جبرخطی کاربردی

درس۹

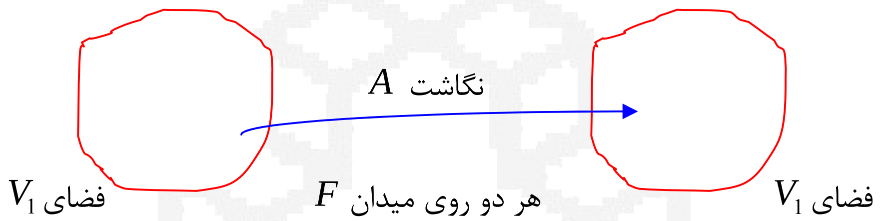
مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

گروه سیستم و کنترل - ۱۳۸۸

مدرس: صدقی زاده

نگاشت های خطی

$$A_{n\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}=\mathbf{b}_{n\times 1}$$



- نگاشت می تواند اندازه و جهت بردار را تغییر دهد،

- نگاشت می تواند اندازه بردار را تغییر دهد و امتداد آن را حفظ نماید.

چه بردارهایی چنین خاصیتی دارند؟

مقدار ویژه و بردار ویژه (Eigenvalue and Eigenvector)

- برای نگاشت زیر،

$$A_{n\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}=\mathbf{b}_{n\times 1}$$

- اگر بردار $\mathbf{b}$ برداری در امتداد بردار غیر صفر $\mathbf{x}$ باشد،

$$\boxed{A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad (A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{0}}$$

مقدار ویژه ماتریس A بردار ویژه ماتریس A

- بردارهای ویژه $\mathbf{x}$ متعلق به $N(A-\lambda I)$ هستند.
- اگر $|A-\lambda I|\neq 0$ باشد، تنها جواب معادله $(A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ پاسخ بدیهی $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ است.
- λ یک مقدار ویژه از ماتریس A است اگر و فقط اگر پاسخ معادله درجه n $\boxed{|A-\lambda I|=0}$ باشد.

معادله مشخصه ماتریس A (Characteristic Equation)

خواص

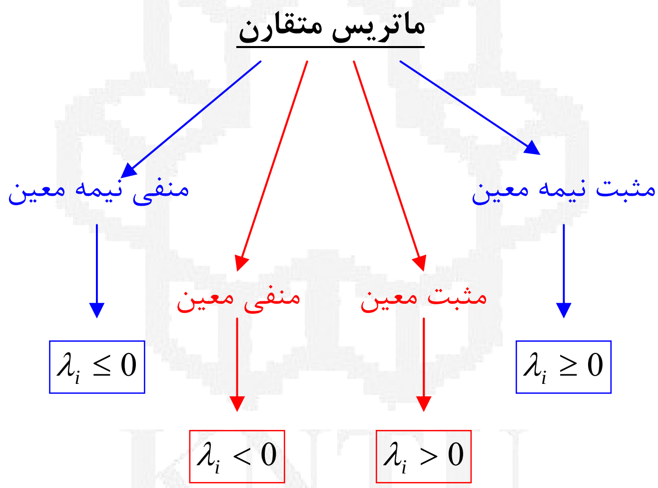
- اگر $|\lambda I_n - A|$ را بسط دهیم، معادله مشخصه بصورت زیر بیان می گردد،

$$|\lambda I_n - A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=\underbrace{\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\lambda+c_n}_{\text{چند جمله ای مونیک با ضرایب حقیقی}}=0$$

- برای ماتریس حقیقی $A_{n\times n}$، مقادیر ویژه حقیقی یا مختلط مزدوج $(\alpha\pm j\beta)$ هستند.
- اگر ماتریس A متقارن(هرمیتی) باشد، مقادیر ویژه حقیقی هستند.
- محاسبه دترمینان ماتریس $\det(A)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$
- اگر λ_i مقدار ویژه ماتریس A باشد، λ_i^k مقدار ویژه ماتریس A^k متناظر با همان بردار ویژه است.
- اگر λ_i مقدار ویژه ماتریس غیرمنفرد A باشد، $\frac{1}{\lambda_i}$ مقدار ویژه ماتریس A^{-1} است.
- دستور d = eig(A) ، [v,d] = eig(A) و poly(A) در نرم افزار MATLAB وجود دارد.

تعیین علامت ماتریس متقارن و مقادیر ویژه ماتریس

- مقادیر ویژه ماتریس متقارن اعداد حقیقی هستند.



- در سایر موارد علامت ماتریس نامعین است.

