بررسی یک حرکت نوسانی در یک بعد با نیروی بازگرداننده ی ثابت

داود معصومی، گروه فیزیک، دانش‌گاه شهید بهشتی
ابراهیم فولادوند، گروه فیزیک، دانش‌گاه زنجان و گروه فیزیک، دانش‌گاه شهید بهشتی

در این نوشته به بررسی حرکت یک‌بعدی نوسانگری می‌پردازیم. نیرو هماهنگ نیست: هنگامی که ذره در سمت راست مبداء است نیرو به شکل $-F_0$، و هنگامی که ذره در سمت چپ مبداء است نیرو به شکل $+F_0$ است، که $F_0 > 0$ ثابت است.

1 صورت مسئله

ذره‌ای به جرم m را در نظر بگیرید که در یک بعد حرکت می‌کند. به این ذره یک نیروی بازگرداننده که از قانون هوک پیروی نمی‌کند وارد می‌شود. نیرو چنان است که برای $x > 0$ داریم $F(x) = -F_0$ و برای $x < 0$ داریم $F(x) = F_0$. روشن است که ذره بر اثر این نیرو حرکتی نوسانی خواهد داشت. دامنه‌ی این حرکت بستگی به شرایط آغازین دارد. بی آن که از کلیت مسئله کم شود می‌توان شرایط آغازین را به شکل $x(0) = 1$ و $\dot{x}(0) = 0$ بگیریم. هدف یافتن دوره‌ی تناوب و حل تحلیلی مسئله است.

2 یافتن دوره‌ی تناوب به کمک پایستگی انرژی

نیروی وارد بر جسم را می‌توانیم به صورت ضابطه‌ی زیر بنویسیم $(F_0 > 0)$:

$$F(x) = \begin{cases} F_0 & x < 0 \\ -F_0 & x > 0 \end{cases} \qquad (1)$$

برای یافتن دوره‌ی تناوب از پایستگی انرژی کمک می‌گیریم. نخست انرژی پتانسیل ذره را به دست می‌آوریم:

$$U(x) = \begin{cases} -F_0\, x & x \le 0 \\ F_0\, x & x \ge 0 \end{cases} \tag{2}$$

توجه داریم که اگر چه نیرو در $x = 0$ پیوسته نیست اما انرژی پتانسیل در $x = 0$ پیوسته است. انرژی کل ذره برابر است با:

$$E = \frac{1}{2}\, m\, \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) \tag{3}$$

در $t = 0$ ذره در $x = 1$ است و از این نقطه، با سرعت صفر، رها می‌شود. پس سرعت ذره تا به $x = 0$ برسد منفی است. به این ترتیب برای $x \ge 0$ داریم

$$\frac{-dx}{\sqrt{\dfrac{2(E - F_0\, x)}{m}}} = dt \tag{4}$$

با توجه به تقارن نیرو، این که نیرو تابعی فرد است، می‌بینیم زمانی که طول می‌کشد تا ذره از $x = 1$ به $x = 0$ برسد برابر است با یک چهارم زمان یک رفت و برگشت کامل، یا همان دوره‌ی تناوب. پس خواهیم داشت:

$$\sqrt{\frac{m}{2\, E}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - \dfrac{F_0\, x}{E}}} = \frac{\sqrt{2\, m\, E}}{F_0} \left\{1 - \left(1 - \frac{F_0}{E}\right)^{1/2}\right\} = \int_0^{\frac{T}{4}} dt = \frac{T}{4} \tag{5}$$

حال انرژی کل را در لحظه‌ی آغازین به دست می‌آوریم:

$$E = U + K = F_0 \tag{6}$$

با گذاشتن F_0 به جای E در رابطه‌ی (5) خواهیم داشت:

$$\frac{T}{4} = \frac{\sqrt{2\, m\, F_0}}{F_0} \left\{1 - \left(1 - \frac{F_0}{F_0}\right)^{1/2}\right\} = \sqrt{\frac{2\, m}{F_0}} \tag{7}$$

