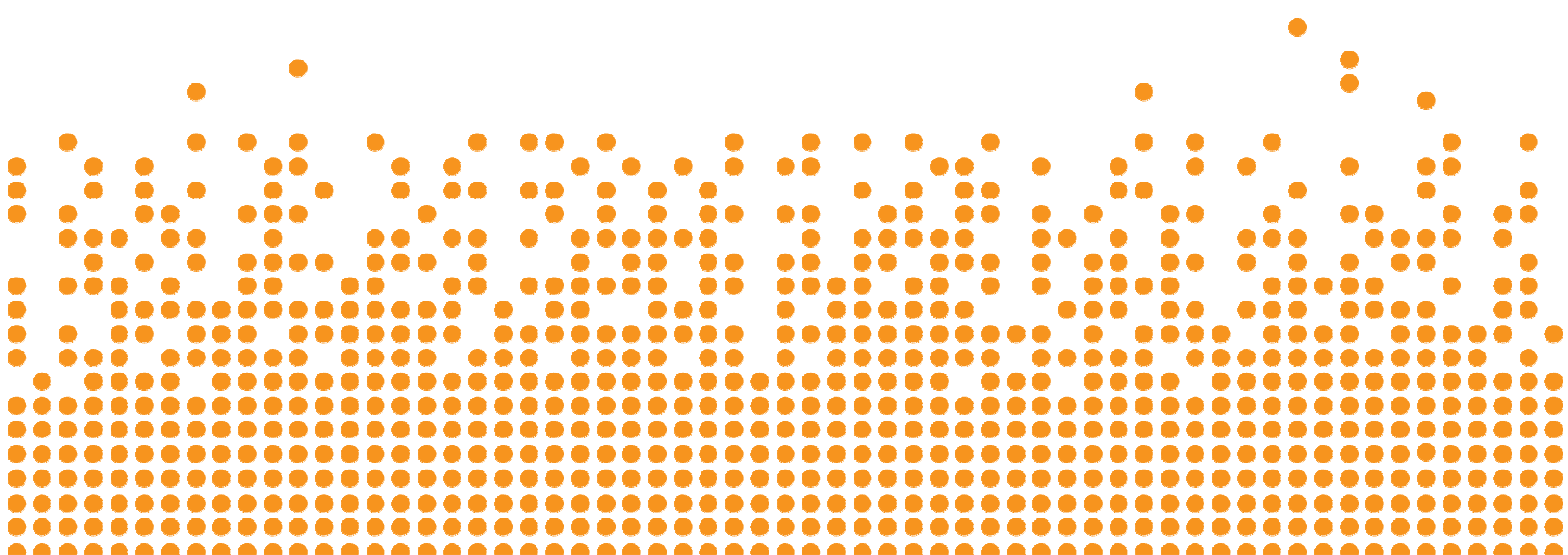
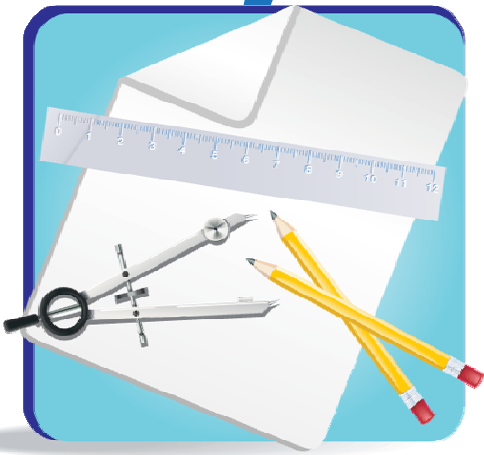


ریاضی ۲

فصل ۷ ●



آنالیز ترکیبی:

آنالیز ترکیبی شاخه‌ای از ریاضیات است که در آن روش‌هایی برای به‌دست آوردن تعداد حالات ممکن برای انجام یک عمل، بدون شمارش معرفی می‌گردد.

فاکتوریل:

اگر n یک عدد طبیعی باشد:

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 1$$

$$\text{نتیجه: } n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \dots$$

$$0! = 1 \text{ : قرارداد}$$

اصل جمع:

اگر عملی به n_1 طریق و عمل دیگری به n_2 طریق قابل انجام باشد و انجام همزمان این دو عمل، غیرممکن باشد، تعداد حالات انجام عمل اول یا عمل دوم برابر است با $n_1 + n_2$. مثلاً اگر هشت پیراهن آبی و ۱۲ پیراهن قرمز داشته باشیم به ۲۰ حالت می‌توانیم پیراهن بپوشیم.

