لم اسپرنر، نقطه ثابت براور و توزیع منصفانه کیک

اسماعیل نادری
دکتر امید نقشینه ارجمند
مباحثی در ریاضیات و کاربردها : حل مساله
۲۹ دی ۱۳۹۶

چکیده

قضیه نقطه ثابت براور فرمول بندی های معادل و کاربردهای زیادی از جمله اثبات وجودی نقطه تعادل نش دارد . اسپرنر در سال ۱۹۲۸ لم ترکیبیاتی اسپرنر در مورد برچسب بندی های مثلث ها را اثبات کرد و نکته جالب ارتباط میان این دو است که به نوعی راهی بین فضای گسسته و پیوسته است. در ابتدا لم اسپرنر و قصیه نقطه ثابت براور را بیان و در ادامه اثبات خواهیم کرد، پس از آن کاربردی از لم اسپرنر در مسایل اقتصادی را بیان خواهیم کرد، که اثبات آن مطلب مشابه اثبات نقطه ثابت براور به کمک لم اسپرنر است. تغییر کوچک در استدلال همان اثبات باعث حل مساله ای جالب می شود.

۱ لم اسپرنر[1]

مثلث بندی تقسیم یک مثلث به تعدادی مثلث کوچک‌تر است . مثلث های کوچک‌تر زیر مثلث نامیده می شوند. شرط لازم دیگر این است که هرضلع باید بین دقیقا دو مثلث قرار بگیرد.

برچسب دهی اسپرنر برچسب دهی به راس های یک مثلث بندی با اعداد ۱,۲,۳ است با شروط:

۱. .سه گوشه به ترتیب با ۱,۲,۳ برچسب داده شده اند.

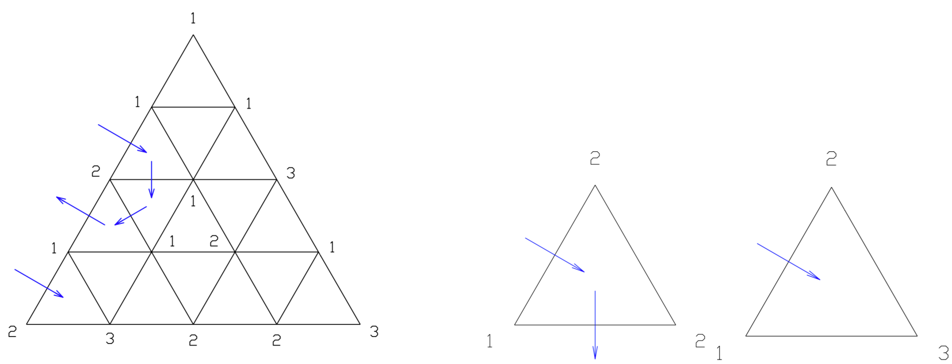
۲. هر راس روی خطی که گوشه i را به گوشه j وصل می کند شماره i یا j را دارد.

لم ۱ *اگر یک مثلث بندی برچسب دهی اسپرنر داشته باشد، آن گاه یک مثلث کوچک با راس های ۱ـ۲ـ۳ دارد.*

اثبات. در ابتدا نیاز به این گزاره ساده داریم که تعداد ضلع های ۱ـ۲ روی مثلث بیرونی فرد است . برای اثبات این گزاره ضلع های مثلث بیرونی را با تفاضل برچسب اسپرنر دو انتهای ضلع مقداردهی کنید. ضلع های ۱ـ۲ مقدار ۱± می گیرند و ضلع های ۱ـ۱ یا ۲ـ۲ مقدار ۰ می گیرند . مجموع مقدار اضلاع برابر با تفاضل برچسب دو گوشه است که برابر با ۱± است که عددی فرد است . پس تعداد اضلاع ۱ـ۲ عددی فرد است.

[1] Sperner's lemma

حال به مثلث به عنوان یک خانه نگاه می کنیم که ضلع های ۱ ـ ۲ در هستند و می توانیم از آن ها بگذریم . یک مسیر که از بیرون مثلث شروع می‌شود را در نظر می گیریم. این مسیر یا از مثلث خارج می شود و یا در یک مثلث ۱ ـ ۲ ـ ۳ پایان می‌یابد. توجه کنید که اگر درِ ابتدایی مسیر تعیین شود، مسیر یکتا بدست می آید؛ زیرا هیچ مثلثی سه ضلع ۱ ـ ۲ ندارد. از این روهیچ گاه دومسیر در یک خانه به همدیگر نمی رسند، مگر این که آن دومسیر یکسان باشند و فقط جهتشان برعکس باشد. اگر از جهت مسیر صرف نظر کنیم هیچ دومسیری همدیگر را قطع نخواهند کرد.[۲]



شکل ۱: به مثلث ۱ ـ ۲ ـ ۳ فقط می توان یک بار وارد شد اما به مثلث ۱ ـ ۲ ـ ۲ می توان یک بار وارد و خارج شد.