برخی از کاربردهای مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

- قطری سازی ماتریس ها ← Modal Matrix
- حل دستگاه معادلات دیفرانسیل
- تشخیص هویت ← Facial Recognition , Eigenfaces & Eigenvoices
- تحلیل و طراحی سیستمها ← Modern Control , Stability
- فشرده سازی تصاویر ← Image Compression
- زمین شناسی و اکتشاف نفت
- تحلیل ارتعاش سازه ها ← Natural Frequency , Eigenfrequency
- تئوری گراف ← Searching the Web , Ranking Theory

⋮

مثال۱

برای ماتریس A معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 3 & -5\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A با استفاده از رابطه $|\lambda I-A|=0$ بدست می آید،

$$|\lambda I_2-A|=\begin{vmatrix}\lambda+4 & -2\\ -3 & \lambda+5\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \lambda^2+9\lambda+14=0$$

با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$\lambda^2+9\lambda+14=(\lambda+7)(\lambda+2)=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=-7,\lambda_2=-2$$

بنابراین ماتریس A دو مقدار ویژه حقیقی متمایز یا غیر تکراری دارد. برای محاسبه بردارهای ویژه متناظر با هر یک از مقادیر ویژه بصورت زیر عمل می کنیم،

روش اول: استفاده از تعریف بردار ویژه،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i\rightarrow(\lambda_i I\text{ - }A)\mathbf{v}_i=0\rightarrow\begin{bmatrix}\lambda_i+4 & -2\\ -3 & \lambda_i+5\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-7\rightarrow\begin{bmatrix}-3 & -2\\ -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\rightarrow -3x_1-2x_2=0\rightarrow x_1=\frac{-2}{3}x_2\rightarrow\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=-2\rightarrow\begin{bmatrix}2 & -2\\ -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\rightarrow 2x_3-2x_4=0\rightarrow x_3=x_4\rightarrow\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

روش دوم: استفاده از ماتریس الحاقی،

$$\text{Adj}(\lambda I-A)=\text{Adj}\begin{bmatrix}\lambda+4 & \text{-}2\\ \text{-}3 & \lambda+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+5 & 2\\ 3 & \lambda+4\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-7\quad\rightarrow\quad\text{Adj(-7I - }A)=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 3 & -3\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=-2\quad\rightarrow\quad\text{Adj(-2I - }A)=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

می توان نشان داد که در این حالت بردارهای ویژه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ مستقل خطی هستند، برای این منظور دترمینان ماتریس $[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]$ را بدست می آوریم،

$$\begin{vmatrix}2 & 2\\ -3 & 2\end{vmatrix}=4-(-6)=10$$

از آنجائیکه مقدار دترمینان مخالف صفر است، لذا بردارهای ویژه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ مستقل خطی هستند.

قضیه

- اگر یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای n مقدار ویژه متمایز باشد، آنگاه n بردار ویژه مستقل خطی وجود خواهد داشت.

۷

اثبات:

بردارهای ویژه نظیر $\rightarrow$ $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ و مقادیر ویژه متمایز $\rightarrow$ $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$

فرض کنیم فقط k تا از این بردارها مستقل خطی باشند،

$$\mathbf{v}_{k+1}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k \qquad (1)$$

طرفین رابطه (1) را در A ضرب می کنیم،

$$A\mathbf{v}_{k+1}=\alpha_1A\mathbf{v}_1+\alpha_2A\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_kA\mathbf{v}_k$$

می دانیم $A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i$ ،

$$\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}=\alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\lambda_2\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k\lambda_k\mathbf{v}_k \qquad (2)$$

اگر طرفین رابطه (1) را در λ_{k+1} ضرب کنیم،

$$\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}=\alpha_1\lambda_{k+1}\mathbf{v}_1+\alpha_2\lambda_{k+1}\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k\lambda_{k+1}\mathbf{v}_k \qquad (3)$$

حال رابطه $(2)-(3)$ را بدست می آوریم،

$$\alpha_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)\mathbf{v}_1+\alpha_2(\lambda_{k+1}-\lambda_2)\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$$

طبق فرض $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ مستقل خطی و مقادیر ویژه مجزا هستند، لذا باید،

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$$

بنابراین طبق رابطه (1) باید $\mathbf{v}_{k+1}=\mathbf{0}$ باشد که با شرط $\mathbf{v}_{k+1}\neq\mathbf{0}$ بردار ویژه منافات دارد.

پس نمی توان $\mathbf{v}_{k+1}$ را بصورت ترکیب خطی از $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ نوشت و $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ مستقل خطی هستند.