اصل ضرب:

اگر عملی به n_1 طریق و عمل دیگری به n_2 طریق قابل انجام باشد، به فرض آنکه وقوع این اعمال بر یکدیگر تأثیری نداشته باشد تعداد حالات انجام همزمان این دو عمل برابر است با $n_1 \times n_2$. مثلاً اگر ۵ پیراهن و ۴ شلوار داشته باشیم به ۲۰ طریق می‌توان لباس پوشید.

جایگشت n شیء متمایز:

حالات مختلف قرار گرفتن n شیء متمایز در کنار یکدیگر را جایگشت آن n شیء می‌نامند. در واقع حالات جابه‌جاشدن n شیء در یک ردیف را جایگشت آن n شیء می‌نامند. مثلاً جایگشت سه حرف a, b, c عبارت است از abc, bac, cab و bca .

قضیه: تعداد جایگشت های n شیء متمایز که در یک ردیف قرار گرفته باشند برابر است با: $n!$

تذکر: در این درس هرگاه صحبت از جایگشت می‌شود، منظور تعداد جایگشتهاست.

مثال: با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ به چند طریق می‌توان عدد هفت رقمی زوج بدون تکراری نوشت.

حل:

برای آنکه عدد زوج باشد باید رقم سمت راست آن زوج باشد.

در حالتی که تکرار ارقام جایز نیست، باید نسبت به وضعیت صفر مسأله را به دو حالت تقسیم کرد. چون اگر صفر در

سمت چپ قرار بگیرد عدد هفت رقمی نخواهد بود لذا مسأله را در دو حالت بررسی می‌کنیم.

حالت اول حالتی است که صفر در سمت راست قرار دارد و لذا دیگر در سمت چپ قرار نخواهد گرفت و حالت دوم

حالتی است که ارقام زوج دیگر در سمت راست قرار بگیرند.

$$\left. \begin{array}{cccccc} \underline{6} & \underline{5} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} & \underline{1} \\ & & & & & & 0 \\ \underline{5} & \underline{5} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} & \underline{3} \\ & & & & & & 2 \\ & & & & & & 4 \\ & & & & & & 6 \end{array} \right\} \rightarrow \text{جواب} = 6! + 15 \times 5!$$

مثال: جواب مثال قبلی در حالتی که ارقام امکان تکرار شدن داشته باشند را به دست آورید.

حل:

$$\begin{array}{cccccccc} \underline{۶} & \underline{۷} & \underline{۷} & \underline{۷} & \underline{۷} & \underline{۷} & \underline{۷} & \underline{۴} \\ & & & & & & & \begin{array}{c} ۰ \\ ۲ \\ ۴ \\ ۶ \end{array} \end{array} \rightarrow \text{جواب} = ۶ \times ۷^5 \times ۴$$

در این حالت چون امکان تکرار وجود دارد، به دو حالت کردن مسأله نیاز نیست، چون هم‌چنان باید مواظب باشیم صفر در سمت چپ عدد قرار نگیرد.

مثال: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ چند عدد چهار رقمی بزرگ‌تر از ۳۵۰۰ می‌توان ساخت به طوریکه تکرار ارقام جایز باشد.

حل: با تقسیم کردن اعداد بزرگتر از ۳۵۰۰ به دو گروه خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{cccc} \underline{۱} & \underline{۳} & \underline{۸} & \underline{۸} \\ \underline{۳} & \underline{۵} & & \\ & \underline{۶} & & \\ & \underline{۷} & & \end{array} \\ \\ \begin{array}{cccc} \underline{۴} & \underline{۸} & \underline{۸} & \underline{۸} \\ \underline{۴} & & & \\ \underline{۵} & & & \\ \underline{۶} & & & \\ \underline{۷} & & & \end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{l} ۱ \times ۳ \times ۸ \times ۸ \\ \\ ۴ \times ۸ \times ۸ \times ۸ \end{array} \rightarrow \text{تعداد اعداد: } ۳ \times ۸^۲ + ۴ \times ۸^۳ - ۱$$

