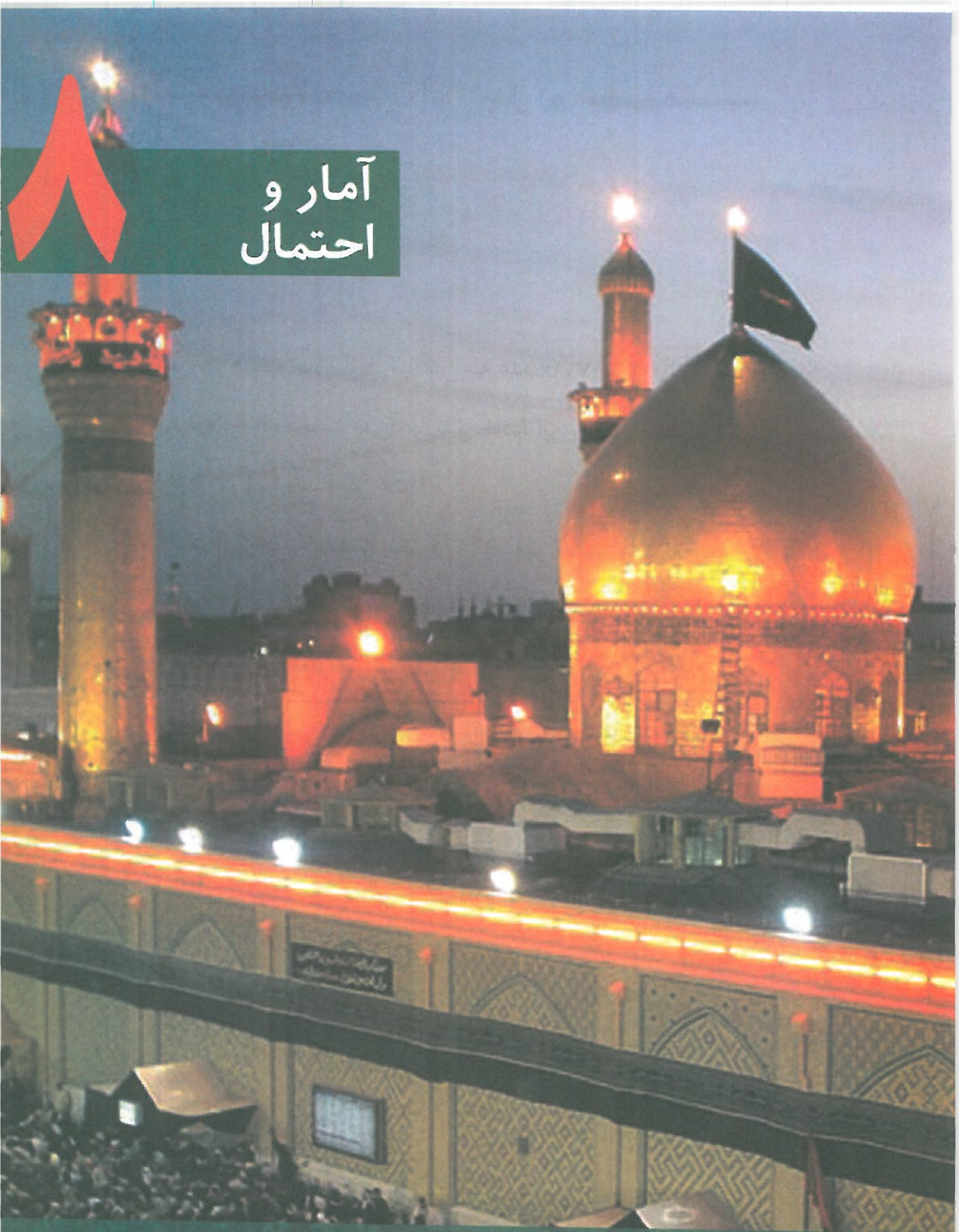
$$4^{4^4} = 134078079299425970995740249982058461274793658205923933$$

$$777235614437217640300735469768018742981669034276900$$

$$31858186486050853753882811946569946433649006084096.$$



آمار و احتمال



راهپیمایی اربعین در سال ۱۳۹۳ بیست میلیون نفر تخمین
زده شده است. به نظر شما این عدد را چگونه به دست
آورده اند؟

گفت و گو

غزاله: فائزه جان! لطفاً میانگین سه عدد ۱۶، ۱۷ و ۱۲ را حساب می‌کنی؟

فائزه: وا! خجالت نمی‌کشی تنبل خانم! این را هم بلد نیستی؟

غزاله: [با لبخند] چی شد؟!

فائزه: خب یک دقیقه صبر کن. کامپیوتر که نیستم! دارم جمع می‌کنم.

غزاله: آفرین! ادامه بده. حتماً بعدش هم می‌خواهی تقسیم کنی؟!

فائزه: خب معلومه. اشکالش چیه؟

غزاله: اشکال که چه عرض کنم! نمی‌خواد خودت را به زحمت بندازی. میانگین ۱۵ است.

فائزه: خب تو که قبلاً حساب کرده بودی برای چی منو به زحمت انداختی؟!

غزاله: من بدون محاسبه جواب دادم؛ یا حداقل می‌شود گفت که محاسباتم خیلی راحت‌تر و خلاقانه‌تر بود.

فائزه: چه جوری؟!

غزاله: مگر در تمرین‌های کتاب یاد نگرفتیم که مجموع فواصل اعداد با میانگین برابر صفر است؟

فائزه: خب بله. حالا چه ربطی دارد؟!

غزاله: حدس زدم که میانگین این سه عدد باید ۱۵ باشد. بعد فاصله میانگین را با سه عدد ۱۶، ۱۷ و ۱۲ حساب کردم:

$$۱۲ - ۱۵ = -۳, \quad ۱۷ - ۱۵ = ۲, \quad ۱۶ - ۱۵ = ۱.$$

• آمار و احتمال •

مجموع سه مقدار حاصل، صفر است ($0 = 1 + 2 + 3 -$). بنابراین حدس من درست بوده است.

فائزه: غزاله جان! روش شما کارآمد نیست. فرض کن من حدس می‌زدم که میانگین این سه عدد $15/5$ است. حدس است دیگر!! آن وقت چه می‌کردی؟

غزاله: به نکته خوبی اشاره کردی دوست جان! تفاضل میانگین حدسی را از سه عدد داده شده حساب کن:

$$12 - 15/5 = -3/5, \quad 17 - 15/5 = 1/5, \quad 16 - 15/5 = 0/5.$$

مجموع سه مقدار به دست آمده را حساب می‌کنیم:

$$-3/5 + 1/5 + 0/5 = -1/5.$$

برای به دست آوردن مقدار واقعی میانگین، مقدار حاصل را بر تعداد تقسیم می‌کنیم: $-1/5 \div 3 = -0/5$. حالا $-0/5$ را با میانگین حدسی جمع می‌زنیم: $15 + (-0/5) = 15/5$.

فائزه: وای غزاله تو یک شعبده‌باز واقعی هستی!

غزاله: فائزه جان! کافی است کمی به عقب برگردی و در مورد مفاهیم اولیه که به نظرت بدیهی و خسته کننده می‌رسد کمی بیشتر فکر کنی. برای مثال، وقتی می‌گوییم میانگین سه عدد $15/5$ است یعنی $15/5 \times 3$ باید مجموع سه عدد باشد.

تمرین. با روش غزاله میانگین هر دسته از اعداد زیر را به دست آورید.