۸

نکته:

- اگر ماتریس $A_{n\times n}$ یک مقدار ویژه تکراری λ_i از مرتبه k داشته باشد، آنگاه حداقل یک و حداکثر k بردار ویژه مستقل خطی متناظر با این مقدار ویژه تکراری λ_i وجود خواهد داشت.

- تعداد بردارهای مستقل خطی در این حالت برابر با $\boxed{n-\text{rank}(A-\lambda_i I)}$ است.

مثال۲

برای ماتریس A معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}6 & 3 & -8\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6 & -3 & 8\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda+3\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \lambda^3-\lambda^2-16\lambda-20=0$$

با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$\lambda^3-\lambda^2-16\lambda-20=(\lambda+2)^2(\lambda-5)=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_{1,2}=-2,\lambda_3=5$$

بنابراین ماتریس A دو مقدار ویژه حقیقی تکراری و یک مقدار ویژه متمایز دارد. حال بردارهای ویژه متناظر با هر یک از مقادیر ویژه را با روش ماتریس الحاقی محاسبه می کنیم،

$$\text{Adj}(\lambda I-A)=\text{Adj}\begin{bmatrix}\lambda-6 & -3 & 8\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^2+5\lambda+6 & 3\lambda+9 & -8\lambda-16\\ 0 & \lambda^2-3\lambda-10 & 0\\ \lambda+2 & 3 & \lambda^2-4\lambda-12\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=5 \quad\rightarrow\quad \text{Adj(5I - }A)=\begin{bmatrix}56 & 24 & -56\\ 0 & 0 & 0\\ 7 & 3 & -7\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}24\\ 0\\ 3\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-2 \quad\rightarrow\quad \text{Adj(-2I - }A)=\begin{bmatrix}0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}3\\ 0\\ 3\end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $n-\text{rank}(A-\lambda_1 I)=3-2=1$ است، لذا برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2}=-2$ فقط یک بردار ویژه مستقل خطی داریم.

مثال ۳

برای ماتریس A معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -2 & 1\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=0 \quad\to\quad \lambda^3+5\lambda^2+9\lambda+6=0$$

پس از حل معادله مشخصه مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda^3+5\lambda^2+9\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda^2+3\lambda+3)=0 \quad\to\quad \lambda_1=-2, \lambda_{2,3}=\tfrac{-3}{2}\pm j\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین ماتریس A یک مقدار ویژه حقیقی و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد.

بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه را با استفاده از تعریف بردار ویژه بدست می آوریم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i \to \begin{bmatrix}\lambda+1 & -2 & 1\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda+2\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-2 \to \begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \to \begin{cases}-x_1-2x_2+x_3=0\\ -x_1=0\end{cases} \to \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=\tfrac{-3}{2}+j\tfrac{\sqrt{3}}{2} \to \begin{bmatrix}\frac{-1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} & -2 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -1 & 0 & \frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \to \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\ \frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=\tfrac{-3}{2}-j\tfrac{\sqrt{3}}{2} \to \begin{bmatrix}\frac{-1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} & -2 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -1 & 0 & \frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_7\\x_8\\x_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \to \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\ \frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

قضیه کیلی- هامیلتون (Cayley - Hamilton)

هر ماتریس مربعی مانند $A_{n\times n}$ در معادله مشخصه خود صدق می کند.

اگر معادله مشخصه بصورت زیر باشد،

$$\boxed{|\lambda I - A| = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n}$$

آنگاه داریم،

$$\boxed{\mathbf{0} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1}A^{n-1} + A^n}$$

اثبات قضیه کیلی- هامیلتون

برای ماتریس $A_{n\times n}$ معادله مشخصه بصورت زیر است،

$$|\lambda I - A| = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n \qquad (1)$$

ماتریس الحاقی را می توان بصورت چندجمله ای ماتریس با درجه $n-1$ نمایش داد،

$$Adj(\lambda I - A) = B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1} \qquad (2)$$

$B_0,\ldots,B_{n-1}$ ماتریس های $n\times n$ هستند.

