

## سری سوالات نهم

حسین نادری

۲ فروردین ۱۳۹۵

### چکیده

این سری از سوالات جمع آوری نشده و فقط حروف چینی شده نسخه ی دستی سوالات دکتر علی پور است، به همین خاطر سطح و کیفیت سوالات به نسبت از سری های قبلی بالاتر است.

۱. یک افراز  $k$  تایی عدد  $n$ ،  $k$  تایی مرتب  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  است به طوری که  $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$  و  $1 \leq k \leq n$  و  $a_i \in N$ .

(آ) تعداد افراز های عدد  $n$  را بیابید.

(ب) مقدار  $\sum a_1 \times a_2 \times \dots \times a_k$  که جمع روی تمام افراز های  $n$  زده می شود را بر حسب جملات دنباله فیبوناچی به دست آورید.

(ج) مقدار  $(2^{a_1} - 1)(2^{a_2} - 1) \dots (2^{a_k} - 1)$  که جمع روی تمام افراز های  $n$  زده می شود را بر حسب جملات دنباله ی فیبوناچی به دست آورید.

۲.  $S$  یک مجموعه  $n$  عضوی و  $k$  یک عدد طبیعی داده شده است. در هر یک از حالت های زیر جداگانه تعداد  $k$  تایی های مرتب  $(T_1, T_2, \dots, T_k)$  که  $T_i$  ها زیر مجموعه هایی از  $S$  هستند را بیابید.

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots \subseteq T_k \quad (\text{آ})$$

(ب)  $T_i$  ها دو به دو مجزا هستند.  $(\forall_{i,j} : T_i \cap T_j = \emptyset)$

$$S = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k \quad (\text{ج})$$

۳. اگر  $fib_n$  جمله ی  $n$ ام دنباله ی فیبوناچی باشد، ثابت کنید ضرایب جملات

$$F(x) = \prod_{n \geq 2} (1 - x^{fib_n}) = 1 - x - x^2 + x^4 + x^5 \dots$$

مساوی ۱، ۰ یا -۱ است.

۴. ثابت کنید اگر یال های گراف کامل ۱۷ راسی را با ۳ رنگ، رنگ آمیزی کنیم حتما مثلثی که هر ۳ یال آن هم رنگ باشد وجود دارد. نشان دهید گراف کامل ۱۶ راسی را می توان با ۳ رنگ طوری رنگ آمیزی کرد که هیچ مثلث با ۳ رنگ یکسان نداشته باشیم.

۵. نشان دهید راس های یک درخت  $n$  راسی را می توان با اعداد متفاوت ۱ تا  $n$  طوری برچسب گذاری کرد که اختلاف دو برچسب دو سر هر دو یال، متفاوت باشد.
- ابتدا مساله را برای دو حالت خاص که در اولی درخت به صورت مسیر است و در دومی به صورت درخت دودویی است حل کنید.
۶. زیرمجموعه های  $n$  عضوی یک مجموعه  $2n$  عضوی را به عنوان رئوس یک گراف در نظر بگیرید. ۲ راس را به هم وصل کنید اگر و فقط اگر اشتراک زیرمجموعه های متناظرشان حداکثر یک عضو داشته باشد. نشان دهید عدد رنگی<sup>۱</sup> این گراف برای  $n > 3$  مساوی ۶ است.
- ابتدا حالت ساده تر که  $n = 4$  است را حل کنید.
۷. فرض کنید  $G$  گرافی  $n$  راسی و همبند است به طوری که برای هر ۲ راس متمایز آن یک و دقیقاً یک راس وجود دارد که به هر دوی آن ها وصل است. ثابت کنید درجه ی تمامی راس های  $G$  مساوی است.

حسین نادری  
دانشجوی علوم کامپیوتر شریف  
hnaderi268@gmail.com  
hnaderi268.blog.ir

---

<sup>۱</sup> عدد رنگی یک گراف به کمترین تعداد رنگ گفته می شود که می توان راس های گراف را با آن ها رنگ کرد به طوری که هیچ ۲ راس مجاور هم رنگ نباشند.