پس داریم:

$$T = 4\, \sqrt{\frac{2\, m}{F_0}} \tag{8}$$

3 حل تحلیلی مسئله و یافتن نمودار فاز

اینک می‌کوشیم مسئله را به صورت تحلیلی حل کنیم. برای این کار از لحاظ زمانی حرکت را به 4 بخش زمانی تقسیم می‌کنیم. در بخش نخست ذره از $x = 1$ به مبداء می‌رسد. در بخش دوم از مبداء تا $x = -1$ می‌رود. در بخش سوم از $x = -1$ دوباره به مبداء باز می‌گردد، و سرانجام در بخش چهارم از مبداء به نقطه‌ی آغاز حرکت یعنی به $x = 1$ می‌رسد. بستگی زمانی مکان ذره را در این بخش‌ها به ترتیب با $x_1(t)$ تا $x_4(t)$ نشان می‌دهیم. بنا بر این معادله‌ی حرکت ذره به شکل زیر است:

$$\begin{cases} x_1(t) = -\dfrac{F_0}{2\,m} t^2 + A\,t + B \quad x \geq 0 \qquad 0 \leq t \leq T/4 \\ \\ x_2(t) = \dfrac{F_0}{2\,m} t^2 + C\,t + D \qquad x \leq 0 \quad T/4 \leq t \leq T/2 \\ \\ x_3(t) = \dfrac{F_0}{2\,m} t^2 + E\,t + F \qquad x \leq 0 \quad T/2 \leq t \leq 3T/4 \\ \\ x_4(t) = -\dfrac{F_0}{2\,m} t^2 + G\,t + H \quad x \geq 0 \qquad 3T/4 \leq t \leq T \end{cases} \tag{9}$$

برای تعیین ثابت‌های بالا باید از شرایط آغازین و شرط پیوستگی استفاده کنیم. شرایط آغازین برای چارک یکم به شکل زیر هستند:

$$x_1(0) = 1, \qquad \dot{x}_1(0) = 0 \tag{10}$$

به این ترتیب در چارک نخست ضرایب A و B به دست می آیند:

$$A = 0, \qquad B = 1 \tag{11}$$

با کمک رابطه‌ی (9) می‌توانیم زمان رسیدن ذره از $x = 1$ به $x = 0$ را به دست آوریم. این زمان را با $t^\star$ نشان می‌دهیم.

$$x_1(t^\star) = 0 \quad \Rightarrow \quad t^\star = \sqrt{\frac{2\,m}{F_0}} \tag{12}$$

با توجه به تقارن نیرو روشن است که

$$T = 4\,t^\star = 4\,\sqrt{\frac{2\,m}{F_0}} \tag{13}$$

شرایط مرزی در $x = 0$ با توجه به شرط پیوستگی $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ در زمان گذر از مبداء ($t^\star$ به صورت زیر است:

$$x_2(t^\star) = x_1(t^\star), \qquad \dot{x}_2(t^\star) = \dot{x}_2(t^\star) \tag{14}$$

با کاربست (اعمال) این دو معادل ضریب‌های C و D نیز به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$C = -\sqrt{\frac{8\,F_0}{m}}, \qquad D = 3 \tag{15}$$

به بهره‌گیری از شرایط پیوستگی در $t = 2\,t^\star$ می‌توان نشان داد که

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3(2\,t^\star) = x_2(2\,t^\star) \\ \dot{x}_3(2\,t^\star) = \dot{x}_2(3\,t^\star) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} E = C \\ F = D \end{array} \right. \tag{16}$$

برای یافتن ضریب‌های معادله‌ی حرکت در بخش چهارم، یعنی هنگامه که ذره از مبداء به $x = 1$ می‌رود داریم:

