به نام خدا

جمعه ۲۴ مرداد ۱۳۹۳ – مشق شب پنجم

پرسش نخست : الگوریتم بدیهی

صفر– دنباله‌ی $A: a_1, a_2, \ldots, a_n$ داده شده‌است. ماکسیمم مقدار مجموع زیردنباله‌ی متوالی دنباله‌ی A را بیابید.(یک زیردنباله‌ی متوالی یک بازه‌ی متوالی از دنباله است مثل $a_i, a_{(i+1)}, \ldots, a_j$).

یک– دو رشته‌ی A و B به طول‌های n و m داده شده‌اند. الگوریتمی از $O(nm)$ که طول بزرگ‌ترین زیر دنباله‌ی مشترک A و B را بیابد

دو– n نوع سکه باارزش‌های $v_1 < v_2 < \ldots < v_n$ داریم. در نظر بگیرید $v_1 = 1$. برای مقدار داده‌شده‌ی C کمترین تعداد سکه را بیابید که مجموع آن‌ها برابر C باشد. (توجه کنید از هر نوع سکه به هر تعداد موجود است و از آنجایی که $v_1 = 1$ است، هر مقدار C را میتوان با حداکثر C سکه به دست آورد.)

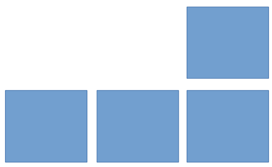
پرسش دوم : ادروان !

صفر– فرض کنید $a_1, a_2, \ldots, a_n$ جایگشتی از اعداد ۱ تا n است. اگر n فرد باشد ثابت کنید:

$$P = (a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \ldots (a_n - n)$$

زوج است.

یک– ثابت کنید نمی‌توان صفحه‌ی شطرنجی ۸ × ۸ را با پانزده چندمربعی‌ی ۴ × ۱ و یک چند مربعی به شکل زیر پوشاند.



دو– صفحه‌ای مستطیلی را با چندمربعی‌های ۴ × ۱ و ۲ × ۲، بدون همپوشانی، پوشانده‌ایم. بعد چند مربعی‌ها را از روی صفحه برداشته‌ایم و در این میان یک چندمربعی ۲ × ۲ گم شده ! به جای آن یک چندمربعی‌ی ۴ × ۱ داریم. ثابت کنید دیگر نمی‌توان صفحه را با چند مربعی‌های باقی‌مانده بپوشانیم.

سه– n عدد روی تخته‌سیاه نوشته شده‌است. در هر گام می‌توان ۲ عدد دلخواه a و b را پاک کرد و به جای آن‌ها عدد $\frac{a+b}{4}$ را نوشت. این عمل را $n-1$ بار تکرار می‌کنیم تا تنهای یک عدد باقی بماند. ثابت کنید اگر در ابتدا تمام اعداد نوشته شده برابر واحد باشند، عدد نهایی بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{1}{n}$ است.

چهار– اعداد $1, 2, 3, \ldots, n$ به همین ترتیب نوشته شده‌اند در هرگام می‌توان ۴ عدد انتخاب کرد و جای اولی را با چهارمی و جای دومی را با سومی عوض کرد. ثابت کنید اگر $\frac{n(n-1)}{2}$ زوج باشد، می‌توان به جایگشت $n, n-1, \ldots, 1$ رسید و در غیر این صورت هرگز نمی‌توان به این جایگشت رسید.

شاد و پرتلاش باشید!