کامپیوتر

۱- گزینه‌ی ۲ درست است. برای خانه‌ی وسط قرینه‌ای وجود ندارد پس مستقل از بقیه‌ی خانه‌ها با سه راه می‌توان آن را پر کرد.
برای هر دو خانه‌ی متقارن، در یکی از آن‌ها به سه روش می‌توان هر کدام از اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار داد و در خانه‌ی دیگر به دو روش می‌توان عددی گذاشت که در خانه‌ی قرینه‌ی آن نیامده باشد، ۸ خانه‌ی جدول (خانه‌ی وسط قرینه ندارد) دو به دو قرینه‌اند یعنی $\frac{۸}{۲} = ۴$ جفت خانه‌ی متقارن داریم پس جواب مسئله برابر است با: ۳×۶^{۴}.

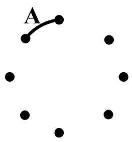
۲- گزینه‌ی ۳ درست است. دو مجموعه‌ی A و B را به‌صورت $A = \{۶k + ۵ \mid k \in Z \ , \ ۴۰ \le k \le ۷۰۰\}$ و $B = \{۷k + ۱ \mid k \in Z \ , \ ۱ \le k \le ۱۰۰\}$ تعریف می‌کنیم، در این‌صورت $|A| = ۶۶۱$ و $|B| = ۱۰۰۰$ حال با توجه به برابری: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ کافی است تعداد اعضای $A \cap B$ را حساب کنیم، اعضای مشترک این دو مجموعه به شکل $۶۳۴ + ۵۰$اند و علاوه بر آن داریم:

$$۳۶۵ = \max(۸, ۳۶۵) \le ۶۳k + ۵۰ \le \min(۶۳۰, ۷۰۰۱)$$

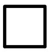
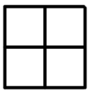
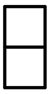
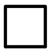
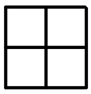
بنابراین $۵ \le k \le ۹۹$ و در نتیجه $|A \cap B| = ۹۵$ به این‌ترتیب داریم:

$$|A \cup B| = ۱۰۰۰ - ۶۶۱ - ۹۵ = ۱۵۶۶$$

۳- گزینه‌ی ۲ درست است. مسئله‌ی فوق متناظر با مسئله‌ی زیر است:
به چند طریق می‌توان بین نقطه‌های مشخص شده روی دایره کمان دیگر ؟؟؟؟؟رسم کرد به شرطی که هیچ‌گه کمان‌ها ۲ تکه‌ی جدا از هم تشکیل ندهند.



کمان اول را باید سمت چپ یا راست کمان A قرار داد تا ۲ تکه تشکیل شود.
به همین ترتیب کمان‌های دیگر باید سمت چپ یا سمت راست تکه کمان فعلی قرار گیرند.
بنابراین برای گذاشتن هر کمان ۲ حالت وجود دارد. به استثنای کمان آخر که در این مرحله فقط یک جای خالی باقی مانده و یکتا تعیین می‌شود.
پس در مجموع $۶۴ = ۲^{۶}$ حالت وجود دارد.

۴- گزینه‌ی ۳ درست است. تعداد روش‌های پر کردن جدول ۱۱×۲ با  و  و ماکسیموم یک  fn و تعداد روش‌های پر کردن یک جدول $۲ \times n$ با  و  را $g(n)$ می‌نامیم داریم:

$$fn = fn - ۲ + gn - ۱ + fn - ۱ + ۲gn - ۲$$

$$gn = gn - ۲ + gn - ۱$$

$$g_{۱} = ۱ \qquad g_{۲} = ۲ \qquad f_{۱} = ۲ \qquad f_{۲} =$$

جواب سؤال می‌شود $۱۴۷ = f_{۷} - g_{۷}$

۵- گزینه‌ی ۲ درست است. وقتی ۲ نفر با سرعت برابر با هم برخورد می‌کنند و هنگام برخورد تغییر جهت داده و با همان سرعت قبلی در جهت مخالف حرکت می‌کنند می‌توانیم فرض کنیم این ۲ نفر از کنار یک‌دیگر رد می‌شوند و کمی تغییر جهت می‌دهد.
بنابراین افرادی که ابتدا به سمت راست در حرکت بودند به سمت راست و افرادی که به سمت چپ در حرکت بودند، تا انتها به سمت چپ در حرکت خواهند بود.
تمامی برخوردها مابین کسانی صورت می‌گیرد که در ۲ جهت مختلف در حرکت باشند و به سمت هم حرکت کنند.
هم‌چنین برخوردها بین کسانی صورت می‌گیرد که به سمت راست ایستاده و در سمت چپ کسانی هستند که به سمت چپ ایستاده‌اند که تعداد آن‌ها دو برابر ۲۶۷ است.