(الف) $159, 163, 157/5, 155, 162$

(ب) $16/5, 20, 19, 15, 16, 17/5$

دسته‌بندی داده‌ها و میانگین

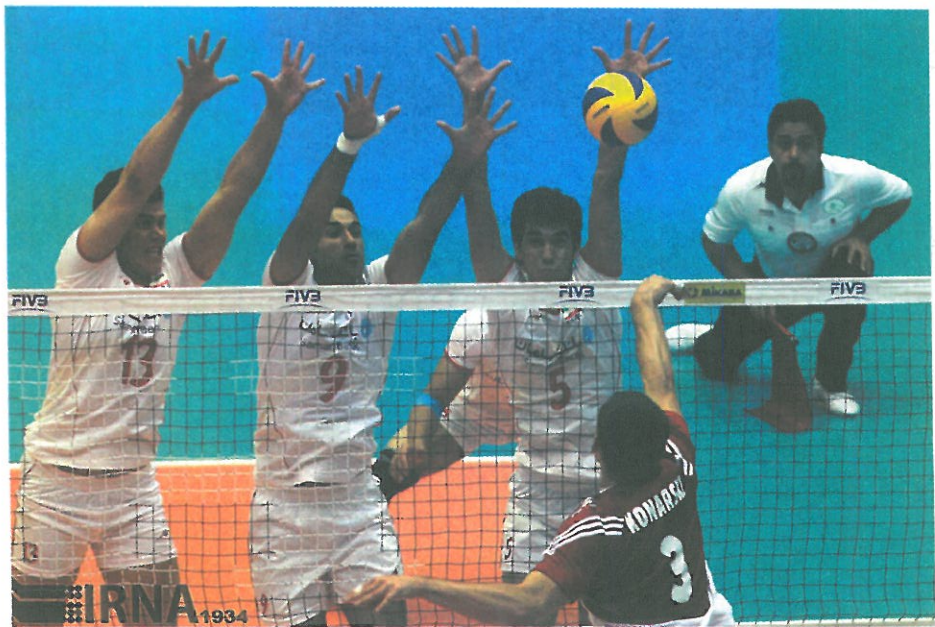
۱. با مراجعه به وبگاه «www.webmath.ir» می‌توانید به اطلاعات مربوط به هر یک از بازیکنان حاضر در لیگ جهانی والیبال دسترسی پیدا کنید.

الف) قد والیبالیست‌هایی که بین ۱۹۵ تا ۲۱۰ است را به پنج دسته مساوی تقسیم کنید و سپس جدول فراوانی مربوط به این پنج دسته را تشکیل دهید.

ب) میانگین قد والیبالیست‌ها در کدام دسته قرار دارد؟

ج) نمودار ستونی مربوطه را رسم کنید. در نمودار ستونی رسم شده، کدام دسته بلندترین ارتفاع را دارد و این چه معنایی دارد؟

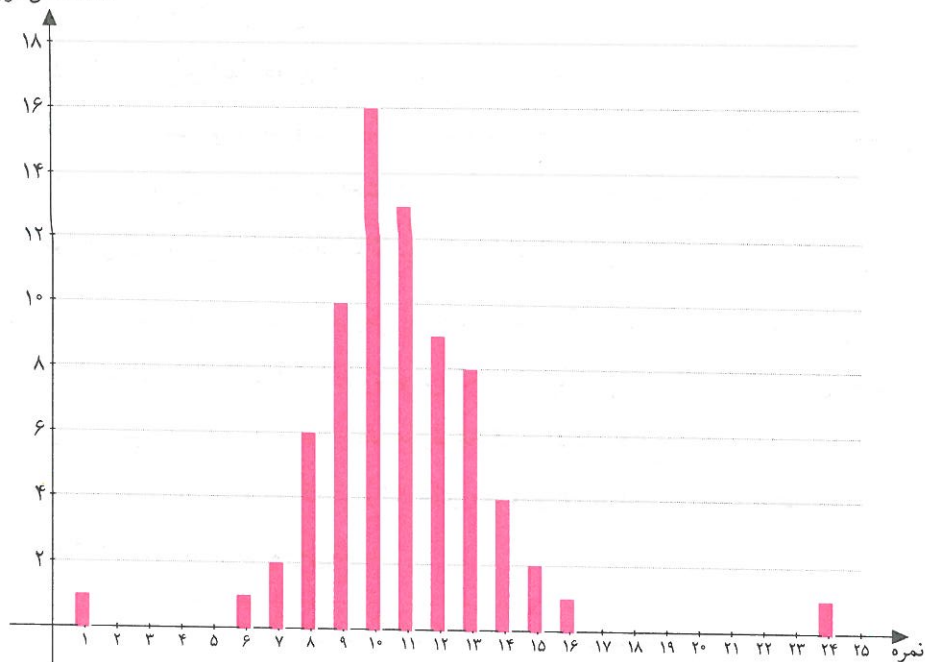
د) آیا نمودار رسم شده مقارن است؟



آمار و احتمال

۲. نمودار زیر، نمودار نمره‌های تعدادی دانش‌آموز در یک آزمون ۲۵ نمره‌ای است.

تعداد دانش‌آموزان



الف) تعداد دانش‌آموزان شرکت کننده در آزمون چقدر است؟

ب) نمره چند دانش‌آموز از میانگین بیشتر است؟

ج) اگر دو نفری را که کمترین و بیشترین نمره را گرفته‌اند، حذف کنیم، میانگین و دامنه تغییرات چگونه تغییر می‌کند؟

د) این ۲۵ نمره را به ۵ دسته مساوی تقسیم کنید. جدول فراوانی تشکیل دهید که شامل فراوانی هر دسته، مرکز دسته و مرکز دسته $\times$ فراوانی آن باشد. برای این جدول نمودار ستونی رسم کنید.

ه) این بار میانگین نمرات را با توجه به جدول فراوانی قسمت قبل به دست آورید. میانگین جدید چقدر با میانگین واقعی اختلاف دارد؟

۳. به نظر شما چرا از مرکز دسته برای میانگین گیری استفاده می کنیم؟

۴. فرض کنید ۱۰۰ نمره بین ۰ تا ۲۰ داریم. این ۱۰۰ نمره را به ۵ دسته مساوی تقسیم کرده ایم و برای آنها جدول فراوانی تشکیل داده ایم. یک بار میانگین واقعی این ۱۰۰ داده را به دست می آوریم و بار دیگر با استفاده از جدول فراوانی و مرکز دسته، میانگین را به دست می آوریم. حداکثر اختلاف میانگین واقعی و میانگین به دست آمده از جدول فراوانی چقدر می تواند باشد؟ با تغییر تعداد دسته ها، این اختلاف چگونه تغییر می کند؟

۵. در روزنامه ای مطلبی در مورد یکی از دانشگاه هایی که بدون آزمون دانشجو می پذیرد، اعلام شده است. بنابه آمار ۶۸٪ پسرانی که جهت پذیرش در یکی از رشته های معماری و مهندسی اقدام می کنند در رشته مورد علاقه خود پذیرفته می شوند. در حالی که فقط ۵۱٪ از متقاضیان خانم که در رشته های معماری و مهندسی خواهان پذیرش در این دانشگاه هستند، پذیرفته می شوند.

