

یادداشتی بر شکل یک قطره روی سطح تخت افقی

امیرحسین فتح‌اللهی

چکیده: یک قطره مایع روی یک سطح تخت افقی، در غیاب اثر وزن، قسمتی از یک کره است. با در نظر گرفتن اثر وزن تا مرتبه‌ی اول اختلال شکل قطره‌ی مایع به دست می‌آید.

0 مقدمه

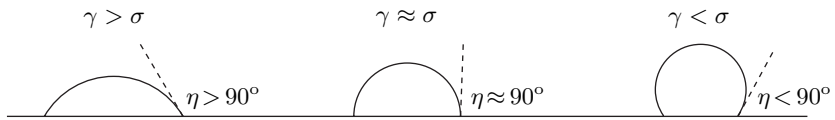
شکل یک قطره از مایع روی سطح جامد به وسیله‌ی این کمیت‌ها تعیین می‌شود: (۱) کشش سطحی مایع σ ، (۲) چسبندگی مایع به سطح γ ، و (۳) به واسطه‌ی نیروی وزن، حجم قطره. در نقطه‌ی تماس مایع با جامد، دو سطح با هم زاویه‌ای می‌سازند که فقط با کشش سطحی و چسبندگی تعیین می‌شود؛ اگر η زاویه‌ی تماس باشد داریم:

$$\cos \eta = 1 - \frac{\gamma}{\sigma} \quad (1)$$

حالت‌های مختلفی را که زاویه‌ی تماس می‌تواند بگیرد در شکل رسم شده است. در حالت $\gamma \approx 0$ قطره کم‌ترین تماس را با سطح دارد، و در $\gamma \geq 2\sigma$ قطره روی سطح کاملاً پهن می‌شود. اگر Δp اختلاف فشار بیرون و داخل روی هر نقطه از سطح مایع باشد، داریم:

$$\Delta p = \pm \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2)$$

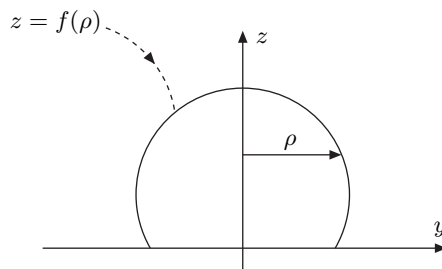
که به رابطه‌ی پوآسون معروف است، و در آن $R_{1,2}$ دو شعاع انحنای عمود بر هم سطح هست‌اند. در قراردادی که ما کار می‌کنیم، Δp فشار بیرون منهای فشار داخل است، و $+$ (منفی) برای وقتی است که علامت مؤلفه‌ی سوم بردار یکه‌ای که عمود به سطح مایع و به طرف خارج مایع است مثبت (منفی) باشد. شعاع‌انحنای اصلی را می‌توان بر حسب معادله‌ی سطح نوشت، و با احتساب اختلاف فشار، که انتظار می‌رود از هیدروستاتیک بیاید، معادله‌ی پوآسون یک معادله‌ی دیفرانسیل برای سطح می‌دهد، که در صورت حل کردن، شکل سطح را به دست می‌دهد.



شکلِ سطح را می‌توان هم‌چنین با در نظر گرفتن ملاحظاتِ مربوط به کمینه‌شدنِ انرژی در یک سیستمِ ایستا نیز به دست آورد. به‌طورِ ساده می‌توان گفت درحالی که کششِ سطحی تمایل به کم کردنِ سطحِ قطره، و در نتیجه برآمده‌تر کردنِ آن دارد، چسبنده‌گی و وزن باعثِ پخش شدن، و در نتیجه افزایشِ سطحِ قطره می‌شوند. رقابتِ بینِ این دو شکلِ نهاییِ قطره را تعیین می‌کند. برایِ یک قطره با حجمِ V ، می‌توان برآوردی از سهمِ اثرهایِ مختلف در انرژی داشت. ابعادِ قطره، L ، را ممکن است با کعبِ حجم تخمین بزنیم: $V^{1/3} \sim L$. در این صورت سهمِ اثر وزن از مرتبه‌ی mgL ، یا $\mu g L^4$ است، که در آن چگالیِ مایع است. سهمِ کششِ سطحی از مرتبه‌ی σL^2 است؛ در بسیاری از موارد ممکن است فرض کنیم که اثرِ چسبنده‌گی چیزی از رتبه‌ی کششِ سطحی است. با مقایسه‌ی این دو سهم سه حالت پیش می‌آید:

- $L \ll \sqrt{\sigma/(g\mu)}$ ، که در این صورت وزن در تعیینِ شکلِ قطره اثر کمی دارد.
- $L \sim \sqrt{\sigma/(g\mu)}$ ، که در این صورت، اثرِ وزن و کششِ سطحی از یک مرتبه است.
- $L \gg \sqrt{\sigma/(g\mu)}$ ، که در این صورت، وزن در تعیینِ شکلِ قطره اثر غالب را دارد.

در واقع مقایسه‌ی کمیتِ $\sqrt{\sigma/(g\mu)} = \ell$ که بُعدِ طول دارد با L معیاری از این‌که کدام اثر غالب است را به ما می‌دهد. در این یادداشت شکلِ یک قطره بر رویِ یک سطحِ تختِ افقی، که قطره حولِ محورِ عمودِ بر سطح تقارنِ سمتی دارد، در حالتی که اثرِ وزن کوچک است تا مرتبه‌ی اولِ اختلال به دست می‌آید.



1 بعضی روابط ریاضی

همان طور که در پیوست نشان داده شده، اگر معادله‌ی یک سطح به شکل $z = f(x, y)$ داده شده باشد، داریم:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} + (1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}, \quad (3)$$

که در آن $f_{xx} = \partial_x^2 f$, $f_{yy} = \partial_y^2 f$, $f_{xy} = \partial_x \partial_y f$ و $f_{yx} = \partial_y \partial_x f$ برای وقتی که سطح مایع حول محور z تقارن دارد، f فقط تابع $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ است، یعنی $z = f(\rho)$ برای این سطح داریم:

$$\begin{aligned} f_x &= f' \frac{x}{\rho}, & f_y &= f' \frac{y}{\rho}, & f_{xx} &= f'' \frac{x^2}{\rho^2} + f' \frac{y^2}{\rho^3}, \\ f_{yy} &= f'' \frac{y^2}{\rho^2} + f' \frac{x^2}{\rho^3}, & f_{xy} &= \frac{xy}{\rho^2} (f'' - \frac{f'}{\rho}), \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن‌ها $f' = \frac{df}{d\rho}$ و $f'' = \frac{d^2f}{d\rho^2}$ با جاگذاری روابط بالا داریم:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{f'' + \frac{f'}{\rho}(1 + f'^2)}{(1 + f'^2)^{3/2}} \quad (5)$$

با تعریف $\psi(\rho) = \frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}}$ داریم $\psi'(\rho) = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}$ و در نتیجه:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \psi' + \frac{\psi}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho\psi). \quad (6)$$

2 شکل قطره بدون اثر وزن

با توجه به رابطه‌ی اخیر در بخش قبل و رابطه‌ی پواسون داریم:

$$\pm \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho\psi_0) = \frac{\Delta p_0}{\sigma}, \quad (7)$$

که در آن Δp_0 ، چون اثر وزن کنار گذاشته شده، ثابت است. از این به بعد $\frac{\Delta p_0}{2\sigma}$ را با κ نمایش می‌دهیم. فعلاً با مثبت کار می‌کنیم. با انتگرال‌گیری از بالا داریم:

$$\rho\psi_0 = \kappa\rho^2 + a_0 \quad (8)$$

که a_0 ثابت انتگرال است. چون بالاترین نقطه‌ی قطره است، مشتق f_0 در $\rho = 0$ صفر است و داریم $\psi_0(0) = 0$ و در نتیجه $a_0 = 0$. پس داریم:

$$\frac{f_0'^2}{1 + f_0'^2} = \kappa^2 \rho^2 \quad (9)$$

که می‌دهد:

$$\frac{df_0}{d\rho} = \pm \frac{\kappa \rho}{\sqrt{1 - \kappa^2 \rho^2}} \quad (10)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی بالا داریم:

$$z = f_0(\rho) = \pm \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} - \rho^2} + z_0 \quad (11)$$