خود ۳۵۰۰ را نمی‌خواهد

مثال: با حروف کلمه «جمهوری» چند کلمه سه حرفی با حروف متمایز می‌توان تشکیل داد که حرف اولش نقطه نداشته باشد؟

حل:

$$\begin{array}{cccc} \underline{۴} & \underline{۵} & \underline{۴} & \rightarrow \\ & & \begin{array}{c} ۴ \\ ۵ \\ ۶ \\ ۷ \end{array} & \end{array} \rightarrow = ۴ \times ۵ \times ۴ = ۸۰$$

دقت کنید که «ی» در اول کلمه نقطه‌دار می‌شود.

مثال: تعداد حالتی که می‌توان چهار کتاب ریاضی مختلف و سه کتاب فیزیک مختلف را یک در میان در قفسه کنار هم قرار داد چقدر است؟ اگر چهار کتاب ریاضی و چهار کتاب فیزیک موجود بود جواب مسأله چه می‌شد؟

حل:

$$\begin{array}{cccccccc} \underline{۳} & \underline{۴} & \underline{۳} & \underline{۴} & \underline{۳} & \underline{۴} & \underline{۳} & \underline{۴} \\ & & & & & & & \begin{array}{c} ۳ \\ ۴ \end{array} \end{array} \rightarrow ۴! \times ۳!$$

$$\begin{array}{cccccccc} \underline{۳} & \underline{۴} & \underline{۳} & \underline{۴} & \underline{۳} & \underline{۴} & \underline{۳} & \underline{۴} \\ & & & & & & & \begin{array}{c} ۳ \\ ۴ \end{array} \end{array} \rightarrow ۴! \times ۴! \times ۲$$

می‌تواند ریاضی شروع کننده باشد یا فیزیک

مثال: چند عدد سه رقمی وجود دارد که شامل عدد ۲ باشد؟

حل: به جای دسته بندی مسأله به سه حالت بهتر است تنها حالت غیر قابل قبول را از بین حالات حذف کنیم:

$$\begin{array}{ccc} \underline{۸} & \underline{۹} & \underline{۹} \\ & & \begin{array}{c} ۸ \\ ۹ \end{array} \end{array} \text{ اعداد فاقد ۲: } ۸ \times ۹^۲$$

$$۲ \text{ شامل } ۲ = ۲۵۲ = ۹ \times ۲۸ = ۹(۱۰۰ - ۷۲) = ۹ \times ۹^۲ - ۸ \times ۹^۲ = ۹۰۰ - ۸ \times ۹^۲$$

مثال: اگر $A = \{2, 3, 4\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

الف) چند تابع از A به B می توان تعریف کرد؟

ب) چند تابع پوشاست؟

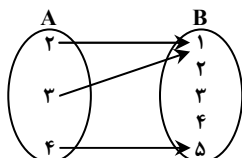
ج) چند تابع یک به یک است؟

د) چند تابع صعودی اکید است؟

که حل: الف)

$$f: A \rightarrow B \Rightarrow \text{تعداد توابع} = n^m = 5^3$$

$$D_f = A$$



مانند:

ب) تعداد توابع پوشا صفر است زیرا $n(A) < n(B)$ و به کمک ۳ عضو نمی توان ۵ عضو را پوشاند.

ج) اما تعداد توابع یک به یک: $\binom{5}{3} \times 3! = \frac{5!}{3!2!} \times 3! = 60$

د) تعداد توابع صعودی اکید: $\binom{5}{3} \times 1 = \frac{5!}{3!2!} = 10$

قضیه طناب پیچ:

تعداد جایگشت n شیء متمایز که در آن r شیء معین کنار هم قرار گرفته باشند برابر است با $(n-r+1)r!$ و تعداد

جایگشت های n شیء معین و متمایز که در آن r شیء معین کنار هم قرار نداشته باشند، برابر است با $n! - (n-r+1)r!$

مثال: با حروف a, b, c, d, e, f چند کلمه شش حرفی می توان نوشت به طوری که حتماً a, b کنار هم باشند و c, d کنار هم نباشند؟

که حل:

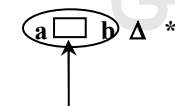
$ab, (c, d), e, f \rightarrow$ تعداد حالاتی که a, b کنار هم هستند $= 5! \times 2!$