	دانشکده معماری	دانشکده مهندسی
	متقاضیان پذیرفته شدگان	متقاضیان پذیرفته شدگان
خانم	۵۰۰	۴۰۰
آقا	۲۰۰	۸۰۰

الف) باتوجه به جدول فوق، چند درصد از متقاضیان خانم و چند درصد از متقاضیان آقا در دانشکده مهندسی پذیرفته شده اند؟

ب) باتوجه به جدول فوق، چند درصد از متقاضیان خانم و چند درصد از متقاضیان آقا در دانشکده معماری پذیرفته شده اند؟

ج) توضیح دهید که چگونه ممکن است مطلب روزنامه و مقدارهایی که در قسمت های «الف» و «ب» به دست آوردید، همگی درست باشند؟

• آمار و احتمال •

۶. در اواخر قرن نوزدهم میلادی، جنگی بین آمریکا و اسپانیا در گرفت. در این جنگ، در نیروی دریایی آمریکا از هر هزار نفر، نه نفر جان خود را از دست داده بودند. در همین زمان در شهر نیویورک، آمار مرگ و میر شانزده نفر در هر هزار نفر بوده است. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا جنایت در نیویورک آنقدر زیاد بوده که رفتن به میدان جنگ بهتر از قدم زدن در خیابان‌های نیویورک بوده است؟!



۷. میانگین درآمد ۱۰ نفر از کارمندان یک شرکت خصوصی، ماهیانه ۲,۹۰۰,۰۰۰ تومان است. آقای پول‌پرست فکر کرد که اگر در این شرکت کار کند، خوشبخت می‌شود! به همین خاطر به سرعت در این شرکت مشغول به کار شد. پس از چند روز آقای پول‌پرست متوجه شد که حقوق مدیرعامل شرکت که ماهیانه بیست میلیون تومان است نیز در میانگین حقوق کارمندان محاسبه شده است.

الف) بدون در نظر گرفتن حقوق مدیرعامل، میانگین حقوق افراد دیگر شرکت، ماهانه چقدر است؟

ب) در چه شرایطی نمی‌توان به میانگین اعتماد کرد؟



۸. الف) سه نقطه روی محور اعداد صحیح بیابید که میانگین آنها صفر باشد. این مسئله چند جواب دارد؟

ب) هر یک از سه نقطه قسمت قبل را ۴ واحد به سمت راست منتقل کنید. میانگین سه نقطه جدید را به دست آورید.

ج) پنج نقطه روی محور اعداد بیابید که میانگین آنها $2/5$ - باشد.

د) چهار نقطه غیر صحیح روی محور اعداد مشخص کنید که میانگین آنها 18 - باشد.

ه) اگر میانگین ده عدد دلخواه برابر $\bar{x}$ باشد و هر یک از این ده عدد را با $7/23$ جمع بزنیم، میانگین ده عدد جدید را بر حسب $\bar{x}$ به دست آورید.

۹. میانگین اعداد زیر را به دست آورید.

$$1, 2, 3, 4, \dots, 97, 98, 99, 100.$$

۱۰. در جدول زیر، رابطه‌ای بین اعداد سطر اول، سطر دوم و سطر سوم برقرار است. اگر در سطر اول عدد x را قرار دهیم، در سطر دوم و سطر سوم چه عدد بر حسب x قرار می‌گیرد؟ میانگین اعداد سطر اول چه ارتباطی با میانگین اعداد سطر دوم و سوم دارد؟

۴	۲	۱	۶
۴۸	۲۴	۱۲	۷۲
۱۴۸	۱۲۴	۱۱۲	۱۷۲

۱۱. حمید و عماد هر کدام در پنج درس امتحان داده‌اند. میانگین هر یک از آنها در این پنج درس، 80 از 100 بوده است. نمره حمید در چهار درس از عماد بهتر بوده و عماد فقط در یک درس نمره بهتری از حمید گرفته است. مثالی از نمره‌های حمید و عماد در این پنج درس ارائه دهید.

• آمار و احتمال •

۱۲. فائزه و غزاله برای به دست آوردن میانگین اعداد ۱۷۵۵، ۱۷۶۶، ۱۷۶۰ و ۱۷۵۰، راه‌حل‌های زیر را ارائه داده‌اند. هر یک از راه‌حل‌ها را توضیح دهید.

راه‌حل غزاله:	راه‌حل فائزه:
$1750 + \frac{0 + 5 + 10 + 16}{4} = 1750 + \frac{31}{4}$ $= 1750 + 7\frac{3}{4}$ $= 1757\frac{3}{4}$	$1750 + 1760 + 1755 + 1766 = \frac{7031}{4}$ $= 1757\frac{3}{4}$

۱۳. هوشنگ در چهار آزمون خود نمره‌های ۸۵، ۸۰، ۶۵ و ۹۵ را کسب کرده است.

(الف) هوشنگ در آزمون بعدی چه نمره‌ای بگیرد تا میانگین نمراتش حداقل ۸۰ بشود؟

(ب) اگر هوشنگ سه آزمون دیگر داشته باشد، میانگین این سه آزمون چقدر باشد

تا میانگین هفت آزمون هوشنگ حداقل ۸۰ شود؟ برای نمره‌های هوشنگ دو

حالت مختلف مثال بزنید.



۱۴. (الف) ده عدد طبیعی متمایز مثال بزنید که بیش از ۵ عدد از این اعداد، از میانگین

بزرگ‌تر باشد.

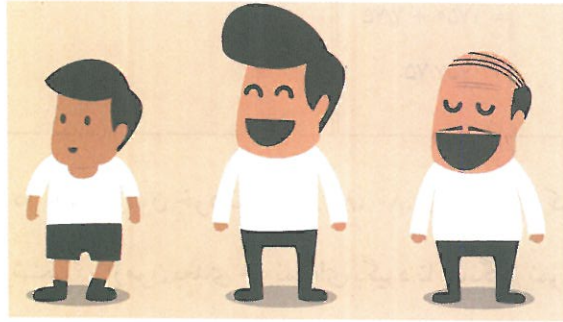
(ب) ده کسر که صورت آنها ۱ و مخرج آنها عدد طبیعی باشد، مثال بزنید که میانگین

آنها، حداقل از پنج تا از کسرها بزرگ‌تر باشد.

۱۵. میانگین سن چهار نفر ۲۲ سال است. سن بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین فرد به ترتیب ۴۵ و ۷ سال است.

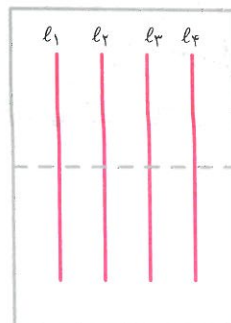
الف) برای سن دو نفر دیگر سه مثال بیاورید.

ب) اگر دو نفر دیگر هم‌سن باشند، سن هر کدام چند سال است؟



کارگاه بازی - حلقه شانس

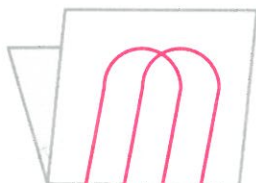
این بازی، یک بازی دو نفره است. برای این بازی به یک کاغذ که چهار پاره خط موازی روی آن رسم شده است، نیاز دارید. ابتدا کاغذ را از وسط تا بزنید.



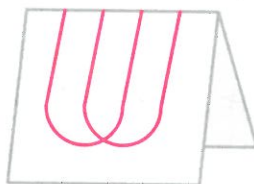
نفر اول دو جفت نیم خط انتخاب می‌کند و هر جفت را به هم وصل می‌نماید. برای نمونه

• آمار و احتمال •

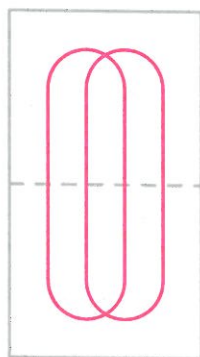
نفر اول می‌تواند جفت‌های l_1l_3 و l_2l_4 را انتخاب کند.