که کره‌ای به شعاع $|\kappa^{-1}|$ است که مرکزاش روی محور z و به فاصله‌ی z_0 از مبدا است. دو ثابت κ و z_0 ، یا به طور معادل Δp_0 و z_0 به وسیله‌ی حجم قطره و $\cos \eta$ پیدا می‌شوند. قبل از آن، در مورد دو علامت \pm نیز باید دقت کرد. بسته به زاویه‌ی تماس η مرکز کره ممکن است داخل قطره ($\eta < 90$)، روی سطح افقی ($\eta = 90$) یا خارج قطره ($\eta > 90$) باشد؛ رجوع به شکل‌های مقدمه. برای وقتی که مرکز کره خارج قطره یا روی سطح است باید علامت $+$ را انتخاب کرد، چون برای سطح داریم: $z \geq z_0$. برای حالتی که مرکز کره داخل قطره است هر دو علامت باید نگه داشته شوند، زیرا $+$ نقاط بالای مرکز و $-$ نقاط پائین مرکز را می‌دهد.

با جاگذاری جواب $z = \pm \sqrt{R^2 - \rho^2} + z_0$ در معادله‌ی (7) می‌بینیم $R = -\kappa^{-1}$. توجه داریم که Δp_0 و در نتیجه κ منفی است. همان‌طور که اشاره شد دو مقدار z_0 و R به وسیله‌ی حجم قطره و $\cos \eta$ پیدا می‌شوند. با استدلال ساده‌ی هندسی می‌بینیم:

$$\cos \eta = \frac{z_0}{R} \quad (12)$$

برای $\eta < 90$ به دست می‌آوریم $z_0 > 0$ ، که درست است. برای $\eta > 90$ داریم $z_0 < 0$ که یعنی مرکز کره زیر سطح افقی است. هم‌چنین با نوشتن حجم بر حسب حجم قسمتی از یک کره یک معادله‌ی دیگر به دست می‌آید که برای تعیین z_0 و R کافی است.

3 شکل قطره با حجم کم یا گرانش ضعیف

حال در اولین مرتبه‌ی اختلال تصحیح وزن قطره را به شکل کروی θ که در بخش قبل به دست آمد پیدا می‌کنیم. با وجود وزن اختلاف فشار به شکل زیر خواهد بود:

$$\Delta p(z) = \Delta p_0 + \mu g z = \Delta p_0 + \mu g f(\rho) \quad (13)$$

برای نیمه‌ی بالائی داریم:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\psi) = 2\kappa + \frac{\mu g}{\sigma} f \quad (14)$$

می‌بینیم که اثر وزن، همان‌طور که در مقدمه ذکر شد، با پارامتر $\frac{\mu g}{\sigma}$ وارد می‌شود. از این پس کمیت بدون بُعد $V^{2/3} \frac{\mu g}{\sigma}$ که در آن حجم قطره است را با λ نمایش می‌دهیم. انتظار می‌رود که در اولین تصحیح شکل کروی با توان یک از λ تغییر کند:

$$z = f(\rho) = f_0(\rho) + \lambda f_1(\rho) \quad (15)$$

که در آن $f_0(\rho)$ حل کروی نئی است که در بخش قبل پیدا شد، و در این جا هدف پیدا کردن $f_1(\rho)$ است. با جاگذاری داریم:

$$\psi(\rho) = \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} = \frac{f'_0}{\sqrt{1+f_0'^2}} + \lambda \frac{f'_1}{(1+f_0'^2)^{3/2}} + O(\lambda^2) \quad (16)$$

با استفاده از رابطه‌ی بالا، و این که f_0 در معادله‌ی با $\lambda = 0$ صدق می‌کند به دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{f'_1}{(1+f_0'^2)^{3/2}} \right] = \frac{1}{V^{2/3}} f_0(\rho) \rho \quad (17)$$

در بخش قبل برای نیمه‌ی بالائی به دست آمد $f_0(\rho) = \sqrt{R^2 - \rho^2} + z_0$. با انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم:

$$\rho \frac{f'_1}{(1+f_0'^2)^{3/2}} = -\frac{1}{V^{2/3}} \left(\frac{1}{3} (R^2 - \rho^2)^{3/2} - \frac{1}{2} z_0 \rho^2 \right) + a \quad (18)$$