از طرفی داریم،

$$(\lambda I - A)Adj(\lambda I - A) = |\lambda I - A| I \qquad (3)$$

رابطه (1) و (2) را در رابطه (3) جایگذاری می کنیم،

$$(\lambda I - A)(B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}) = (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n)I$$

با مساوی قرار دادن ضرایب طرفین و ضرب معادلات در $I, A, A^2,\ldots,A^{n-1},A^n$ داریم،

$$\begin{array}{llll}
-AB_0 = \alpha_0 I & \rightarrow \; I\times & \rightarrow & -AB_0 = \alpha_0 I \\
B_0 - AB_1 = \alpha_1 I & \rightarrow \; A\times & \rightarrow & AB_0 - A^2B_1 = \alpha_1 A \\
B_1 - AB_2 = \alpha_2 I & \rightarrow \; A^2\times & \rightarrow & A^2B_1 - A^3B_2 = \alpha_2 A^2 \\
\quad\vdots & \quad\;\; \vdots & & \quad\vdots \\
B_{n-2} - AB_{n-1} = \alpha_{n-1} I & \rightarrow \; A^{n-1}\times & \rightarrow & A^{n-1}B_{n-2} - A^nB_{n-1} = \alpha_{n-1}A^{n-1} \\
B_{n-1} = I & \rightarrow \; A^n\times & \rightarrow & A^nB_{n-1} = A^n
\end{array}$$

حال طرفین معادلات را با هم جمع می کنیم،

$$\mathbf{0} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1}A^{n-1} + A^n$$

مثال۴ **کاربرد قضیه کیلی- هامیلتون در محاسبه ماتریس معکوس**

قضیه کیلی- هامیلتون را برای ماتریس A بررسی کنید و سپس با استفاده از آن مقدار A^{-1} را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه برای ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-6 & -16 \\ 1 & \lambda+4 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

حال ماتریس A را در این معادله قرار داده و حاصل را محاسبه می کنیم،

$$A^2 - 2A - 8I_2 = \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}^2 - 2\begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 32 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 32 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب صحت قضیه کیلی- هامیلتون تصدیق می شود.

برای محاسبه A^{-1} می توان بصورت زیر عمل کرد،

$$A^2 - 2A - 8I_2 = 0 \rightarrow \quad \frac{1}{8}(A^2 - 2A) = I = AA^{-1} \rightarrow \quad \frac{1}{8}A(A-2I) = AA^{-1}$$

بنابراین A^{-1} بصورت زیر محاسبه می شود،

$$A^{-1} = \frac{1}{8}(A-2I) \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{-1}{8} & \frac{-3}{4} \end{bmatrix}$$

مثال ۵ کاربرد قضیه کیلی- هامیلتون در محاسبه چندجمله ای های ماتریسی

ماتریس A را در نظر بگیرید و چند جمله ای $P(A)$ را برای آن بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix} \quad , \quad P(A)=A^5+16A^4+32A^3+16A^2+4A+I$$

روش اول: جایگذاری مستقیم،

با قرار دادن ماتریس A در چندجمله ای مذکور جواب را بدست می آوریم،

$$P(A)=\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}^5+16\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}^4+32\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}^3+16\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}^2+4\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P(A)=\begin{bmatrix}1376 & 2816\\ -176 & -384\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5376 & 10240\\ -640 & -1024\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2816 & 6144\\ -384 & -1024\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}320 & 512\\ -32 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}24 & 64\\ -4 & -16\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P(A)=\begin{bmatrix}9913 & 19776\\ -1236 & -2447\end{bmatrix}$$

همانطور که مشخص است این روش مستلزم توان رسانی های متعدد برای ماتریس A است و استفاده از آن برای چند جمله ای های مرتبه بالا بسیار دشوار می باشد.

روش دوم: استفاده از قضیه کیلی- هامیلتون،

فرض کنید $P(\lambda)$ یک چندجمله ای مرتبه m و $Q(\lambda)$ چندجمله ای مشخصه ماتریس A باشد. حاصل تقسیم $\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}$ را می توان بصورت زیر بیان کرد،

$$\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}=F(\lambda)+\frac{R(\lambda)}{Q(\lambda)} \quad \rightarrow \quad P(\lambda)=F(\lambda)Q(\lambda)+R(\lambda)$$

که در آن، $F(\lambda)$ خارج قسمت و $R(\lambda)$ باقیمانده تقسیم می باشند. حال اگر $\lambda=\lambda_i$ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد، $Q(\lambda_i)=0$ خواهد بود و رابطه بالا بصورت زیر قابل نوشتن است،

$$P(\lambda_i)=F(\lambda_i)Q(\lambda_i)+R(\lambda_i)\rightarrow P(\lambda_i)=R(\lambda_i)$$

حال با توجه به قضیه کیلی- هامیلتون می توان نوشت،

$$P(A)=R(A)$$

یعنی می توان بجای جایگذاری ماتریس A در چند جمله ای مرتبه بالا $P(A)$ می توان از چندجمله ای $R(A)$ استفاده کرد که به مراتب درجه کمتری دارد.