۶- گزینه‌ی ۳ درست است. مکعب‌های حذف شده‌ی دسته‌های مختلف را با A، B و C نام‌گذاری می‌کنیم. در این صورت تعداد مکعب‌های باقی‌مانده برابر است با:

$$۱۲۵-|A\cup B\cup C|=۱۲۵-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|=۱۲۵-۴۷=۷۸$$

۷- گزینه‌ی ۲ درست است. برای تعداد روش‌های رساندن خود به خانه‌های ۲ تا ۹ می‌توان f_n را تعریف کرد:

$$f_n=f_{n-۱}+f_{n-۲}\ ,\ f_۱=۱\ ,\ f_۲=۱ \qquad ۲\le n\le ۹$$

بنابراین $f_{۱۰}$ داریم:

$$f_{۱۰}=f_۱+f_۲+\ldots+f_۹$$

$$f_n=f_{n-۱}+f_{n-۲} \qquad ۱۱\le n\le ۱۴$$

$$\Rightarrow\ f_{۱۴}=۵۴۲$$

۸- گزینه‌ی ۲ درست است. این الگوریتم به ازای هر x ورودی، عدد x را به مبنای ۲ می‌برد. صفرهای آن را تبدیل به یک و یک‌های آن را تبدیل به صفر می‌کند. پس عدد حاصل جدید را برعکس می‌کند. برعکس کردن یک عدد یعنی آن را از راست به چپ خوانده و از چپ به راست بنویسیم. (برای مثال عدد ۶۵۴۳۲۱ پس از برعکس کردن به ۱۲۳۴۵۶ تبدیل می‌شود.)

$$(۱۳۹۲)_۲=(۱۰۱۰۱۱۱۰۰۰۰)_۲\xrightarrow{\text{تبدیل صفرها به یک‌ها و برعکس}}(۰۱۰۱۰۰۰۱۱۱۱)_۲\xrightarrow{\text{برعکس کردن}}(۱۱۱۱۰۰۰۱۰۱۰)=(۱۹۳۰)_۲$$

۹- گزینه‌ی ۴ درست است. توجه به این‌که خانه‌ی ابتدا و انتهای مسیر ۱ هستند و به جز آن‌ها باید ۷ خانه را ببینم جمع بیشینه‌ی این ۷ خانه می‌شود $۱۵=۳+۲\times۶$ که در مجموع با ۲ یک ابتدا و انتها می‌شود ۱۷ اما مسیری نیست که همه ۲ باشند به همراه یک ۳ پس ۱۷ نمی‌شود اما می‌توان مسیری با طول ۱۶ یافت.

۱۰- گزینه‌ی ۲ درست است. ؟؟؟؟ اشتراک ما آن‌ها ۲ تا است که تعداد روش‌های آن می‌شود $\binom{۱۰}{۲}\times۳^۸$ و یا یک است که می‌شود $\binom{۱۰}{۱}\times۳^۹$ پس در مجموع جواب می‌شود:

$$\binom{۱۰}{۲}\times۳^۸+\binom{۱۰}{۱}\times۳^۹$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ درست است. هر یک از عامل‌های اول را باید بین مربع‌ها طوری تقسیم کنیم که تعداد آن‌ها به صورت صعودی باشد. به طور مثال اگر در خانه‌ی ۱ عامل ۲ وجود داشت در همه‌ی خانه‌های بعد از آن حداقل ۱ عامل ۲ وجود دارد.
۲ها را بین این ۵ جا پخش می‌کنیم و اگر یک عامل ۲ در خانه‌ای آمد فرض می‌کنیم در تمام خانه‌های بعد از آن نیز آمده است. برای عامل‌های ۳ و ۵ نیز همین‌کار را می‌کنیم. بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$x_۱+\ldots+x_۵=۴$ برای ۲ها

$x_۱+\ldots+x_۵=۴$ برای ۳ها

$x_۱+\ldots+x_۵=۱$ برای ۵ها

$۳۵\times۳۵\times۵\times۴$

۱۲- گزینه‌ی ۲ درست است. یک سکه را کنار گذاشته و باقی سکه‌ها را به ۳ دسته‌ی ۱۰تایی تقسیم می‌کنیم (دسته‌های I، II، III)