که در آن a ثابت انتگرال‌گیری است. $\rho = 0$ متعلق به نیمه‌ی بالائی است که با شرط صفر شدن مشتق می‌دهد $a = \frac{R^3}{3V^{2/3}}$. با جاگذاری می‌مجدد $f_0(\rho)$ داریم:

$$f'_1(\rho) = -\frac{R^3}{V^{2/3}} \left[\frac{1}{3\rho} - \frac{z_0}{2} \frac{\rho}{(R^2 - \rho^2)^{3/2}} - \frac{R^3}{3\rho(R^2 - \rho^2)^{3/2}} \right] \quad (19)$$

توجه داریم که در رابطه‌ی بالا حد $\rho \rightarrow 0$ وجود دارد و همان‌طور که انتظار می‌رود، چون مماس بر قطره در بالاترین نقطه موازی ی سطح است، صفر است. با یک بار دیگر انتگرال‌گیری از رابطه‌ی بالا به دست می‌آوریم:

$$f_1(\rho) = -\frac{R^3}{V^{2/3}} \left[\frac{1}{3} \ln \rho - \frac{3z_0 + 2R}{6\sqrt{R^2 - \rho^2}} + \frac{1}{6} \ln \left(\frac{R + \sqrt{R^2 - \rho^2}}{R - \sqrt{R^2 - \rho^2}} \right) \right] + b' \quad (20)$$

که در آن b' ثابت انتگرال‌گیری است. مجدداً توجه داریم که حد $\rho \rightarrow 0$ عبارت بالا وجود دارد. می‌توان جواب بالا را به شکل زیر هم نوشت:

$$f_1(\rho) = -\frac{R^3}{V^{2/3}} \left[\frac{1}{3} \ln \left(\frac{R + \sqrt{R^2 - \rho^2}}{2R} \right) - \frac{3z_0 + 2R}{6\sqrt{R^2 - \rho^2}} \right] + b \quad (21)$$

که در آن b یک ثابت است. همان‌طور که دیده می‌شود جواب برای $\rho \approx R$ رفتار بدی دارد. در صورتی که $\eta > 90$ باشد نیمه‌ی پائین مرکز وجود ندارد و همین f_1 جواب است. در این صورت ثابت b از این به دست می‌آید که $f_1(\rho_0) = 0$ ، که در آن ρ_0 شعاع دایره‌ای است که قطره روی سطح می‌سازد، یعنی $\rho_0 = \sqrt{R^2 - z_0^2}$. اما در صورتی که $\eta < 90$ باشد باید جواب نیمه‌ی پائینی را هم به دست آورد. برای نیمه‌ی پائینی هم پس از جاگذاری $f_0(\rho) = -\sqrt{R^2 - \rho^2} + z_0$ ، و دو بار انتگرال‌گیری می‌توان f_1 را به دست آورد. توجه داریم که برای نیمه‌ی پائینی معادله‌ی پوآسون باید با منفی انتخاب شود. این بار اولین ثابت انتگرال‌گیری با شرط $f'(\rho_0) = f'_0(\rho_0) + \lambda f'_1(\rho_0) = \tan \eta$ تعیین می‌شود. در این صورت جواب نهائی برای نیمه‌ی پائینی به شکل زیر است:

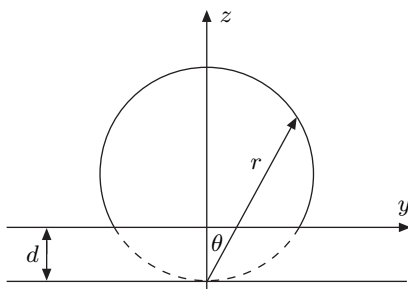
$$f_1(\rho) = -\frac{R^3}{V^{2/3}} \left[\frac{1}{3} \ln \frac{\rho}{2R} + \frac{z_0^3}{6R^2 \sqrt{R^2 - \rho^2}} \right] - \frac{z_0(3R^2 - z_0^2)}{12V^{2/3}} \ln \left(\frac{R + \sqrt{R^2 - \rho^2}}{R - \sqrt{R^2 - \rho^2}} \right) + c \quad (22)$$

