

بسم الله الرحمن الرحيم

جزوه ریاضیات عمومی

مقطع کارشناسی

مدرس:

عزت الله فریدنیا

دانشگاه:

دانشگاه محیط زیست

توابع چند متغیره :

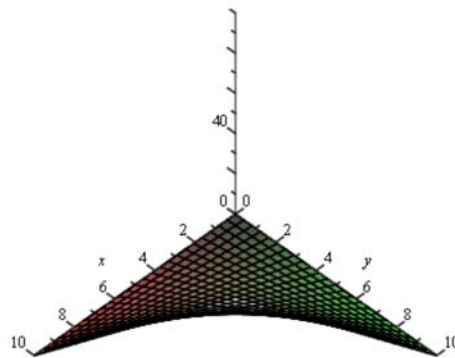
پ 309: اغلب کمیت های فیزیکی در واقع به بیش از یک متغیر وابسته اند. به عنوان مثال ، حجم یک مکعب مستطیل به طول و عرض و ارتفاع آن و دمای نقطه ای از یک جسم به مختصات آن نقطه و احتمالاً زمان بستگی دارد. متناظر با هر کمیتی که به چند متغیر وابسته باشد ، یک تابع با چند متغیر وجود دارد.

$$z = F(x, y)$$

Z متغیر وابسته و x,y متغیرهای مستقل

```
plot3d(x·y, x = 0..10, y = 0..10)
```

```
plot3d(x·y, x = 0..10, y = 0..10, labels = ["X", "Y", "Z"])
```



حد و پیوستگی توابع چند متغیره :

ک 123: فرض کنید $F(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. اگر وقتی نقطه (x,y) از هر مسیری در صفحه xy به نقطه (a,b) نزدیک شود، مقدار $F(x,y)$ به عدد L نزدیک گردد ، گوئیم حد تابع F در نقطه (a,b) برابر L

است و می نویسیم : $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} = L$

شکل: پ 324 و 323

پوی: فرض کنیم F در درون دایره ای به مرکز (a,b) بجزء احتمالا در (a,b) تعریف شده باشد. در این صورت عدد L را در F در (a,b) می گوئیم اگر متناظر با $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر

$$|F(x,y) - L| < \varepsilon \rightarrow 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

جهش 282: گوئیم تابع دو متغیره $F(x,y)$ در نقطه (a,b) دارای حد است اگر از هر مسیر در دامنه تعریف تابع، به (a,b) نزدیک گردیم تابع به عدد ثابتی چون L به اندازه دلخواه نزدیک می شود.

پ از 333 تا 325 و ک 123 تا 124:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} 2x + y^2 = \quad > \quad \text{limit}(x + y^2, \{x=3, y=2\})$$

7

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \sqrt{9 - x^2 + y^2} =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{x^2 y}{x + y} =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{\pi}{3}, 2)} y \sin\left(\frac{x}{y}\right) =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{xy} =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0)} \cos(x + y + z) =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2 - xy + 1}{x^2 + y^2} =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} x \cos^{-1}(y - 1) =$$

برای جواب های $\frac{0}{0}$ رفع ابهام می کنیم

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - xy}{x^3 + y^3} =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{(y-1)\sin x}{xy^2 - x} =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3} =$$

بررسی وجود حد تابع :

جهش 283 و 823: برای بررسی حد تابع $F(x,y)$ در نقطه $(0,0)$ مسیره‌های بسیار زیادی وجود دارد مثلا مسیره‌های $y=0, x=0, y=x, y=-x, y=x^2, y=x^3, \dots$ از تمام مسیره‌ها باید مقدار حد، عدد ثابتی بدست آید.

نکته ارشدی : جهش 283: بررسی حد تابع $F(x,y)$ در نقطه $(0,0)$ می‌توان مسیره‌های $y=mx$ را آزمایش کرد. اگر مقدار حد تابع به m بستگی داشته باشد تابع فاقد حد است.

پ 325: وجود حد تابع $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ در نقطه $(0,0)$ را بررسی کنید؟

پ 326: وجود حد تابع $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ در نقطه $(0,0)$ را بررسی کنید؟

(شبيه به تست ارشد هوافضا 83 و ژئوفیزیک 83)

وجود حد تابع $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{xy}$ در نقطه $(0,0)$ را بررسی کنید؟

ی 125: وجود حد تابع $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + 3y^2}$ در نقطه $(0,0)$ را بررسی کنید؟

پ 327: وجود حد تابع $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ در نقطه $(0,0)$ را بررسی کنید؟ (تست ارشد معدن 83)

پ 327: وجود حد تابع $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ را روی منحنی های $y=mx$, $(m \neq 0)$ و $y=x^2$ در نقطه $(0,0)$ را بررسی کنید؟ (تست ارشد مکانیک 81)

پ 323 و 127: وجود حد توابع زیر را در نقطه $(0,0)$ را بررسی کنید؟

$$\frac{x}{y}, \quad \frac{x-y}{x+y}, \quad \frac{x^2+y}{y}, \quad \frac{xy}{|xy|}, \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

پیوستگی توابع چند متغیره:

پ 331: برای بررسی پیوستگی تابع در یک نقطه سه شرط زیر باید برقرار باشد:

الف) $F(a,b)$ باید وجود داشته باشد یعنی F در (a,b) تعریف شد باشد.

ب) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} F(x,y)$ وجود داشته باشد.

پ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} F(x,y) = F(a,b)$ یعنی حد تابع برابر با مقدار تابع باشد.

پ 331: پیوستگی تابع زیر را در نقطه $(-1,2)$ بررسی کنید؟

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (-1,2) \\ \frac{7}{5} & (x,y) = (-1,2) \end{cases}$$

پ 332 و 126: پیوستگی تابع زیر را در نقطه $(0,0)$ بررسی کنید؟

$$(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(ارشد MBA 81)

ک 126: پیوستگی تابع زیر را در نقطه (0,1) بررسی کنید؟
 $F(x, y) = \frac{x^2+2y}{x+y^2}$

پیوستگی توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید؟

$$\text{پ 334: } F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^3+y^3} & (x, y) \neq (0,0) \\ 3 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\text{ک 127: } F(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad (0, \sqrt{5})$$

$$\text{ک 127: } F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x+y} & (x, y) \neq (1, -1) \\ 3 & (x, y) = (1, -1) \end{cases}$$

$$\text{ک 127: } F(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} & (x, y) \neq (0,0) \\ 3 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\text{پ 334: } F(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\text{پ 334: } F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^{12}+y^4} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

مشتق گیری از توابع چند متغیره:

تعبیر هندسی

پ 340: نمودار معادله $z=F(x,y)$ در واقع اثر سطح $z=F(x,y)$ در صفحه $y=b$ است. بنابراین $F_x(a, b) = \frac{\partial F}{\partial x}$ ضریب زاویه منحنی $z=F(x,y)$ در نقطه $(a, b, F(a, b))$ است.

نکته ارشدی: معادله خط مماس L بر این منحنی در صفحه $y=b$ عبارت است:

$$z - F(a, b) = F_x(a, b)(x - a)$$

نکته ارشدی: معادلات دکارتی (یا متقارن) این خط مماس را داریم:

$$y = b, \quad x - a = \frac{z - F(a, b)}{F_x(a, b)}$$