همه مسیر ها را در نظر بگیرید. مسیری که از مثلث خارج می شود یک زوج ضلع ۱ ـ ۲ را به هم تناظر می کند. از آن جایی که تعداد ضلع های ۱ ـ ۲ فرد است . پس باید ضلع ۱ ـ ۲ ای وجود داشته باشد که انتهای مسیرش به یک مثلث ۱ ـ ۲ ـ ۳ ختم شود . ◇

۲ نقطه ثابت براور[۳]

قضیه ۲ *B^n گوی nـ بعدی در فضای اقلیدسی R^n است (تعمیم دیسک واحد، مجموعه $\{x \in R^n : \| x \| \leq ۱\}$). هر تابع $f : B^n \to B^n$ حداقل یک نقطه ثابت دارد ($f(x) = x$).*

اثبات این قضیه به ازای $n = ۱$ به کمک قضیه مقدارمیانی امکان پذیر می باشد. در ابعاد بالاتر اثبات چندان ساده نیست اما مشابه اثبات در حالت $n = ۲$ به کمک لم اسپرنر می توان آن ها را نیز اثبات کرد . این ایده در قسمت بعدی توضیح داده می شود.

[۲] این خاصیت مسیرمشابه ویژگی مسیر مساله هگز می باشد .

[3] Brouwer Fixed Point

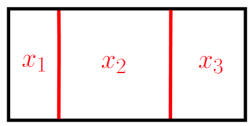
۳ توزیع منصفانه کیک

برای توزیع منصفانه کیک بین دو نفر یک برش کافی است به این شکل که فردی کیک را به دو قسمت تقسیم می کند و فرد دیگر یکی از قسمت ها را انتخاب می کند. این روش باعث می شود که نفر اول طوری کیک را ببرد که تکه های به دست آمده برایش تفاوتی نداشته باشند و همینطور نفر دوم خودش تکه اش را انتخاب می کند، پس این یک توزیع **بدون حسادت** است .

حال سوال این است که آیا یک توزیع بدون حسادت کیک بین ۳ نفر داریم ؟ آن قدر بدیهی نیست، ولی با فرض چند نکته اثبات می کنیم چنین توزیعی وجود دارد.[۴]

برای این توزیع نیاز به دو برش داریم که با عبارات زیر آن را ها را نشان می دهیم. یک برش کیک، یک نقطه (x_1, x_2, x_3) است که x_i اندازه قطعه iم کیک است.

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \quad (0 \leq x_i \leq 1)$$



شکل ۲: برش کیک به ۳ قسمت

اسم افراد را A, B, C می نامیم. T فضای همه ی برش های ممکن کیک، یک مثلث در R^3 است. مختصات راس های T برابر با $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ است. حال چند فرض کلی در مورد ترجیحات افراد می کنیم.

فرض ها

۱. افراد **عاقل** هستند به این معنا که قطعه یا قطعه های انتخابی آن ها در یک برش کیک تنها به این بستگی دارد که کدام قطعه را ترجیح می دهند و نه به انتخاب دیگران. این را درنظر بگیرید که به ازای هر برش کیک هر نفر حداقل یک قطعه را انتخاب می کند(ترجیح میدهد).

۲. افراد **گرسنه** هستند به این معنا که هر چیزی را به هیچ ترجیح می دهند.(هرقطعه با اندازه بزرگ تر از صفر را به قطعه صفر ترجیح می دهند).

۳. مجموعه انتخاب‌ها بسته است. اگریک نفر یک تکه را در یک دنباله از برش کیک های همگرا انتخاب کند در نقطه حدی هم‌آن را انتخاب می‌کند.

توجه کنید که یک قطعه لزوما برحسب اندازه اش انتخاب نمی شود . ممکن است یک نفر قطعه ای را که شکلات بیشتری داشته باشد را ترجیح دهد. تنها فرض در مورد اندازه تکه ها همان فرض ترجیح هرچیزی بر صفر است .

با درنظرگرفتن این فرض‌ها می‌خواهیم ثابت کنیم یک برش‌کیک بدون‌حسادت وجود دارد(یک قطعه متمایز درانتخاب های هر نفر در آن برش موجود باشد.)