حالت اول:

$$II=I\ \to ۵ \qquad \text{I های اولیه}\begin{cases} I_۱=I_۲\begin{cases} I<III\ \to\ a<b\\ I>III\ \to\ a>b\end{cases}\\ I_۱>I_۲\begin{cases} I>III\ \to\ b>a\\ I<III\ \to\ b<a\end{cases}\end{cases}$$

حالت دوم:

$$II > I \begin{cases} \xrightarrow{\text{دو دسته می‌کنیم } I} I_{۱} = I_{۲} \rightarrow I = III \rightarrow a < b \\ \xrightarrow{\text{به نام‌های}} I_{۱} < I_{۲} \rightarrow I < III \rightarrow a > b \end{cases}$$

$I_{۲}, I_{۱}$

۱۳- گزینه‌ی ۳ درست است. تعداد راه‌های رسیدن به خانه‌ی A برابر تعداد راه‌های رسیدن به مجموعه‌ی خانه‌هایی است که در آن‌ها با یک حرکت می‌توان به A رسید.

در شکل زیر تعداد راه‌های رسیدن به هر خانه داخل آن نوشته شده است.

	۱		۶		
۱	۲	۶	۱۳	۲۵	
۱	۳	۷	۱۸	۴۵	۱۱۴
۱	۲	۵	۱۴	۲۳	
		۲		۱۴	

۱۴- گزینه‌ی ۲ درست است. اگر سنگ یک زیر باشد به یک روش می‌شود، اگر سنگ دو زیر باشد به یک روش می‌شود، اگر سنگ ۳ زیر باشد به دو روش می‌شود، اگر چهار زیر باشد به چهار روش می‌شود و اگر ۵ زیر باشد به ۸ طریق می‌شود.

***اگر در ابتدا مقدار b از a کم‌تر باشد در هر مرحله مقدار b یک واحد زیاد می‌شود تا هنگامی‌که مقدار b برابر a شود از آن پس تا پایان برنامه مقدار b برابر مقدار a خواهد بود.**

در غیر این‌صورت اگر در ابتدای برنامه مقدار b بیش‌تر از a بود تا پایان برنامه مقدار b ثابت خواهد بود.

با اطلاعات فوق در مسئله ۱۵- ۱۶و ۱۷، به طریق زیر حل می‌شود:

۱۵- گزینه‌ی ۱ درست است. در ابتدا مقدار b برابر صفر است با شروع برنامه مقدار b شروع به افزایش می‌کند.

اگر مقدار نهایی b را x بنامیم، در پایان برنامه $(۱+۲+۳+\dots+x)$ واحد از c کم شده است هم‌چنین می‌دانیم اگر در پایان برنامه مقدار c برابر صفر و مقدار b برابر x و کم‌تر از a باشد، مقدار اولیه‌ی c $(۲^{x+۱})$ است چون: $۸۰ > ۶۹,۲۴۱۵ = (۲^{۷۰})$

پس برنامه پایان‌پذیر و مقدار نهایی b برابر ۶۹ است.

۱۶- گزینه‌ی ۳ درست است. اگر در ابتدا b بیش‌تر از a باشد و مقدار آن برابر مقسوم‌علیه‌ی از ۶۰ باشد، چون تا پایان برنامه مقدار b ثابت می‌ماند، هر بار مقسوم‌علیه‌ی از b از آن کم شده و برنامه پایان می‌یابد.

هم‌چنین اگر b کم‌تر از a باشد به ازای $b=۲$ و $b=۴$ برنامه پایان می‌پذیرد.

$$۶۰ = ۳+۴+۵+۶+۶+۷ = ۵+۶+۷+۷$$

۱۷- گزینه‌ی ۴ درست است. چون به ازای هیچ k صحیح $۷+۸+۹+۱۰k \neq ۳۵۰$ پس برنامه پایان نمی‌یابد.

۱۸- گزینه‌ی ۲ درست است. تعداد راه‌های پر کردن یک سطر با شرط فوق به این ترتیب است که:

۴ مهره‌ی قرمز + ۳ مهره‌ی قرمز + ۲ مهره‌ی قرمز + ۱ مهره‌ی قرمز + بدون مهره‌ی قرمز

۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۱

هر سطر را مستقل از بقیه‌ی سطرها می‌توان به ۱۱ طریق پر کرد بنابراین برای کل جدول $۱۱^{۴}$ طریق حالت وجود دارد.

