آزمون ترکیبیات شمارشی

ــ حق انتشارــ اکثر سؤالات این آزمون ترجمه‌ی بخش ترکیبیات آزمون HMMT سال ۲۰۱۶ است.
ــ سوالاتی که با * مشخص شده‌اند نیاز به کمی دانش احتمال ریاضی دارند. در صورتی که با احتمال آشنا نیستید این سؤالات را کنار بذارید.

۱ــ برای عدد صحیح مثبت n ، S_n را مجموعه‌ای شامل اعدادی مثل x در نظر می‌گیریم به طوری که می‌توان با عبور دادن n خط متفاوت، که هیچ سه تایی هم‌رس نیستند، صفحه را به x ناحیه تقسیم کرد. (برای مثال $S_۲=\{۳,۴\}$ است. زیرا اگر دو خط موازی باشند صفحه به سه ناحیه و در صورتی که متقاطع باشند به چهار ناحیه تقسیم می‌شود.) کمترین i را پیدا کنید به طوری که S_i دست کم ۴ عضو داشته باشد.

*۲ ــ رشته‌ی S را با شروع از رشته‌ی تهی و در مرحله اضافه کردن حروف H,M,T به انتهای آن به ترتیب با احتمال $\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴}$ می‌سازیم. اولین باری که در انتهای S دو حرف M متوالی داشته باشیم کار را متوقف می‌کنیم. امید ریاضی طول رشته‌ی S را بیابید.

۳ ــ تعداد زوج مرتب‌هایی مثل (a,b) از اعداد صحیح را بیابید به طوری که a و b مقسوم‌علیه ۷۲۰ باشند اما ab نباشد.

۴ ــ مستطیل R روی صفحه‌ی مختصات با راس‌های $(۰,۰),(۲,۰),(۲,۱),(۰,۱)$ کشیده شده. با کشیدن یک پاره خط R را به دو مربع واحد تقسیم می‌کنیم.

چند زیرمجموعه از ۷ پاره‌خط شکل یک شکل همبند تشکیل می‌دهد؟

*۵ ــ a,b,c,d,e,f را اعدادی صحیح عضو مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۱۰۰\}$ در نظر بگیرید که هر کدام به تصادف و با شانس برابر از مجموعه انتخاب شده اند. (یعنی هر کدام از این اعداد، به احتمال $\frac{۱}{۱۰۰}$ یک عدد از ۱ تا ۱۰۰ است. اعداد می‌توانند تکراری هم باشند.)

$$M=a+2b+4c+8d+16e+32f$$

باقی‌مانده‌ی حاصل از تقسیم امید ریاضی مقدار M بر ۶۴ را بیابید.

۶ ــ دنباله‌ی $a_۱,a_۲,...$ را با شروع از $a_۱=۱$ برای $n\geq ۲$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

اگر $a_{n-۱}=۰$: $a_n=n-۲$

اگر $a_{n-۱}\neq ۰$: $a_n=a_{n-۱}-۱$

عدد صحیح نامنفی مثل d را «خارقول» می‌نامیم اگر اعداد صحیح نامنفی s و r و عدد صحیح مثبت n وجود داشته باشند به طوری که $d=r+s$ و $a_{n+r}=a_n+s$. تعداد اعداد خارقول مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۲۰۱۶\}$ را بیابید.

۷* — از آزمون کنار گذاشته شد.

۸ — X را مجموعه همه تابع‌های مثل f در نظر بگیرید که $f:\{۱,۲,...,۲۰۱۶\}\to\{۱,۲,...,۲۰۱۶\}$ تعداد تابع‌های $f\in X$ که در شرایط زیر صدق می‌کنند را بیابید:

$$\max_{g\in X}\left(\min_{0\le i\le 2016}\big(\max(f(i),g(i))\big)-\max_{0\le i\le 2016}\big(\min(f(i),g(i))\big)\right)=2015.$$

۹ — $V=\{۱,...,۸\}$ را در نظر بگیرید. تعداد جایگشت‌های $\sigma:V\to V$ را بیابید که خود–ریختی‌ایی برای یک درخت هستند. (گراف G یک درخت است اگر همبند و بدون دور باشد. تابع σ یک خودریختی برای گراف G است اگر به ازای هر دو راس i,j در G، i,j مجاور باشند اگر و تنها اگر $\sigma(i),\sigma(j)$ هم مجاور باشند. درواقع خود ریختی تابعی است که اگر نام راس‌ها را با آن عوض کنیم گراف حاصل دقیقاً برابر گراف اولیه باشد.)

۱۰ — کریستف در حال بازگشت از سفر خود به قطب، به سرزمین رویاهاست. او می‌خواهد تعدادی تکه یخ با وزن‌های صحیح مثبت با خود ببرد، زیرا می‌داند وقتی به قصر برگردد همسرش از او ***دقیقا*** p کیلو یخ و مادرش از او ***دقیقا*** q کیلو یخ می‌خواهند. (p,q اعداد صحیح مثبت هستند و می‌دانیم $p+q\le ۲۰۱۶$. دقت کنید که ***نمی‌توان*** تکه یخ‌ها رو تکه یا تقسیم کرد.)
کریستف نمی‌داند p و q چه اعدادی هستند. کمترین تعداد تکه یخ‌هایی که او باید با خود بیاورد تا p و q هر مقداری داشتند بتواند مادر و همسرش را راضی کند را بیابید.

سوالات زیر در آزمون اصلی نبوده‌است.

۱۱ — تعدادی زن و مرد دور یک میز گرد نشسته‌اند. می‌دانیم که ۷ زن هستند که سمت راست آن‌ها یک زن نشسته‌است. همینطور میدانیم که ۱۲ زن هستند که سمت راست آن‌ها یک مرد نشسته است. به علاوه می‌دانیم سمت راست ۳ مرد از هر ۴ مرد یک زن نشسته است. چند نفر دور میز نشسته اند؟

۱۲ — شش بازی‌کن تنیس در یک تورنمت تنیس شرکت می‌کنند. هر بازی‌کن یک بازی با هرکدام از دیگر بازی‌کنان دارد. در این رقابت‌ها مساوی نداریم و هر بازی با پیروزی یک نفر و باخت نفر دیگر تمام می‌شود. فرض کنید A و B در بین ۶ تنیس باز هستند. به طوری که A اکیدا تعداد برد بیشتری داشته از B داشته و همچنین در بازی با B نیز پیروز بوده است. با توجه به این اطلاعات نتایج بازی‌های تورنمت چند حالت مختلف دارد؟