[۴] در واقع بدون درنظرگرفتن هیچ فرضی چنین چیزی ممکن نیست یک مثال بدیهی این است که هرکدام از سه نفر دقیقا مانند یک‌دیگر در هر برش تکه ۱ را ترجیح دهند.

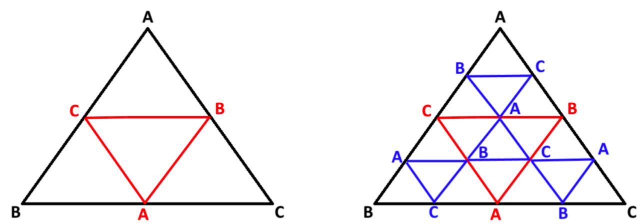
تعریف ۳ *به ازای هر* $\alpha = A, B, C$ *و* $x = (x_۱, x_۲, x_۳) \in T$ *تعریف می کنیم* $C_\alpha(x)$ *زیرمجموعه ای از* $\{۱, ۲, ۳\}$ *باشد. به* C_α *یک* ***تابع انتخاب*** *می گوییم اگر :*

۱. $\forall x \in T \quad C_\alpha(x) \neq \emptyset$

۲. *به ازای هر* $x = (x_۱, x_۲, x_۳)$ *اگر* $x_i = ۰$ *باشد آن گاه* $i \notin C_\alpha(x)$

۳. C_α *پیوسته است.*

اگر $i \in C_\alpha(x)$ باشد می گوییم فرد α قطعه iام را در برش کیک x انتخاب می‌کند.



شکل ۳: مثلث بندی با راس های متمایز

لم ۴ *مثلث بندی به اندازه دلخواه کوچک وجود دارد که هر راس از مثلث بندی با* A, B, C *برچسب داده شده باشد و راس های هر زیرمثلث برچسب های متمایز داشته باشند.*

اثبات. T را به این صورت برچسب می دهیم: راس $(۱, ۰, ۰)$ را با A، راس $(۰, ۱, ۰)$ را با B، و راس $(۰, ۰, ۱)$ را با C برچسب می زنیم.
وسط اضلاع مثلث را دو به دو به هم متصل می‌کنیم تا یک مثلث کوچک ایجاد شود و آن را مطابق شکل برچسب می دهیم . حال چهار مثلث با برچسب های متمایز در راس های هر کدام داریم . برای هر کدام از مثلث ها همین روند را تکرار می‌کنیم . (نقاطی که بین دو مثلث مشترک هستند هم طبق این برچسب دهی برچسب یکسان می‌گیرند چون راس وسط هر ضلع برچسب راس مقابلش را می‌گیرد.)
طبق روش گفته شده به ازای هر $n \in N$ مثلث بندی $\mathcal{T}_n$ از T داریم که زیر مثلث ها مثلث های متساوی الاضلاع و از نظر اندازه برابر هستند . همچنین داریم اگر n به بی نهایت میل کند اندازه اضلاع به صفرمیل می کند. علاوه براین راس های هر مثلث با A, B, C برچسب داده شده‌اند. $\diamond$

قضیه ۵ C_A, C_B, C_C *تابع های انتخاب روی* T *هستند . نقطه* $x \in T$ *و* α, β, γ *متمایز روی* A, B, C *وجود دارد که* $۱ \in C_\alpha(x), ۲ \in C_\beta(x), ۳ \in C_\gamma(x)$ *باشد. در نقطه* $x \in T$ *هرکس می تواند یک قطعه کیک که دوست دارد را انتخاب کند، پس یک توزیع بدون حسادت است.*

اثبات. برچسب دهی دیگری با برچسب های ۱, ۲, ۳ برای $\mathcal{T}_n$ تعریف می کنیم به این صورت که اگر راس v برچسب α داشته باشد به آن برچسب دوم i می دهیم که $i \in C_\alpha(v)$.
ادعا می کنیم برچسب دهی دوم یک برچسب دهی اسپرنر است.

۱. در راس های گوشه ای مثلث اصلی تنها تکه انتخابی A, B, C در (۱, ۰, ۰) برابر با ۱ در (۰, ۱, ۰) برابر با ۲ و در (۰, ۰, ۱) برابر با ۳ است. پس برچسب هایی متمایز انتخاب شده اند و مثلث اصلی ۱ـ۲ـ۳ است.