$ab (cd) (e f) \rightarrow$ تعداد حالاتی که a, b کنار هم هستند و c, d کنار همند $= 4! \times 2! \times 2!$

$ab (cd) e f \rightarrow$ تعداد حالاتی که a و b کنار همند و c و d کنار هم نیستند $= 5! \times 2! - 4! \times 2! \times 2!$

مثال: ۵ نفر a, b, c, d, e می خواهند سخنرانی کنند. به چند حالت بین فرد a و b فقط یک نفر سخنرانی می کند؟

که حل:



۳ نفر می توانند بین a, b صحبت کنند

$$3! \times 2 \times 3 = 36$$

جایگشت ۳ شیء

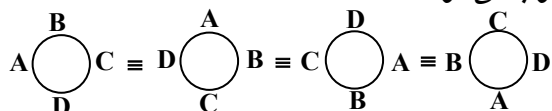
جابجا شدن a, b

افرادی که بین a, b صحبت می کنند

جایگشت با اشیاء دایره ای:

اگر ابتدا و انتهای یک صف را به هم متصل کنیم و یا n شیء را دور یک میزگرد قرار دهیم، جایگاه شروع و پایان بی معنی

می شود. در واقع چهار حالت زیر با هم معادلند و یک حالت محسوب می شوند:



لذا اگر اشیا به صورت دایره ای چیده شود فرد اولی که تصمیم به نشستن می گیرد، دارای ۱ انتخاب است چون بین مکانهای

نشستن هیچ تفاوتی نیست، اما بقیه افراد به نسبت این فرد، دارای مکان خواهند شد که $n-1$ نفر باقیمانده دارای $(n-1)!$

جایگشت هستند.

ج) با حرف T شروع شود و شامل S باشد؟

ابتدا ۲ عضو دیگر غیر از S را انتخاب کرده و سپس در کنار هم می‌چینیم.

$$\underline{T} \quad _ \quad _ \quad _ \quad _ \quad \left(\begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right) \times 3! \quad \{S, -, -\}$$

مثال: ۸ خط دو به دو متمایز حداکثر در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

حل: حداکثر تعداد نقاط تقاطع خطوط زمانی است که هر دو خط انتخابی همدیگر را در نقاط متمایز قطع کنند. پس تعداد حالات تقاطع دو خط حداکثر برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی که از بین این خطوط می‌توان انتخاب کرد:

$$\left(\begin{matrix} 8 \\ 2 \end{matrix} \right)$$

مثال: از میان پنج مهره قرمز و چهار مهره سفید به چند طریق می‌توان سه مهره انتخاب کرد به نحوی که دو مهره قرمز و یک مهره سفید باشد؟

$$\left(\begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right) = 40$$

قرمز سفید

حل: ۴۰

مثال: از بین ۵ مهره سفید متمایز، ۴ مهره آبی متمایز و ۳ قرمز متمایز به چند طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد و در یک ردیف قرار داد به طوری که هیچ دو مهره‌ای هم‌رنگ نباشند؟

$$\left(\begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right) \times 3! = 360$$

حل: ابتدا ۳ مهره را انتخاب می‌کنیم، سپس در کنار هم می‌چینیم: ۳۶۰

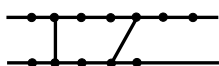
مثال: در یک امتحان دانش‌آموزی باید به هشت سؤال از میان ۱۰ سؤال پاسخ دهد. اگر پاسخ به چهار سؤال از پنج سؤال اول اجباری باشد، او به چند طریق می‌تواند به سؤالات پاسخ دهد؟

$$\left(\begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right) = 5 \times 5 + 10 = 35$$

حل: دو حالت امکان‌پذیر است که نهایتاً با هم جمع می‌کنیم: ۳۵

۵ سؤال از ۵ سؤال اول ۴ سؤال از ۵ سؤال اول

مثال: دو خط موازی داده شده‌اند. روی یکی از این خطها ۵ نقطه و روی دیگری ۷ نقطه قرار دارد. به چند طریق می‌توان با این نقاط، چهارضلعی ساخت؟



$$\left(\begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix} \right)$$

حل: ۲ نقطه از خط بالایی و ۲ نقطه از خط پایینی انتخاب می‌کنیم: $\left(\begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix} \right)$