نفر اول کاغذ را برمی‌گرداند و به نفر دوم می‌دهد. نفر دوم، بدون اینکه از نحوه اتصال خطوط نفر اول مطلع باشد، دو جفت نیم‌خط از طرف دیگر کاغذ انتخاب می‌کند و هر جفت را به هم وصل می‌نماید. برای نمونه نفر دوم می‌تواند جفت‌های l_1l_3 و l_2l_4 را انتخاب کند.



سپس کاغذ را از محل تا باز کنید. اگر دو حلقه تشکیل شده باشد، نفر اول برنده است و در غیر این صورت نفر دوم برنده است.



در مثال بالا، نفر اول برنده شده است. زیرا در تصویر آخر دو حلقه مشاهده می‌شود. با برگزاری یک قرعه‌کشی و یک لیگ حذفی، نفر برتر کلاس را مشخص کنید. جایزه او افزایش یک نمره امتحان ریاضی است.

برای دیدن یک بازی شانس دیگر به www.webmath.ir بیایید.

احتمال یا اندازه‌گیری شانس

۱. در بازی حلقه شانس، شانس برد نفر اول چقدر است؟

۲. در هر یک از قسمت‌های زیر، «صفر»، «یک» یا «بین صفر و یک» بودن احتمال پیشامد داده شده را بررسی کنید. در مواردی که احتمال بین صفر و یک است درباره نزدیک بودن آن به عددهای a ، b یا c (که در شکل زیر مشخص شده‌اند) بحث کنید.



الف) پیشامد اینکه در ده سال آینده آب خوراکی جیره‌بندی شود. (به شرط آنکه الگوی مصرف اصلاح نگردد).

ب) پیشامد اینکه آب در صفر درجه سانتی‌گراد بجوشد.

ج) پیشامد اینکه با سه تکه چوب به اضلاع ۲، ۷ و ۴ سانتی‌متر بتوانیم مثلث بسازیم.

د) پیشامد متولد شدن نوزاد در فصل تابستان

۳. در ظرفی تعدادی مهره رنگی وجود دارد. اگر یک مهره به تصادف از این ظرف انتخاب کنیم، احتمال انتخاب شدن مهره آبی، قرمز و زرد به ترتیب $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{6}$ خواهد بود.

الف) آیا در این ظرف مهره‌ای با رنگ دیگر وجود دارد؟ اگر پاسخ بلی است، آیا می‌توان گفت چند رنگ در این ظرف دیده می‌شود؟

ب) آیا می‌توان تعداد هر یک از مهره‌های این ظرف را پیدا کرد؟



• آمار و احتمال •

۴. اعداد ۱ تا ۳۰ روی ۳۰ گوی نوشته شده‌اند و گوی‌ها داخل یک کیسه قرار دارند. یک گوی را به تصادف انتخاب می‌کنیم.

(الف) چقدر احتمال دارد گوی خارج شده بزرگ‌تر از ۱۵ باشد؟

(ب) چقدر احتمال دارد عدد انتخاب شده فرد باشد؟

(ج) چقدر احتمال دارد عدد انتخاب شده عددی اول باشد؟

(د) آیا می‌توانید مسئله‌ای بسازید که جواب آن با مجموع مقدارهای به دست آمده در قسمت «الف»، «ب» و «ج» برابر باشد.

۵. در یک جشن با ۱۳۵ مهمان، هنگام ورود هر فرد یک دستبند به او داده می‌شود. سه نوع دستبند به رنگ‌های بنفش، زرد و آبی و از هر نوع دستبند ۴۵ تا وجود دارد. هر رنگ از ۱ تا ۴۵ شماره‌گذاری شده است. در انتهای جشن قرار است یک نفر به تصادف انتخاب شوند و جایزه‌ای بگیرد.

(الف) احتمال اینکه فردی با دستبند زرد و شماره ۲۴ انتخاب شود، چقدر است؟

(ب) احتمال اینکه فردی با دستبند بنفش و شماره‌ای بین ۱۳ و ۲۰ انتخاب شود، چقدر است؟

(ج) احتمال اینکه فردی انتخاب شود که دستبند آبی داشته باشد یا شماره دستبند او شماره ۱۲ باشد، چقدر است؟



۶. الف) در صفحهٔ مختصات همهٔ نقاط صحیحی را مشخص کنید که $0 < x < 4$ و $0 < y < 4$ باشد.

ب) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. اگر نقطهٔ C را به‌طور تصادفی از نقاط قسمت «الف» (متمایز از نقطهٔ A و B) انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد که ABC یک مثلث باشد؟

ج) فرض کنید $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. دو نقطهٔ Y و Z را به‌طور تصادفی از نقاط قسمت «الف» (متمایز از X) انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که XYZ یک مثلث نباشد؟

۷. امیرحسین به‌تازگی با احتمال آشنا شده است. خواهر بزرگ او غزاله از امیرحسین می‌خواهد یک عدد سه رقمی تصادفی انتخاب کند و آن را تکرار کند تا یک عدد شش رقمی به‌دست آید. برای مثال اگر ۲۴۳ را انتخاب کرد، بنویسد ۲۴۳۲۴۳. غزاله به امیرحسین گفت: اگر تقسیم عدد شش رقمی تو بر ۷ باقی‌مانده‌ای به غیر از صفر داشت، تو برندهٔ بازی هستی و اگر باقی‌مانده صفر بود من برنده‌ام.

الف) چقدر احتمال دارد که باقی‌ماندهٔ تقسیم یک عدد سه رقمی تصادفی بر ۷ برابر صفر نباشد؟

ب) چقدر احتمال دارد که باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد شش رقمی امیرحسین بر ۷ برابر صفر نباشد؟



۸. متن زیر^۱ را با دقت بخوانید و درباره آن با همکلاسی های خود بحث کنید.

یک سکه را ده بار می اندازیم. هر ده بار پشت می آید. شما انتظار دارید در پرتاب یازدهم رو بیاید یا پشت؟

دو حالت وجود دارد:

۱. ایراد از سکه است و بنابراین باید انتظار داشت که بار یازدهم نیز پشت بیاید.

۲. این ده بار به طور اتفاقی پشت آمده و بنابراین احتمال پشت یا رو آمدن در بار یازدهم یکسان است.

اما عده ای از مردم انتظار دارند که در پرتاب یازدهم رو بیاید. آنها چنین استدلال می کنند: «احتمال یازده بار پشت آمدن خیلی کمتر از ده بار پشت آمدن است، پس در پرتاب یازدهم رو می آید.»

مردم با همین استدلال، گاهی اوقات به زیر درختان صاعقه زده پناه می برند و گمان می کنند که صاعقه به ندرت دو بار بر یک جا اصابت می کند. در بمباران ها نیز بعضی اشخاص داخل گودال های بمب خورده می نشینند و تصور می کنند که احتمال دو بار اصابت بمب در یک مکان بسیار کم است.