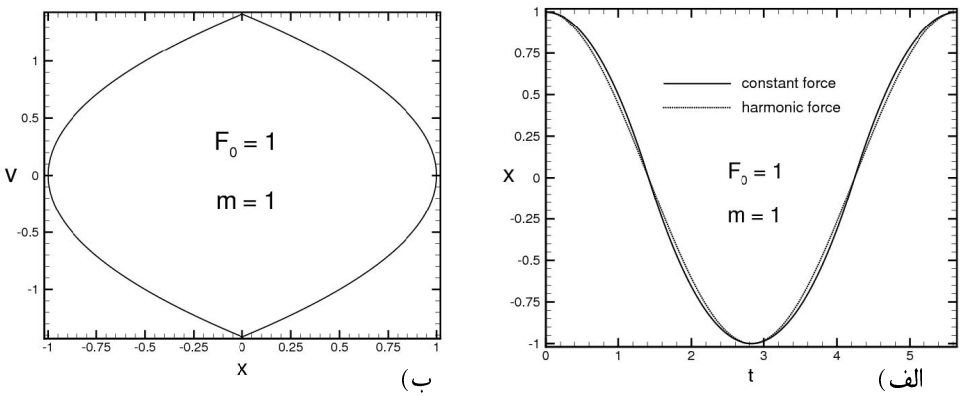
$$\left\{ \begin{array}{l} x_4(3\,t^\star) = x_3(3\,t^\star) \\ \dot{x}_4(3\,t^\star) = \dot{x}_3(3\,t^\star) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} G = 4\sqrt{\frac{2\,F_0}{m}} \\ H = -15 \end{array} \right. \tag{17}$$

اکنون معادله‌های حرکت در هر چهار بخش دانسته هستند.

$$\left\{ \begin{array}{lll} x_1(t) = -\frac{F_0}{2\,m}\,t^2 + 1 & x \geq 0 & 0 \leq t \leq T/4 \\ x_2(t) = \frac{F_0}{2\,m}\,t^2 - \sqrt{\frac{8\,F_0}{m}}\,t + 3 & x \leq 0 & T/4 \leq t \leq T/2 \\ x_3(t) = \frac{F_0}{2\,m}\,t^2 - \sqrt{\frac{8\,F_0}{m}}\,t + 3 & x \leq 0 & T/2 \leq t \leq 3T/4 \\ x_4(t) = -\frac{F_0}{2\,m}\,t^2 + 4\sqrt{\frac{2\,F_0}{m}}\,t - 15 & x \geq 0 & 3T/4 \leq t \leq T \end{array} \right. \tag{18}$$

با مشتق‌گیری سرعت‌ها نیز به دست می‌آیند:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dot{x}_1(t) = -\frac{F_0}{m}\,t & x \geq 0 & 0 \leq t \leq T/4 \\ \dot{x}_2(t) = \frac{F_0}{m}\,t - \sqrt{\frac{8\,F_0}{m}} & x \geq 0 & T/4 \leq t \leq T/2 \\ \dot{x}_3(t) = \frac{F_0}{m}\,t - \sqrt{\frac{8\,F_0}{m}} & x \leq 0 & T/2 \leq t \leq 3T/4 \\ \dot{x}_4(t) = -\frac{F_0}{m}\,t + 4\sqrt{\frac{2\,F_0}{m}} & x \geq 0 & 3T/4 \leq t \leq T \end{array} \right. \tag{19}$$



شکل ۱: الف) مکان بر حسب زمان. نموداری که با نقطه‌چین کشیده شده مربوط به یک نوسانگر هماهنگ است که دوره و شرایط آغازینش درست مثل مسئله‌ای است که بررسی کرده‌ایم. ب) نمودار تحول در فضای فاز.

با حذف t از رابطه‌های (18) و (19)، و با معرفی $v = \dot{x}$، معادله‌ی مسیر در فضای فاز (x, v) پیدا می‌شود.

$$x = \begin{cases} -\dfrac{m}{2F_0}\, v^2 + 1 & x \geq 0 \\ \dfrac{m}{2F_0}\, v^2 - 1 & x \leq 0 \end{cases} \tag{20}$$

اکنون با کمک این معادله می‌توان نمودار مسیر ذره در فضای فاز را رسم کرد.

در نمودار ۱ الف مکان ذره بر حسب زمان در یک دوره‌ی تناوب نشان داده شده است و با نمودار مکان ـ زمان یک نوسانگر هماهنگ با همان شرایط آغاین و دوره هم‌سنجی (مقایسه) شده است. همان گونه که می‌بینید به رغم تفاوت اساسی در ریخت نیرو خم‌های مکان ـ زمان به هم نزدیکند. مسیر حرکت ذره در فضای فاز نیز در نمودار ۱ ب کشیده شده است.