حال با این مقدمه حاصل چند جمله ای $P(A)$ را بدست می آوریم، برای این منظور دو راه کار وجود دارد،

۱- با انجام تقسیم دو چندجمله ای،

۲- بدون انجام تقسیم چند جمله ای،

۱- با انجام تقسیم چندجمله ای،

در این روش ابتدا تقسیم $\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}$ را انجام داده و چند جمله ای باقیمانده $R(\lambda)$ را بدست می آوریم،

$$P(\lambda)=\lambda^5+16\lambda^4+32\lambda^3+16\lambda^2+4\lambda+I \quad , \quad Q(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-8$$

$$R(\lambda)=1236\lambda+2497$$

با توجه قضیه کیلی- هامیلتون داریم،

$$P(A)=R(A)$$

$$P(A)=1236A+2497I=1236\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}+2497\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9913 & 19776\\ -1236 & -2447\end{bmatrix}$$

۲- بدون انجام تقسیم چند جمله ای،

در این روش تقسیم $\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}$ انجام نمی شود. با توجه به مرتبه چند جمله ای مشخصه، بدیهی است که چندجمله ای باقیمانده $R(\lambda)$ از مرتبه یک می باشد. لذا آن را بصورت کلی زیر در نظر می گیریم،

$$R(\lambda)=c_1\lambda+c_0$$

حال مقدار c_1 و c_0 را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=4\rightarrow R(\lambda_1)=P(\lambda_1)=c_0+c_1\lambda_1\rightarrow 7441=c_0+4c_1$$

$$\lambda_2=-2\rightarrow R(\lambda_2)=P(\lambda_2)=c_0+c_1\lambda_2\rightarrow 25=c_0-2c_1$$

لذا با حل این دستگاه معادلات مقدار $c_1=1236$ و $c_0=2497$ بدست می آید.

$$R(\lambda)=1236\lambda+2497$$

و با توجه قضیه کیلی- هامیلتون می توان نوشت،

$$P(A)=R(A)$$

$$P(A)=1236A+2497I=1236\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}+2497\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9913 & 19776\\ -1236 & -2447\end{bmatrix}$$

مثال ۶

ماتریس A را در نظر بگیرید و چند جمله ای $P(A)$ را به کمک قضیه کیلی- هامیلتون برای آن بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix} \quad , \quad P(A)=A^5+16A^4+32A^3+16A^2+4A+I$$

ابتدا معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس را بدست می آوریم،

$$|\lambda I-A|=Q(\lambda)=(\lambda-2)^3 \quad \rightarrow \quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$$

با توجه به اینکه $Q(\lambda)$ مرتبه سه است، چندجمله ای باقیمانده تقسیم $P(\lambda)$ بر $Q(\lambda)$ چندجمله ای مرتبه دو خواهد بود،

$$R(\lambda)=c_2\lambda^2+c_1\lambda+c_0$$

حال مقدار c_1,c_2 و c_0 را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=2\rightarrow R(\lambda_1)=P(\lambda_1)=c_0+c_1\lambda_1+c_2\lambda_1\rightarrow P(2)=c_0+2c_1+4c_2$$

چون مقادیر ویژه تکراری هستند برای دو مقدار ویژه بعدی معادله جدیدی بدست نمی آید. در این مواقع از مشتقات $R(\lambda)$ کمک می گیریم. در این مسئله دو معادله دیگر باید بدست آوریم لذا از مشتق مرتبه اول و دوم $R(\lambda)$ استفاده می کنیم،

$$\dot{R}(\lambda)=2c_2\lambda+c_1$$
$$\ddot{R}(\lambda)=2c_2$$

حال داریم،

$$\lambda_1=2\rightarrow \dot{R}(\lambda_1)=\dot{P}(\lambda_1)=c_1+2c_2\lambda_1\rightarrow \dot{P}(2)=c_1+4c_2$$
$$\lambda_1=2\rightarrow \ddot{R}(\lambda_1)=\ddot{P}(\lambda_1)=2c_2$$

لذا مقدار c_1,c_2 و c_0 از حل دستگاه معادلات زیر بدست می آید،

$$\begin{cases}c_0+2c_1+4c_2=P(2)=617\\c_1+4c_2=\dot{P}(2)=1044\\2c_2=\ddot{P}(2)=1344\end{cases} \quad \rightarrow \quad c_0=-4159, \quad c_1=-1644, \quad c_2=672$$

بنابراین داریم،

$$R(\lambda)=672\lambda^2-1644\lambda-4159$$

و با توجه قضیه کیلی- هامیلتون می توان نوشت،

$$P(A)=R(A)$$
$$P(A)=672A^2-1644A-4159I=\begin{bmatrix}-4759&1044&672\\0&-4759&1044\\0&0&-4759\end{bmatrix}$$