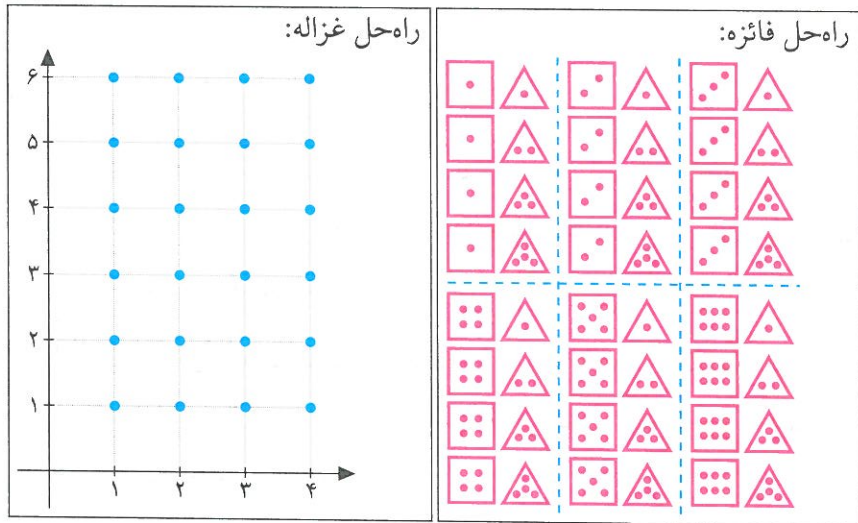
روان شناسانی که نحوه استدلال اشخاص در مورد احتمالات را بررسی می کنند، می گویند: «تقریباً هرکس در معرض چنین اشتباهی قرار دارد. این استدلال اگرچه درست نیست، اما با عادت ذهنی آدمی مطابقت دارد.»

بررسی حالت های ممکن

۱. یک تاس شش وجهی و یک تاس چهاروجهی را باهم پرتاب می کنیم. (روی تاس شش وجهی اعداد ۱ تا ۶ و روی تاس چهاروجهی اعداد ۱ تا ۴ نوشته شده است).

^۱ برگرفته از کتاب «فلسفه در عمل» نوشته ادم مورتون، ترجمه فریبرز مجیدی.

الف) فائزه و غزاله حالت‌هایی را که ممکن است در پرتاب دو تاس دیده شود، به صورت زیر نمایش داده‌اند. راه‌حل این دو نفر را توضیح دهید.



ب) تعداد کل حالت‌ها چند تاست؟

ج) تعداد حالت‌هایی که عدد ظاهر شده روی تاس شش وجهی ۴ باشد چند تاست؟ آنها را با رنگ آبی در راه‌حل‌های بالا مشخص کنید.

د) تعداد حالت‌هایی که عدد ظاهر شده روی تاس چهار وجهی بزرگ‌تر از ۲ باشد چند تاست؟ آنها را با رنگ زرد در راه‌حل‌های بالا مشخص کنید.

ه) احتمال اینکه عدد ظاهر شده روی تاس شش وجهی ۴ باشد، چقدر است؟

و) احتمال اینکه عدد ظاهر شده روی تاس چهار وجهی بزرگ‌تر از ۲ باشد، چقدر است؟

ز) خانه‌هایی که هم با رنگ آبی و هم با رنگ زرد رنگ شده‌اند چه کسری از کل شکل را نشان می‌دهند؟

ح) آیا می‌توانید با دو تاس بالا مسئله‌هایی بسازید که پاسخ آنها برابر صفر، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{2}{3}$ یا $\frac{3}{4}$ باشد؟

• آمار و احتمال •



۲. دو تاس شش وجهی را باهم پرتاب می‌کنیم.

الف) همه حالت‌های ممکن را نمایش دهید.

ب) احتمال اینکه حداقل یکی از دو تاس ۶ بیاید چقدر است؟ احتمال اینکه دقیقاً یک تاس ۶ بیاید چقدر است؟

ج) احتمال اینکه هیچ‌یک از تاس‌ها عدد اول نباشد، چقدر است؟

د) احتمال اینکه فقط روی یکی از تاس‌ها عدد اول ظاهر شود، چقدر است؟

ه) احتمال اینکه یک تاس زوج و دیگری فرد بیاید، چقدر است؟

و) در صورت وجود، پیشامدهایی را بیان کنید که احتمال وقوع آنها $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{7}$ باشد.

برای هر یک از این پیشامدها مسئله بسازید و آنها را در جدول یا نموداری که در قسمت «الف» رسم کرده‌اید، نمایش دهید.

۳. روی یک قطعه چوب ۶ نقطه برای برش انتخاب شده است. به چند حالت می‌توان

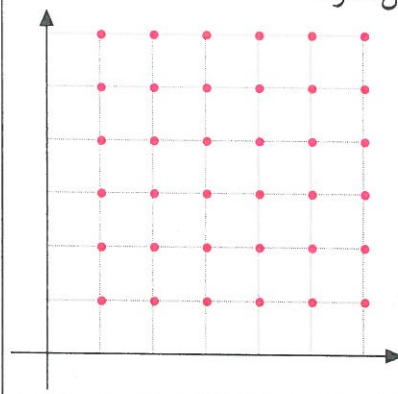
این تکه چوب را با ۲ برش به سه قسمت تقسیم کرد؟

درباره راه‌حل‌های زیر بحث کنید.

راه‌حل غزاله:

۱	
۲	(۱, ۲) (۱, ۳) (۱, ۴) (۱, ۵) (۱, ۶)
۳	(۲, ۳) (۲, ۴) (۲, ۵) (۲, ۶)
۴	(۳, ۴) (۳, ۵) (۳, ۶)
۵	(۴, ۵) (۴, ۶)
۶	(۵, ۶)

راه‌حل فائزه:



۴. یک عدد طبیعی را «فردنما» می‌نامیم هرگاه همهٔ رقم‌هایش فرد باشد.

الف) چند عدد چهار رقمی فردنما وجود دارد؟

ب) یک عدد پنج رقمی به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این عدد فردنما باشد؟

۵. سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که حداقل دو بار رو ظاهر شود؟



۶. خانه‌های یک جدول 2×2 را به تصادف با رنگ سیاه یا سفید رنگ می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که هر دو خانهٔ ردیف اول این جدول سفید باشد؟

۷. در درس فیزیک بچه‌ها یاد گرفته‌اند که به کمک منشور می‌توانند طیف نور سفید (هفت رنگی که رنگ سفید ترکیب آنهاست) را تشکیل دهند. سپهر در فکر فرو رفته است که آیا او می‌تواند با استفاده از این هفت رنگ برای خودش و دوستش رمزهایی بسازد. برای مثال (بنفش، نیلی، آبی، سبز، زرد، نارنجی، قرمز) برای آنها معنای خاصی داشته باشد و (نیلی، سبز، زرد، آبی، بنفش، نارنجی، قرمز) معنای دیگری داشته باشد.

الف) سپهر چند رمز هفت رنگی می‌تواند بسازد؟

ب) اگر سپهر بخواهد از این هفت رنگ فقط از چهار رنگ استفاده کند، چند رمز چهار رنگی مختلف با این هفت رنگ می‌تواند بسازد؟

ج) اگر یکی از رمزهای هفت رنگی را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه رنگ اول رمز آبی و رنگ دوم سبز باشد چقدر است؟

• آمار و احتمال •

(د) اگر یکی از رمزهای هفت رنگی را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه رنگ آبی بین دو رنگ سبز و قرمز باشد چقدر است؟ (لزومی ندارد آبی و سبز یا آبی و قرمز کنار هم باشند.)



۸. طاقه‌هایی از شش رنگ پارچه داریم. می‌خواهیم پرچم‌هایی بدوزیم که از سه رنگ مختلف تشکیل شده‌اند.