که در آن c ثابت است. این بار c با شرط $f_1(\rho_0) = 0$ تعیین می‌شود. همان‌طور که دیده می‌شود این جواب هم در $\rho \approx R$ رفتار بدی دارد. پس در وقتی که هر دو نیمه‌ی بالائی و پائینی وجود دارند جواب‌های اختلالی در $\rho \approx R$ ، که به اصطلاح شکم قطره است، قابل قبول نیست‌اند. یک راه برای به دست آوردن شکل قطره در ناحیه‌ی شکم این است جای متغیر (ρ) و تابع $(z = f(\rho))$ را با هم عوض کنیم، مثلاً به شکل $\rho = h(z)$. در این صورت مشتق $h(z)$ در ناحیه‌ی شکم، یعنی $z = z_0$ ، صفر می‌شود. با این تغییر باید دوباره تمام معادلات را برای سطح نوشت، و پس از حل شکل قطره را برای ناحیه‌ی شکم به دست آورد. البته دیده می‌شود تابعی که برای ناحیه‌ی شکم مناسب است، در ناحیه‌ی بالائی قطره $(z \approx z_0 + R)$ رفتار بدی دارد. با این روش ما سه تابع پیدا می‌کنیم، که عبارت‌اند از: f_1 برای نیمه‌های بالائی و پائینی، و h برای ناحیه‌ی شکم. این سه تابع را باید به شکل هم‌واری به هم چسباند تا شکل کل قطره به دست آید.

یک روش بهتر هم وجود دارد که به‌وسیله‌ی آن احتیاجی به پیدا کردن جواب‌های دیگر و سپس چسباندن آن‌ها نداریم. در این روش، با استفاده از یکی از جواب‌ها، مثلاً f_1 برای نیمه‌ی بالائی، به مختصات می‌رویم که جواب را برای همه‌ی ناحیه‌ها بدهد. این مختصات باید طوری باشد که مثلاً مشتق توابع در آن بی‌نهایت نشود. یک انتخاب می‌تواند مختصات (ρ, z) برای راحتی کار مبدا را در پائین‌ترین نقطه‌ی کره‌ای که قطره‌ی بدون وزن قسمتی از آن است می‌گیریم، یعنی در فاصله‌ی d از سطح رجوع به شکل می‌بینیم که $d = R - z_0$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد. در مختصات جدید هم می‌توان معادله‌ی سطح را به دست آورد و به دنبال جواب‌های دقیق یا اختلالی آن گشت. ولی از آن‌جا که جواب‌ها، دست کم، در بعضی از نواحی به دست آمده‌اند،

کار ساده‌ترین است که یکی از جواب‌ها را به مختصات جدید ببریم، و انتظار داشته باشیم که حل برای همه‌ی نواحی باشد. در مختصات جدیدی که انتخاب کرده‌ایم به دنبال r به عنوان تابعی از متغیر θ هستیم. به ساده‌گی دیده می‌شود:

$$r(\theta) \cos \theta - d = z = f(\rho) = f_0(\rho) + \lambda f_1(\rho) \quad (23)$$



هم‌چنین انتظار داریم برای $r(\theta)$ هم یک قسمت برای قطره‌ی بدون وزن و یک قسمت دیگر برای حل اختلالی بشود در نظر گرفت. این دو قسمت را به ترتیب با $r_0(\theta)$ و $r_1(\theta)$ نشان می‌دهیم. پس داریم: $r(\theta) = r_0(\theta) + \lambda r_1(\theta)$ هم‌چنین

$$\rho = r(\theta) \sin \theta = r_0(\theta) \sin \theta + \lambda r_1(\theta) \sin \theta \quad (24)$$

برای حل کروی، با توجه به شکل، می‌توان دید که $r_0(\theta) = 2R \cos \theta$ که می‌دهد:

$$\rho = r(\theta) \sin \theta = R \sin(2\theta) + \lambda r_1(\theta) \sin \theta \quad (25)$$

با جاگذاری در (23) تا مرتبه‌ی یک در λ داریم:

$$\lambda^0: \quad r_0(\theta) \cos \theta - R + z_0 = f_0(\rho) \Big|_{\rho=R \sin(2\theta)} \quad (26)$$

$$\lambda^1: \quad r_1(\theta) \cos \theta = \left[r_1(\theta) \sin \theta \frac{\partial f_0}{\partial \rho} + f_1(\rho) \right] \Big|_{\rho=R \sin(2\theta)} \quad (27)$$