۲. حال ضلعی از T را در نظر بگیرید که که راس های (۱, ۰, ۰)و (۰, ۱, ۰) را به هم متصل می کند. مختصات راس های این ضلع $(x_1, x_2, 0)$ است. در این مختصات هیچ کدام از A, B, C قطعه شماره ۳ را انتخاب نمی کنند، زیرا اندازه تکه۳م صفر است. برای ضلع های دیگر هم این برقرار است یعنی برچسب دوم راس های روی هر ضلع برابر با برچسب راس مقابل آن ضلع نیست .

پس برچسب دهی دوم یک برچسب دهی اسپرنر است . حال طبق لم اسپرنر در $\mathcal{T}_n$ حداقل یک مثلث ۱ـ۲ـ۳ وجود دارد . زیرمثلث ۱ـ۲ـ۳ $\mathcal{T}_n$ را T_n می نامیم. برچسب راس های T_n، (A, B, C) است و برچسب های دوم آن (۱, ۲, ۳) است . حال فرض کنید A برچسب ۱، B برچسب ۲ و C برچسب ۳ داشته باشد . به T_n برچسب کلی $A1B2C3$ میدهیم.
این برچسب دهی به معنای این است که در یک راس از T_n، A تکه ۱ را در برش کیک آن راس از مثلث انتخاب می کند و در راسی دیگر B تکه ۲ را در برش‌کیک آن راس انتخاب می کند و در راس آخر C تکه ۳ را در برش کیک متناظرش انتخاب می کند. هنوز به یک برش‌کیک بدون‌حسادت نرسیدیم . توجه کنید که سه نقطه متمایز یافتیم که در هر کدام هر فرد قطعه ای متمایز را انتخاب می کند . اگر مثلث ۱ـ۲ـ۳ را کوچک تر کنیم، می توانیم به توزیع کیک موردنظر از طریق حد دادن برسیم.
توجه کنید که ۶ نوع برچسب دهی کلی برای T_n وجود دارد:

$$(A1, B2, C3), (A1, B3, C2), (A2, B1, C3), (A2, B3, C1), (A3, B1, C2), (A3, B2, C1)$$

از آنجایی که تعداد T_n ها نامتناهی است و تعداد برچسب‌ها متناهی است پس برچسبی وجود دارد که نامتناهی بار تکرار شده است . بدون کاسته‌شدن از کلیت مساله فرض می کنیم آن توزیع $(A1, B2, C3)$ باشد. دنباله زیرمثلث هایی که توزیع $(A1, B2, C3)$ داشته باشند را در نظر می گیریم . v_i راسی از زیرمثلث T_i است که برچسب A دارد. دنباله این راس ها را در نظرمی گیریم $v_1, v_2, v_3, \ldots$. از آنجایی که این یک دنباله در فضای بسته و کران دار T است پس زیر دنباله‌ی همگرا به نقطه v دارد. زمانی که n به بی نهایت میل می کند فاصله بین راس های مثلث ها به صفر میل می‌کند پس زیر دنباله متناظر راس های B, C هم به v میل می کنند. از آن‌جایی که تابع انتخاب A پیوسته است در نقطه حدی v، A قطعه یک را انتخاب می کند و به همین ترتیب C, B قطعه های ۲ و ۳ را انتخاب می کنند. v یک برش کیک است که A, B, C سه قطعه متمایز را ترجیح می‌دهند.
پس می توانیم برش کیکی در T بیابیم که توزیع بدون حسادت داشته باشد. ◇

تعمیم ۶ *می توانیم به کمک لم اسپرنر در فضای n بعدی مساله توزیع کیک را بین $n+1$ نفر به طریق مشابه حل کنیم.*

مراجع

[1] Ayesha Maliwal. *Sperner's Lemma, The Brouwer Fixed Point Theorem , The Kakutani Fixed Point Theorem, and Their Applications in Social Sciences. 2016.* http://digitalcommons.library.umaine.edu/cgi

[2] Alex Wright. *Sperner's Lemma and Brouwer's Fixed Point Theorem.* 2005. https://web.stanford.edu/~amwright/BFPT.pdf

[3] Akhil Mathew. *Sperner's Lemma, Brouwer's Fixed-Point Theorem, And The Subdivision Of Squares Into Triangles.* 2010. http://math.uchicago.edu/~amathew/HMMT.pdf

اگر اشکالی در این نوشته یافتید یا نکته ای مناسب دانستید، نگارنده خوشحال می شود از طریق لینک های زیر با او در میان بگذارید!

inaderi.blog.ir
inaderi268@gmail.com