۱۹- گزینه‌ی ۴ درست است. با یک بار استفاده از ترازوی یک کفه‌ای می‌توان وزن همه‌ی مهره‌های یک گونی را مشخص کرد به این‌ترتیب که یک مهره از گونی اول و ۱۰ مهره گونی دوم، ۱۰۰ مهره گونی سوم و ۱۰۰۰ مهره از گونی چهارم برمی‌داریم و این ۱۱۱۱ مهره را با ترازوی یک کفه‌ای وزن می‌کنیم. فرض کنید عددی که ترازوی یک کفه‌ای نشان می‌دهد عدد A باشد، در این صورت رقم یکان A برابر وزن مهره‌های گونی اول به همین ترتیب رقم دهگان، صدگان و هزارگان A برابر وزن مهره‌های گونی دوم، سوم و چهارم است.

۲۰- گزینه‌ی ۱ درست است. اعداد سرو ته صف هیچ‌گاه حذف نمی‌شوند زیرا هر کدام فقط یک همسایه دارد، هم‌چنین اعداد ۹ و ۱۰ نیز هیچ‌گاه از صف حذف نمی‌شوند زیرا از بین اعداد یک تا ۱۰ نمی‌توان ۲ عدد یافت که هر یک از ۹ یا ۱۰ بیش‌تر باشند و در دو طرف این دو عدد قرار گیرند.
بنابراین ۹ و ۱۰ باید دو سر صف قرار گیرند تا در انتها دو عدد باقی‌مانده در صف همان ۹ و ۱۰ باشند. حال هر دنباله از اعداد متمایز را در نظر بگیرید که دو عدد سر و ته دنباله ماکسیمم باشند.
عددی در دنباله وجود دارد که از دو همسایه‌اش کوچک‌تر باشد، پس با این شرایط هر دنباله‌ای از اعداد یک تا ۱۰ که دو سر صف ۹ و ۱۰ باشند در پایان به دنباله‌ای با دو عدد ۹ و ۱۰ ختم می‌شود پس در مجموع $۲\times ۸!$ دنباله با این شرط داریم.

۲۱- گزینه‌ی ۲ درست است. هر جایگشت با شرط فوق را می‌توان به بلوک‌هایی تقسیم کرد که در آن‌ها همه‌ی اعداد صفر یا یک باشند. در شکل کل این جایگشت‌ها به این‌صورت است: ($x!$ تعداد صفرها یا یک‌ها در هر دسته است)

۰ ۱	۱ ۱ ۰ ۱	۰ ۰ ۰	۱ ۱ ۰ ۰ ۱	۰ ۰ ۰ ۰ ۰	۱ ۱ ۰ ۰ ۱	۰ ۰ ۰	۱ ۱ ۱
$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	$x_۶$	$x_۷$	$x_۸$

با شرط این‌که $x_۱+x_۲+\ldots+x_۸=۱۰$ است و $x_۱$ و x_n می‌توانند صفر باشند، اما $x_۲\ldots x_۷$ هر کدام حداقل یک هستند.
بنابراین جواب مسئله برابر فوق است:

$$x_۱+x_۲+\ldots+x_n=۱۰$$
$$۰\le x_۱\ ,\ x_n$$
$$۱\le x_۲,x_۳,\ldots,x_۷$$

که جواب مسئله فوق برابر است با $\Leftarrow \binom{۱۱}{۷}$

۲۲- گزینه‌ی ۳ درست است. برای این اختلاف حداکثر ۲ باشد یک از شاخه‌ها ۳ و دیگری چهار می‌باشد. پس ما باید $\binom{۶}{۳}$ حالت یکی از دو شاخه را انتخاب کنیم شاخه‌ی دیگر به‌صورت یکتا تعیین می‌شود حال یا رشته به صورت ۸ است یا ۷ که مجموع تعداد روش‌های آن می‌شود: $۲\times\binom{۶}{۳}$.

۲۳- گزینه‌ی ۲ درست است. تعداد افراد دروغ‌گو با افراد راست‌گو برابر است (چرا؟) هم‌چنین چون تعداد زن‌های دروغ‌گو با تعداد مردهای دروغ‌گو برابر است پس تعداد دروغ‌گوها زوج است در نتیجه n حتماً باید زوج باشد.