از این‌جا به بعد f_0 و f_1 را برای نیمه‌ی بالائی که همیشه وجود دارد جای‌گزین می‌کنیم. رابطه‌ی اول که برآورده می‌شود. با جاگذاری در رابطه‌ی دوم به دست می‌آوریم:

$$r_1(\theta) = -\frac{R^3}{V^{2/3} \cos \theta} \left(\frac{2}{3} \cos(2\theta) \ln \cos \theta - \frac{3z_0 + 2R}{6R} \right) + b \frac{\cos(2\theta)}{\cos \theta} \quad (28)$$

اگرچه این رابطه از رابطه‌ای که برای نیمه‌ی بالائی وجود داشت به دست آمد، ولی به راحتی دیده می‌شود که برای همه‌ی سطح قطره درست است، یعنی برای بیش‌ترین محدوده‌ای که θ ممکن است بگیرد، یعنی $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. ثابت b مانند قبل از شرط زیر می‌آید:

$$r_1(\theta_0) = 0, \quad \tan \theta_0 = \frac{\rho_0}{d} = \frac{\sqrt{R^2 - z_0^2}}{R - z_0} \quad (29)$$

4 پیوست: انحناي میانگین برای سطح دُو بُعدی

یک سطح دُو بُعدی یک نگاشت از $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ به \mathbb{R}^3 است:

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{r} = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v)) \quad (30)$$

حالت خاص بالا این است که

$$x^1 = x = u, \quad x^2 = y = v, \quad x^3 = z \quad (31)$$

خم α روی سطح یک نگاشت از $t \in \mathbb{R}$ به \mathbb{R}^3 است:

$$\alpha : t \rightarrow (u(t), v(t)) \rightarrow (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v)) \quad (32)$$

مماس بر خم با بردار زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{v}_\alpha = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{u} \partial_u \mathbf{r} + \dot{v} \partial_v \mathbf{r} = \dot{u} \mathbf{r}_u + \dot{v} \mathbf{r}_v = v_\alpha \mathbf{t} \quad (33)$$

که در آن \mathbf{t} بردار یکه است. می‌توان خم‌های v -ثابت و u -ثابت را بر روی این سطح دُو بُعدی تعریف کرد. مماس بر خم‌های v -ثابت و u -ثابت به ترتیب با عبارت‌های زیر داده می‌شوند:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \partial_u \mathbf{r} = (\partial_u x^1, \partial_u x^2, \partial_u x^3), \quad (34)$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \partial_v \mathbf{r} = (\partial_v x^1, \partial_v x^2, \partial_v x^3) \quad (35)$$

هر بردار مماس بر سطح را می‌توان ترکیب خطی از این دو بردار نوشت:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{r}_u + \lambda_2 \mathbf{r}_v \quad (36)$$

هم‌چنین بردار یکه‌ی عمود بر هر نقطه‌ی سطح را داریم:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \quad (37)$$

خم سرعت واحد خمی است که: $|\mathbf{v}_\alpha| = v_\alpha = 1$. شتاب نیز چیزی غیر از مشتق بردار مماس (بردار سرعت) نیست:

$$\dot{\mathbf{v}}_{\alpha} = \frac{d\mathbf{v}_{\alpha}}{dt} = \mathbf{a}_{\alpha} = \dot{v}_{\alpha} \mathbf{t} + \frac{v_{\alpha}^2}{r} \mathbf{s} \quad (38)$$

که در آن \mathbf{s} بردارِ یکه است با تعریف $\dot{\mathbf{t}} \propto \mathbf{s}$. توجه داریم که چون طول \mathbf{t} واحد است، \mathbf{s} به آن عمود است. البته \mathbf{s} لزوماً به سطح عمود نیست. r در بالا نقش شعاع انحنای موضعی \mathbf{t} را دارد. شعاع انحنای R بر روی یک خم سرعت واحد α با مولفه‌ی شتاب روی بردار عمود بر سطح تعریف می‌شود:

$$\frac{1}{R} = \mathbf{a}_{\alpha} \cdot \mathbf{n} = \dot{\mathbf{v}}_{\alpha} \cdot \mathbf{n} \quad (39)$$