الف) چند پرچم متفاوت می‌توان ساخت؟

ب) فرض کنید یکی از طاقه‌ها قرمز باشد. اگر به‌طور تصادفی سه رنگ برای دوخت پرچم انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد رنگ قرمز در پرچم به‌کار رفته باشد؟



۹. شش نامه و سه نفر پیک نامه‌رسان داریم. اگر این شش نامه را به تصادف بین سه نفر تقسیم کنیم، چقدر احتمال دارد که به پیک اول هیچ نامه‌ای نرسد؟



۱۰. یک تاس را سه بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که حداقل یک بار شش بیاید؟

۱۱. الف) در چند عدد هشت رقمی مجموع رقم‌ها زوج است؟

ب) یک عدد نه رقمی به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مجموع رقم‌های این عدد زوج باشد؟

۱۲. الف) فرزند دوم خانوادهٔ رجبی در راه است. فرزند اول این خانواده پسر است. احتمال اینکه فرزند دوم دختر باشد، چقدر است؟

ب) عاطفه برای دیدن دوست خود به خانهٔ آنها می‌رود. او می‌داند این خانواده دو فرزند دارند ولی در مورد جنسیت آنها چیزی نمی‌داند. هنگامی که در می‌زند، پسری در را باز می‌کند. احتمال اینکه فرزند دیگر پسر باشد، چقدر است؟

۱۳. مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان تصمیم دارد از چهار نفر از دبیران دبیرستان فرزنانگان برای شرکت در جلسهٔ طرح سؤال دعوت کند. نامه‌ای رسمی برای هر یک از این چهار دبیر برجسته نوشته شده و روی چهار پاکت نیز نام این دبیران نوشته شده است. اگر یکی از کارکنان مرکز، نامه‌ها را به‌طور تصادفی در پاکت‌ها قرار دهد،

الف) احتمال اینکه فقط نامهٔ یکی از دبیران در پاکتی اشتباه (که نام ایشان نیست) قرار بگیرد، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه نامهٔ دو نفر از دبیران در دو پاکت اشتباه قرار گیرد، چقدر است؟

ج) احتمال اینکه نامهٔ چهار نفر دبیر در چهار پاکت اشتباه قرار گیرد، چقدر است؟

د) احتمال اینکه حداقل یک نامه در پاکت درست قرار بگیرد، چقدر است؟



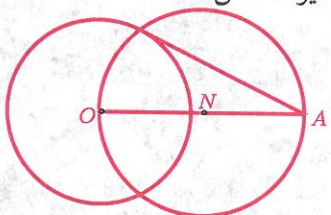
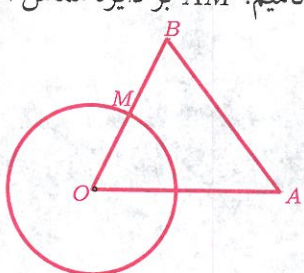
دایره



قوس پیچ‌های راه‌آهن معمولاً قسمتی از یک دایره است که قسمت‌های مستقیم بر آن مماس هستند. معمولاً شعاع این دایره را بزرگ‌تر از ۶۰۰ متر در نظر می‌گیرند.

دایره‌ها

۱. دایره c به مرکز O و شعاع r مفروض است. از نقطه A خارج از دایره c ، یک مماس بر دایره رسم کنید.

<u>راه حل سمیمه:</u> وسط پاره خط OA را N بنامید. به مرکز N و شعاع ON دایره‌ای رسم کنید. پاره خطی که A را به محل برخورد دو دایره وصل می‌کند، بر دایره مماس است. 	<u>راه حل مرضیه:</u> مثلث متساوی الساقین AOB به ساق OA و قاعده $OB = 2r$ را رسم می‌کنیم. محل برخورد OB با دایره را M می‌نامیم. AM بر دایره مماس است. 
--	--

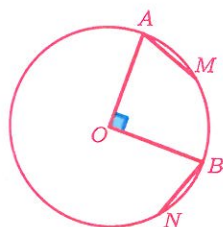
- الف) درستی روش‌های سمیمه و مرضیه را بررسی کنید.
- ب) آیا می‌توانید روش دیگری برای رسم خط مماس از یک نقطه خارج از دایره، ارائه دهید؟
۲. از نقطه A خارج از دایره‌ای به مرکز O ، دو مماس AM و AN بر دایره رسم شده است.
- الف) ثابت کنید OA عمود منصف MN است.
- ب) ثابت کنید OA نیم‌ساز زاویه MON است.
۳. از نقطه A دو مماس AM و AN بر دایره‌ای به شعاع ۵ رسم شده است. اگر $OA = 13$ ، آنگاه طول AM و AN را به دست آورید.
۴. در یک دایره وترى به طول ۸ مفروض است. اگر طول بزرگ‌ترین وتر این دایره ۱۲ باشد، آنگاه فاصله مرکز دایره تا وتر مفروض چقدر است؟

۵. در یک دایره دو وتر مساوی رسم شده‌اند. ثابت کنید فاصله مرکز دایره از این دو وتر یکسان است.

۶. ثابت کنید اگر خطی دو دایره هم‌مرکز را قطع کند، دو پاره‌خط که بین دو دایره قرار می‌گیرند، باهم برابرند.

۷. ثابت کنید دو وتر برابر و متقاطع در یک دایره، یکدیگر را به یک نسبت قطع می‌کنند.

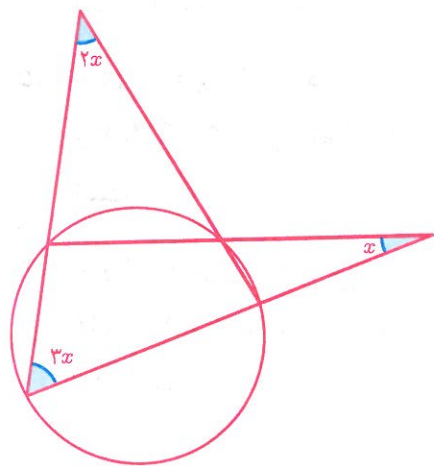
۸. دو وتر برابر و غیر متقاطع AB و CD در دایره‌ای به مرکز O مفروض‌اند. اگر امتداد این دو وتر یکدیگر را در نقطه M قطع کنند، ثابت کنید OM نیم‌ساز زاویه AMC است.



۹. در دایره روبه‌رو دو شعاع OA و OB برهم عمودند. اگر طول کمان‌های AM و BN برابر باشند، آنگاه ثابت کنید خط‌های AM و BN برهم عمودند.

۱۰. روی نیم‌دایره‌ای به قطر AB دو کمان مساوی BC و CD جدا شده‌اند. خط عمود بر CD که از نقطه D خارج شده است، AC را در نقطه F قطع می‌کند. اگر محل برخورد AC و BD نقطه E باشد، آنگاه ثابت کنید نقطه F وسط AE است.

۱۱. در شکل زیر مقدار x چقدر است؟

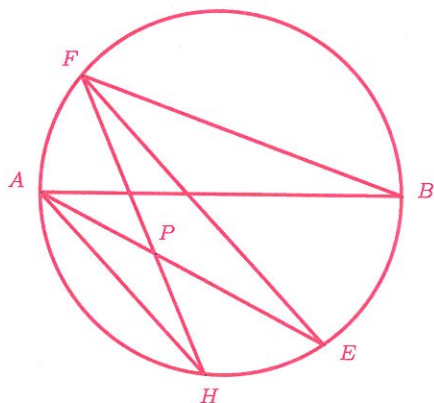


۱۲. در دایره‌ای به شعاع r ، دو وتر AB و AC مفروض‌اند. در هر یک از حالت‌های زیر بررسی کنید که AB بر AC عمود است یا خیر؟

(الف) $AB = 8$, $AC = 15$, $r = 17$ (ب) $AB = 24$, $AC = 9$, $r = 26$

۱۳. الف) ثابت کنید کمان‌های محصور بین دو وتر موازی باهم برابرند.