۲۴- گزینه‌ی ۳ درست است. جمع اعداد دور دایره همواره ثابت و برابر تعداد اولیه‌ی مجموع اعداد دو دایره، یعنی $۱+۲+\ldots+۹۲$ است.
بنابراین آخرین عدد ؟ برابر همین مقدار است.

$$۱+۲+\ldots+۹۲=\binom{۹۳}{۲}=۴۲۷۸$$

۲۵- گزینه‌ی ۲ درست است. اگر عددی را با مجموع ارقام آن جایگزین کنیم باقی‌مانده‌ی آن به ۹ ثابت می‌ماند و به مسیر فرآیند بستگی ندارد، در ابتدا تعداد اعدادی که باقی‌مانده‌ی آن‌ها به ۹ برابر ۲، ۳، ۴، ...، ۹ است با یک‌دیگر برابر و اعدادی که باقی‌مانده‌ی آن‌ها به ۹ برابر ۱ است یک واحد بیش‌تر از اعداد دسته‌ی دیگر است پس در مجموع تعداد فرد یک واحد بیش‌تر از اعداد زوج می‌شود. پس گزینه‌ی ۲ درست است.

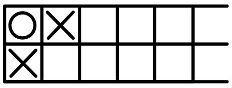
۲۶- گزینه‌ی ۳ درست است. برای این‌که کپل به خواسته‌اش برسد و کم‌ترین هزینه را بپردازد باید در هر مرحله ۲ مهره با کم‌ترین وزن را انتخاب کند پس ترتیب آن به صورت یکتای زیر مشخص می‌شود:

(۵,۱۱) (۸,۷) (۶,۵) (۴,۴) (۳,۲) (۲,۲)

۲۷- گزینه‌ی ۳ درست است. فقط اعداد زیر را می‌توان توصیه کرد:

$$۲-۲-۲=-۲$$
$$۲\div ۲-۲=-۱$$
$$۲-۲\div ۲=۱$$
$$۲+۲-۲=۲$$
$$۲+۲\div=۳$$
$$۲+۲+۲=۶$$
$$۲\times ۲\times ۲=۸$$

۲۸- گزینه‌ی ۲ درست است. f_n را تعداد روش‌های پر کردن جدول به صورت خواسته شده در سؤال تعریف می‌کنیم، جواب سؤال f_n خواهد بود. برای درآوردن رابطه‌ی بازگشتی یا در ستون اول گوی نمی‌گذاریم که باقی جدول را به $f_{n-۱}$ حالت می‌توان پر کرد، یا در آن یک گوی می‌گذاریم که جدول در ادامه باید پر شود، به شکل زیر خواهد بود و دو خانه‌ی مجاور که با ضرب‌در مشخص شده است حذف می‌شود و در آن‌ها دیگر نمی‌توان گوی قرار دارد.



تعداد راه‌های پر کردن جدول مانند جدول فوق که دو خانه‌ی آن حذف شده است را g_n می‌نامیم بنابراین تعداد راه‌های پر کردن جدول کل به این ترتیب است.

$$f_۱ = ۲\,,\ f_۲ = ۶$$
$$f_۱ = ۳\,,\ f_۲ = ۷ \qquad g_۱ = ۲$$

۲۹- گزینه‌ی ۳ درست است. در ابتدا در یکی از دو خانه قرار داریم از مرحله‌ی بعد یا به خانه سمت چپ می‌رویم که به ۲ طریق به سطر آخر می‌رسیم و یا در یکی از ۳ خانه‌ی راست را برمی‌گزینم در مرحله‌ی بعد یا از خانه‌ی سمت راست بالا می‌رویم که به یکروش به سطر آخر می‌رسیم و یا مسیر چپ را برمی‌گزینم.

$$۲\times(۲+۳(۱+۲)) = ۲۲$$

که به دو روش به بالا می‌رسیم.

۳۰- گزینه‌ی ۱ درست است. می‌خواهیم مربع‌های سفید را پرش کنیم.

برای پر کردن هر کدام مربع‌های یک در یک که با شماره‌های یک مشخص شده است حتماً یک مربع ۱×۱ نیاز است زیرا در هیچ مربع دیگری به اندازه‌ی بزرگ‌تر قرار ندارند بنابراین ۳ مربع یک در یک برای فرش کردن مربع‌هایی که با عدد ۱ مشخص شده‌اند، نیاز است.

هم‌چنین هیچ مربعی در شکل یافت نمی‌شود که با آن بتوان هم‌زمان دو مربع را با عدد ۲ پوشاند.

بنابراین برای پوشاندن ۲ها نیز حداقل به ۳ مربع دیگر نیاز است، می‌توان این کار را با ۳ مربع ۲×۲ انجام داد.

بنابراین حداقل ۶ مربع لازم است تا شکل مشخص پوشانده شود.