در نتیجه داریم: $\frac{1}{R} = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}}{r}$. از آنجا که $\mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{n} = 0$ با گرفتن مشتق داریم:

$$\frac{1}{R} = \dot{\mathbf{v}}_{\alpha} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{v}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{n}} \quad (40)$$

با تعریف $\mathbf{n}_u = \partial_u \mathbf{n}$ و $\mathbf{n}_v = \partial_v \mathbf{n}$ داریم:

$$\dot{\mathbf{n}} = \dot{u} \mathbf{n}_u + \dot{v} \mathbf{n}_v \quad (41)$$

که با جاگذاری می‌دهد:

$$\frac{1}{R} = -(\dot{u} \mathbf{r}_u + \dot{v} \mathbf{r}_v) \cdot (\dot{u} \mathbf{n}_u + \dot{v} \mathbf{n}_v) \quad (42)$$

$$= l\dot{u}^2 + 2m\dot{u}\dot{v} + n\dot{v}^2 \quad (43)$$

که در آن

$$l = -\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_u, \quad 2m = -(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_u + \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_v), \quad n = -\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_v \quad (44)$$

انحنای میان‌گین با کمک دو خم سرعت واحد عمود بر هم α_1 و α_2 تعریف می‌شود:

$$v_{\alpha_1} = v_{\alpha_2} = 1, \quad \alpha_1 \perp \alpha_2 \Rightarrow \mathbf{v}_{\alpha_1} \cdot \mathbf{v}_{\alpha_2} = 0 \quad (45)$$

در این صورت انحنای میان‌گین H می‌شود:

$$2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = l(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) + 2m(\dot{u}_1\dot{v}_1 + \dot{u}_2\dot{v}_2) + n(\dot{v}_1^2 + \dot{v}_2^2) \quad (46)$$

با نوشتن شرطهای سرعت واحد بودن و تعامد داریم:

$$E\dot{u}_1^2 + 2F\dot{u}_1\dot{v}_1 + G\dot{v}_1^2 = 1 \quad (47)$$

$$E\dot{u}_2^2 + 2F\dot{u}_2\dot{v}_2 + G\dot{v}_2^2 = 1 \quad (48)$$

$$E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + G\dot{v}_1\dot{v}_2 = 0 \quad (49)$$

که در آنها:

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, \quad G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \quad (50)$$

با حذف \dot{u}_i و \dot{v}_i بین (37) تا (40) داریم:

$$H = \frac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)} \quad (51)$$

در حالت خاص $u = x$, $v = y$ و $z = f(u, v)$ داریم:

$$\mathbf{r}_u = (1, 0, f_u), \quad \mathbf{r}_v = (0, 1, f_v) \quad (52)$$

که در آن $f_u = \partial_u f$ و $f_v = \partial_v f$. در نتیجه: $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-f_u, -f_v, 1)$ که می‌دهد:

$$\mathbf{n} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \quad (53)$$

هم‌چنین داریم:

$$E + 1 + f_u^2, \quad F = f_u f_v, \quad G = 1 + f_v^2 \quad (54)$$

می‌توان $\mathbf{n}_v = \partial_v \mathbf{n}$ و $\mathbf{n}_u = \partial_u \mathbf{n}$ را حساب کرد، و از آن‌جا l , m و n را با جاگذاری به دست می‌آید:

$$H = \frac{(1 + f_v^2)f_{uu} + (1 + f_u^2)f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv}}{2(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}} \quad (55)$$

قدردانی: از محمد خرمی که پیش‌نهاد پیدا کردن حل در مختصات متفاوت را داد بسیار متشکرم. از امیر آقامحمدی و محمد خرمی برای نکاتی که در مورد متن متذکر شدند ممنون‌ام.

یادداشت‌ها و مراجع

- یک مرجع خوب برای یادگرفتن مطالب مربوط به سطوح مایع کتاب زیر است:
J. Oprea, "The Mathematics Of Soap Films: Explorations With Maple," American Mathematical Society, 2000.
- مرجع خوب دیگر، درس‌نامه‌ی امیر آقامحمدی برای مکانیک سیالات است (دانش‌گاه الزهرا).