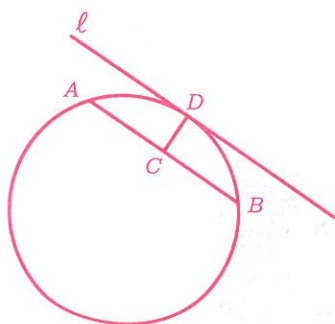
ب) در شکل زیر AB قطر دایره است و وتر AH با وتر EF موازی است. اگر $F\hat{B}A = 20^\circ$ ، آنگاه زاویه HPE چند درجه است؟



۱۴. در دایره‌ای به مرکز O ، AB قطر و M وسط کمان AB است. نقطه P روی قطر DM طوری قرار دارد که $MP = MB$. اگر K محل برخورد BP با دایره باشد، آنگاه اندازه زاویه KMO چقدر است؟

۱۵. روی ربع دایره AOB دو وتر مساوی AM و BN رسم شده است. اگر امتداد AM و BN یکدیگر را در نقطه C قطع کنند، آنگاه ثابت کنید OC بر AB و MN عمود است.

۱۶. دایره‌ای به مرکز O و شعاع r مفروض است. از نقطه A خارج از دایره، دو مماس AM و AN بر دایره رسم شده است. اگر مثلث AMN متساوی‌الاضلاع باشد، آنگاه OA بر حسب r چقدر است؟



۱۷. در شکل روبه‌رو، شعاع دایره برابر r و خط ℓ در نقطه D بر دایره مماس و CD عمود منصف AB است. اگر $\ell \parallel AB$ ، $AB = 2x$ و $CD = y$ ، آنگاه ثابت کنید:

$$x^2 = y(2r - y).$$

۱۸. عدد $\sqrt{\sqrt{2}}$ را روی محور نشان دهید.

راهنمایی: می‌توانید از مسئله قبل کمک بگیرید.

۱۹. جاده و راه‌آهن هرگز یک‌باره نمی‌پیچند بلکه از یک جهت به جهت دیگر به ملایمت و روی قوسی که شکستگی نداشته باشد، تغییر مسیر می‌دهند. این قوس، معمولاً قسمتی از یک دایره است که قسمت‌های مستقیم جاده، بر آن مماس هستند.



معمولاً شعاع قسمت منحنی جاده را بزرگ می‌گیرند که در مورد راه‌آهن کمتر از ۶۰۰ متر نیست و در بعضی موارد به ۱۰۰۰ و حتی ۲۰۰۰ متر می‌رسد.

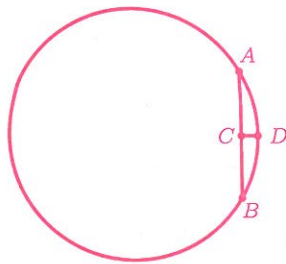
الف) چه روشی برای یافتن مرکز قوس یک جاده کوهستانی را پیشنهاد می‌دهید؟ (فرض کرده‌ایم قوس جاده، قسمتی از یک دایره است.)

ب) پیچ‌های خطرناکی در جاده‌های ایران وجود داشت که به «پیچ‌های غریب‌کش» معروف بودند. نقشه یکی از این پیچ‌ها در www.webmath.ir قرار داده شده است. درباره نحوه اصلاح این پیچ، در کلاس گفت‌وگو کنید.

۲۰. می‌دانیم عمیق‌ترین قسمت اقیانوس اطلس در گودال پورتوریکو به عمق ۸۶۰۵ متر است و عرض اقیانوس اطلس در نزدیکی خط استوا تقریباً $\frac{1}{2}$ محیط دایره‌ای است که خط استوا روی آن قرار دارد.



می‌خواهیم بدانیم کف اقیانوس اطلس چگونه است: محدب، مقعر یا مسطح؟ فرض کنید کف اقیانوس اطلس مسطح باشد. اگر دایره‌ی زیر را خط استوا در نظر بگیریم و نقاط A و B ابتدا و انتهای اقیانوس اطلس روی این دایره باشند، حداکثر عمق اقیانوس اطلس برابر با طول پاره‌خط CD است. اگر شعاع کره زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر در نظر بگیریم، طول پاره‌خط CD چقدر است؟



۲۱. کاظم برای دیدن یک فیلم خارجی به سینما رفته بود. او که به زبان فیلم تسلط نداشت، مجبور بود زیرنویس فیلم را بخواند. صندلی کاظم (همان‌طور که در تصویر زیر می‌بینید) نزدیک پرده نمایش فیلم بود و او برای خواندن هر خط زیرنویس، باید سرش را به اندازه فاصله دو کتفش (از راست به چپ) می‌چرخاند!

همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، اگر از صندلی کاظم دو پاره خط به دو سر پرده نمایش رسم کنیم، زاویه‌ای در حدود ۱۶۰ درجه ساخته می‌شود.

پرده نمایش

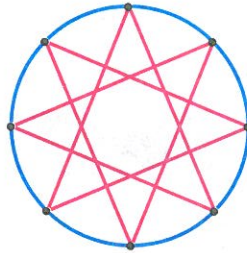
۱۳	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۱۲	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۱۱	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۱۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۸	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۶	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۴	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۳	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۲	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۱	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷

کاظم اواسط فیلم دچار سردرد و گردن درد شد. او فیلم را نیمه‌کاره رها کرد و از سینما بیرون آمد ولی دلش می‌خواست بداند آخر فیلم چه می‌شود.

کاظم تصمیم گرفت این بار بلیت فیلم را اینترنتی تهیه کند تا بتواند خودش صندلی‌اش را انتخاب کند. او می‌خواست اگر از روی صندلی (به عنوان رأس یک زاویه) زاویه‌ای با دو سر پرده سینما بسازد، اندازه این زاویه حداکثر ۶۰ درجه باشد. در شکل بالا، کاظم چه صندلی‌هایی را انتخاب کند تا خواسته‌اش برآورده شود؟

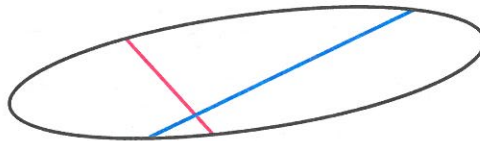
۲۲. اگر n نقطه روی دایره، کمان‌های برابر ایجاد کرده باشند و آنها را m تا در میان به یکدیگر وصل کرده باشیم، شکل حاصل چند محور تقارن دارد؟

برای مثال، در شکل زیر، هشت نقطه روی دایره کمان‌های برابر ایجاد کرده‌اند ($n = 8$). این نقاط دوتا در میان به یکدیگر وصل شده‌اند ($m = 2$).



۲۳. پروژه. یک شکل را محدب بسته می‌نامیم هرگاه برای هر دو نقطه P و Q که درون شکل باشند، پاره‌خط PQ نیز کاملاً درون آن شکل قرار گیرد.