مثال: در مسأله فوق تعداد مثلث‌ها برابر کدام است؟

حل: ۱۰



باید دو نقطه از بالایی انتخاب کنیم و یک نقطه از پایینی و یا

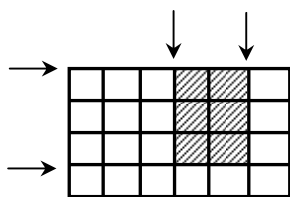
بالعکس

$$\left(\begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 7 \\ 1 \end{matrix} \right)$$

مثال: در شکل زیر چند مستطیل وجود دارد؟

حل: باید ۲ خط از بین خط‌های افقی و ۲ خط از بین خط‌های عمودی انتخاب

$$\text{کنیم: } \binom{5}{2} \binom{7}{2}$$



در حالت کلی در یک شبکه $m \times n$ تعداد مستطیل‌های موجود برابر است با: $\binom{m+1}{2} \binom{n+1}{2}$

مثال: از ۱۰ جفت کفش چگونه می‌توان سه لنگه انتخاب کرد به طوری که حتماً یک جفت در میان آنها باشد؟

حل: ابتدا ۲ جفت انتخاب کرده و یکی از جفت‌ها را برمی‌داریم. سپس از جفت باقی‌مانده یک لنگه انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{10}{2} \binom{2}{1} \binom{2}{1} = 180$$

راه ۲: ابتدا ۲ جفت برمی‌داریم، سپس ۳ لنگه را انتخاب می‌کنیم که حتماً بیش از ۱ جفت هست.

مثال: ۱۲ نفر متشکل از ۶ زوج زن و شوهر مفروض‌اند. به چند طریق می‌توان ۴ نفر از بین آنها انتخاب کرد به شرطی که

در بین آنها هیچ زن و شوهری یافت نشود؟

حل:

ابتدا ۴ زوج انتخاب می‌کنیم سپس از بین هر یک از این ۴ زوج یک نفر را انتخاب می‌کنیم، در این حالت حتماً هیچ زن و

شوهری با هم انتخاب نشده‌اند:

$$\binom{6}{4} \times \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1}$$

انتخاب ۴ زوج

مثال: سکه‌ای را آنقدر می‌اندازیم تا برای سومین بار رو بیاید. تعداد حالتی که می‌توان در ده پرتاب یک سکه به این منظور

رسید کدام است؟

$$\text{حل: باید از ۹ بار قبلی ۲ بار رو آمده باشد: } \binom{9}{2}$$

مثال: از بین ۸ نفر قبول شده المپیاد، ۳ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. تعداد عضوهای پیشامد آن که در آن فرد مشخصی

حتماً در بین انتخاب شدگان باشد کدام است؟

$$\text{حل: اگر فرد قبول شده حتماً در بین افراد باشد، کافی است دو نفر دیگر انتخاب کنیم: } \binom{7}{2}$$

مثال: تساویهای زیر را با مفاهیم و روابط ترکیب اثبات کنید.

$$\text{الف) } k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

اگر بخواهیم از بین جمعی n نفره، k نفر که یکی از آنها رییس باشد، انتخاب کنیم ۲ راه داریم:

$$1- \text{ اول } k \text{ نفر را انتخاب می‌کنیم. سپس ۱ نفر را از بین این } k \text{ نفر به عنوان رییس انتخاب می‌کنیم: } \binom{n}{k} \binom{k}{1}$$

$$2- \text{ یا اول ۱ نفر را به عنوان رییس انتخاب می‌کنیم و سپس از بین بقیه افراد، } k-1 \text{ نفر را انتخاب می‌کنیم: } \binom{n}{1} \binom{n-1}{k-1}$$

$$ب) \binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$$

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0} \binom{n}{k} + \binom{m}{1} \binom{n}{k-1} + \dots + \binom{m}{k} \binom{n}{0}$$

اگر بخواهیم از ۲ گروه m نفره و n نفره، k نفر را انتخاب کنیم به ۲ طریق امکان پذیر است.