پاره‌خطی که دو نقطه روی یک شکل محدب بسته (مانند شکل زیر) را به هم وصل می‌کند، وتر می‌نامیم. در شکل زیر، دو پاره‌خط آبی و صورتی، وتر هستند.



اگر همه وترهایی که از یک نقطه می‌گذرند با هم برابر باشند، آن نقطه را نقطه هم‌وتری می‌نامیم. برای مثال، در یک دایره، تمام وترهایی که از مرکز دایره می‌گذرند با هم برابرند؛ یعنی مرکز دایره، نقطه هم‌وتری دایره است.

الف) چند نوع شکل محدب بسته‌ای را که نقطه هم‌وتری دارند، بیابید.

ب) آیا شکل محدب بسته‌ای با دو نقطه هم‌وتری وجود دارد؟

با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

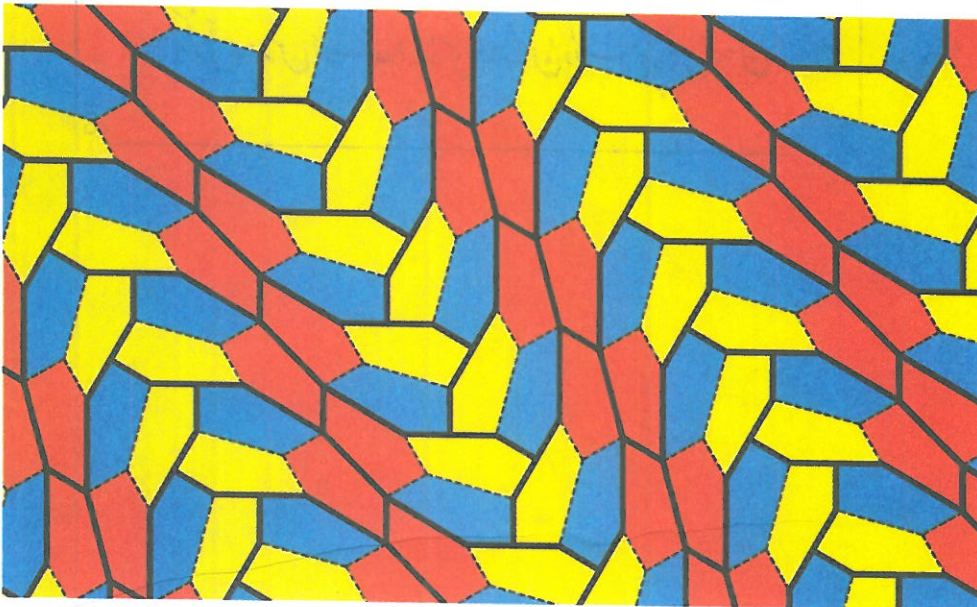
کتاب‌نامه

- [۱] محمد حسین احمدی و نرگس اخلاقی‌نیا، خودآموز هندسه ۱، جلد اول، انتشارات مبتکران، تهران، ۱۳۹۲.
- [۲] محمد حسین احمدی، سعید صدری و علیرضا تاج‌بخش، ریاضی تکمیلی سال اول دوره راهنمایی، سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان، تهران، ۱۳۸۹.
- [۳] ریاضیات کانگورو ۷ و ۸، ترجمه مهران اخباریفر، انتشارات فاطمی با همکاری انتشارات باشگاه دانش‌پژوهان جوان، تهران، ۱۳۸۹.
- [۴] شه‌پان انسکی، در پی فیثاغورث، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۸۴.
- [۵] مارتین ایگنر و گونتر تسیگلر، کتاب اثبات، ترجمه سیامک کاظمی، انتشارات پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران، ۱۳۷۹.
- [۶] دیوید برتن، نظریه مقدماتی اعداد، ترجمه محمد صادق منتخب، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۱.
- [۷] واسیلی دمیتریه‌ویچ چیستیاکوف، مسئله‌های تاریخی ریاضیات، ترجمه پرویز شهریاری، نشر نی، تهران، ۱۳۷۴.
- [۸] ریاضیات کانگورو ۹ و ۱۰، ترجمه بردیا حسام، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۹۰.
- [۹] امیرحسین حمداوی، محسن کیهانی، علی قصاب و علیرضا شیخ‌عطار، ریاضیات پایه دوم راهنمایی، نشر سمپاد، تهران، ۱۳۸۷.
- [۱۰] ارشک حمیدی، هندسه از ابتدا تا ...، جلد اول، نشر علوم ریاضی ره‌آورد، تهران، ۱۳۹۴.
- [۱۱] الکساندر پتروویچ دوموریاد، در قلمرو ریاضیات، ترجمه پرویز شهریاری، موسسه انتشارات امیرکبیر، چاپ دوم، تهران، ۱۳۶۳.

- [۱۲] عبدالرضا زارع شحنه، ریاضی تکمیلی سال دوم دوره راهنمایی، سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان، تهران، ۱۳۸۹.
- [۱۳] پرویز شهریاری، ۹۹ مسئله ریاضی، موسسه چاپ سوره، تهران، ۱۳۷۹.
- [۱۴] دمتری فومین، سرگی گنکین و ایلیا ایتنبرگ، محافل ریاضی (تجربه روس‌ها)، ترجمه ارشک حمیدی و مهرداد مسافر، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۸۶.
- [۱۵] علی قصاب، ریاضیات تکمیلی سال اول دبیرستان، سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان، تهران، ۱۳۸۹.
- [۱۶] استیون ج. کرانتس، فنون مسئله حل کردن، ترجمه مهراڻ اخباری‌فر، انتشارات فاطمی، چاپ سوم، تهران، ۱۳۸۴.
- [۱۷] بوریس آناستاسیویچ کوردمسکی، اندیشه ریاضی، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۶۱.
- [۱۸] مارتین گاردنر، معماهای ابوالهول، ترجمه حسن نصیرنیا، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۰.
- [۱۹] ادوین مویز و فلویید دانز، هندسه، ترجمه محمود دیانی، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۵.
- [۲۰] راجر نلسن، اثبات بدون کلام، ترجمه سپیده چمن‌آرا، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۵.
- [۲۱] تارل هاف، چگونه با آمار دروغ می‌گویند، ترجمه مهدی تقوی، نشر آفتاب، تهران، ۱۳۷۱.

درباره طرح روی جلد

کشور ایران با تاریخ و تمدن کهن در هنر و صنعت از دیرباز به عنوان بستری مناسب برای صنعت کاشی و هنر کاشی‌کاری مطرح بوده است. قدمت این صنعت و هنر به بیش از ۳۲۰۰ سال پیش باز می‌گردد. تا سال‌های سال هنر و ریاضی کاشی‌های ایرانی زبانزد خاص و عام بود؛ اما در سال‌های اخیر این ایرانی‌ها نبودند که روش‌های کاشی‌کاری را توسعه داده‌اند! طرح روی جلد این کتاب، الگویی از تصویر کاشی‌کاری زیر است که اخیراً کشف شده است. برای مطالعه بیشتر، پروژه صفحه ۴۵ از فصل سه را ببینید.



معلّمان محترم صاحب نظران دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند
نظر اصلاحی خود را درباره مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران
خیابان سپهبد قری بنیشت سیمیه وزارت آموزش پرورش ساختمان
مرحوم علامتقدان طبعه پنجم، کد پستی ۵۸۱۱۱-۱۵۹۹۹ و یا به نشانی رایانه
sampad@medu.ir ارسال نمایند.

مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان دانش پژوهان جوان