$$۱- \text{همزمان } k \text{ نفر را انتخاب کنیم. } \binom{m+n}{k}$$

۲- از گروه اول و دوم به ترتیب افرادی انتخاب کنیم که جمعاً k نفر باشند.

k نفر از گروه دوم + ۰ نفر از گروه اول

$$\binom{m}{0} \binom{n}{k} + \dots + \binom{m}{k} \binom{n}{0}$$

صفر نفر از گروه دوم + k نفر از گروه اول

الگوهای پرکاربرد:

کنار هم پیدن اشیائی که بعضی از آنها نباید کنار هم قرار گیرند:

ابتدا اشیائی را که مانعی ندارد کنار هم باشند را می چینیم، سپس در فواصل بین و بیرون آنها اشیائی که نمی خواهیم کنار هم قرار گیرند را قرار می دهیم.

مثال: چند دنباله ۱۲ تایی متشکل از هفت حرف b و پنج حرف a می توان ساخت به طوری که هیچ یک از aها کنار هم نباشند؟

حل: ابتدا bها را می چینیم، سپس در فواصل به وجود آمده، aها را جایگزین می کنیم:

$$-b-b-b-b-b-b-b- \quad \left(\begin{matrix} 8 \\ 5 \end{matrix} \right) \text{ حالت}$$

مثال: با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ چند عدد هفت رقمی می توان نوشت به طوری که در هیچ یک از آنها دو رقم متوالی زوج نباشند؟

حل: ابتدا ارقام فرد را می چینیم و در بین آنها زوج ها را جا می دهیم:

← جایگاه رقم زوج

$$\left(\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right) \times 3! \times 4!$$

- ف - ف - ف - ف -

جایگشت فردها با هم → ← جایگشت زوج ها با هم

مثال: حروف EEEFFFD را به چند طریق می توان کنار هم چید به شرطی که هیچ یک از Eها کنار هم نباشند؟

حل:

$$-F-F-F-D-D-$$

$$\left(\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \right) \times \frac{5!}{3! \times 2!}$$

جایگشت Fها و Dها با هم ← محل قرار گرفتن Eها

پیدایش اشیائی که عده ای از آنها ترتیبشان از قبل معلوم است:

ابتدا مکان اشیائی که ترتیبشان از قبل معین است را انتخاب کرده و اشیاء را طبق ترتیب از قبل معین شده می‌چینیم، سپس بقیه‌ی اشیاء را در فواصل خالی باقی مانده می‌چینیم.

مثال: هفت نفر متمایز به چند طریق می‌توانند در هفت طبقه از یک آپارتمان هفت طبقه ساکن شوند به شرطی که از بین آنان سعید پایین‌تر از کریم و کریم پایین‌تر از احمد باشد؟

حل: ابتدا به $\binom{7}{3}$ حالت، طبقه‌ی ساکن شدن این سه نفر را انتخاب و طبق ترتیب گفته شده آن‌ها را می‌چینیم. سپس جایگشت بقیه افراد را در ۴ طبقه لحاظ می‌کنیم: $4! \times \binom{7}{3}$

مثال: چند عدد سه رقمی وجود دارد که در هر یک از آنها رقم صدگان از رقم دهگان و رقم دهگان از رقم یکان بزرگ‌تر باشد؟

حل: ابتدا ۳ رقم را به $\binom{10}{3}$ حالت انتخاب و سپس طبق ترتیب گفته شده می‌چینیم.

مثال: با حروف کلمه‌ی NOSHABEH چند کلمه هشت حرفی می‌توان نوشت به طوری که در هر یک از آنها A بعد از O و نیز E بعد از A باشد؟

حل: ابتدا مکان A، E و O را انتخاب کرده و سپس بقیه حروف را می‌چینیم. (توجه کنید که ۲ تا H داریم):

$$\binom{8}{3} \times \frac{5!}{2!}$$

جایگشت Hها با هم

تبدیل r تایی n شیء که شامل اشیاء تکراری باشند:

در صورتی که اشیاء ما تکراری باشند، با تقسیم‌بندی مسأله به حالت‌های مختلف، تعداد تبدیلات r تایی n شیء را بدست می‌آوریم.

مثال: با ارقام ۲ و ۲ و ۴ و ۴ و ۶ و ۶ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

حل:

$$\left. \begin{array}{l} \text{جایگشت ارقام } 3! = 6 \rightarrow \text{اعداد بدون تکرار } \{2, 4, 6\} \\ \text{اعداد با یک تکرار } \{-, -, *\} \rightarrow \binom{3}{1} \binom{2}{1} \times \frac{3!}{2!} = 18 \end{array} \right\} \rightarrow \text{کل اعداد} = 18 + 6 = 24$$

رقم غیر تکراری رقم تکرارشونده

مثال: با حروف کلمه ALIABAD چند کلمه چهار حرفی می توان نوشت؟
 حل:

$$\left. \begin{array}{l} \binom{5}{4} \times 4! \quad \text{حداکثر یک A} \\ \binom{4}{2} \times \frac{4!}{2!} \quad \text{دو بار A بیاید: AA} \\ \binom{4}{1} \times \frac{4!}{3!} \quad \text{سه بار A بیاید: AAA} \end{array} \right\} \rightarrow \text{کل کلمات} = 120 + 72 + 16 = 208$$

↓ انتخاب ۲ حرف دیگر جایگشت حروف
 ↓ انتخاب ۱ حرف دیگر جایگشت حروف

مواص ترکیب:
 ۱- داریم:

$$\text{الف) } \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \Rightarrow \text{اگر } \binom{n}{x} = \binom{n}{y} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x+y=n \end{cases}$$

یعنی تعداد حالات انتخاب r شیء از بین n شیء با تعداد حالات عدم انتخاب بقیه اشیاء برابر است.
 یا تعداد زیرمجموعه های r عضوی یک مجموعه n عضوی با تعداد زیر مجموعه های $n-r$ عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است.

$$\text{ب) } \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r} \quad \text{قاعده پاسکال}$$

این قضیه مفهوماً به این معناست که در انتخاب r عضو یک عضو معین یا حضور دارد یا ندارد. سمت راست شمارش نامنظم و سمت چپ شمارش منظم است.

تعیین ضریب یک جمله از بسط:

نکته: در حالت کلی در بسط $(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n$ ضریب جمله $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_r^{k_r}$ ($\sum_{i=1}^r k_i = n$) برابر است با $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$

مثال: در بسط $(a+b+c)^5$ ضریب جمله a^3bc کدام است؟

حل: چون جمله a^3bc در واقع $aaabc$ بوده، تمام جایگشت های a, a, a, b, c جمله a^3bc تولید می کند و ضریب جمله در واقع تعداد دفعاتی است که یک جمله تولید می شود. (چون به همان تعداد این جمله با خودش جمع می شود).

$$\frac{5!}{3!} \times a^3bc \leftarrow aaabc = a^3bc$$

بسط دو جمله ای نیوتن:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \dots + \binom{n}{n} x^0 y^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

نتایج: با قرار دادن $x=y=1$ و $x=-y=1$ نتایج مفید زیر به دست می آید:

$$1(x=y=1) \Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$2(x=-y=1) \Rightarrow \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots = 0 \Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$$

یعنی تعداد زیر مجموعه های زوج عضوی و فرد عضوی یک مجموعه با هم برابر است.

مثال: اگر $\binom{n}{10} = \binom{n}{11}$ حاصل $\binom{n}{19}$ کدام است؟

حل:

$$\rightarrow n = 10 + 11 \rightarrow \binom{21}{19} = \frac{21 \times 20}{2} = 210$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

$$\text{الف) } \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{9}{5} + \binom{10}{6} + \binom{11}{7} =$$

$$\underbrace{\binom{8}{3} + \binom{8}{4}}_{\binom{9}{4}}$$

$$\underbrace{\binom{9}{4} + \binom{9}{5}}_{\binom{10}{5}}$$

$$\underbrace{\binom{10}{5} + \binom{10}{6}}_{\binom{11}{6}}$$

$$\underbrace{\binom{11}{6} + \binom{11}{7}}_{\binom{12}{7}}$$

$$\text{ب) } \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{20}{2} =$$

ابتدا به جای $\binom{2}{2}, \binom{3}{2}$ را جایگزین کرده و سپس متوالیاً از قاعده ی پاسکال بهره می گیریم.

$$\binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{20}{2} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{20}{2} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2} + \dots + \binom{20}{2} = \dots + \binom{20}{3} + \binom{20}{2} = \binom{21}{3}$$