گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

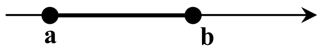
ریاضی ۲

(فصل‌های ۲ و ۳)

تابع:

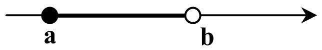
بازه (فاصله):

$[a,b]$ را بازه‌ی بسته از a تا b می‌نامند و a و b را ابتدا و انتهای بازه می‌نامند و داریم:

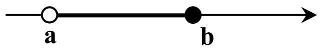


$[a,b]=\{x \mid x\in IR\ ,\ a\le x\le b\}$

بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ را بازه‌هایی نیم‌باز می‌نامند.

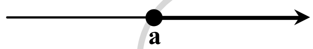


$[a,b)=\{x \mid x\in IR\ ,\ a\le x< b\}$

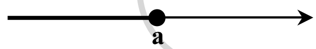


$(a,b]=\{x \mid x\in IR\ ,\ a< x\le b\}$

بازه‌های $[a,+\infty)$ و $(-\infty,a]$ را نیز بازه‌های نیم‌باز می‌نامند.

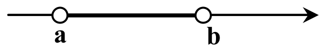


$[a,\infty)=\{x \mid x\in IR\ ,\ x\ge a\}$



$(-\infty,a]=\{x \mid x\in IR\ ,\ x\le a\}$

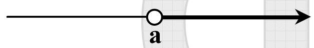
بازه‌ی (a,b) را بازه‌ی باز می‌نامیم.



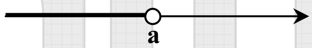
$(a,b)=\{x \mid x\in IR\ ,\ a< x< b\}$

بازه‌های (a,∞) و $(-\infty,a)$ را نیز بازه‌های باز می‌نامند.

$(a,\infty)=x \mid x\in \mathbb{R}\ ,\ x>a\}$



$(-\infty,a)=x \mid x\in IR\ ,\ x<a\}$



تابع:

یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نظیر می‌شود.

بیان زوج مرتبی:

اگر یک رابطه به‌صورت زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این مجموعه تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مؤلفه‌ی اول یکسان و مؤلفه‌ی دوم متمایز نباشند.

(دو زوج (a,b) و (c,d) مساوی هستند هرگاه $a=b$ و $c=d$، در غیر این صورت آن‌ها را متمایز می‌نامیم.)

☜مثال: اگر بدانیم رابطه‌ی زیر یک تابع است، مقادیر a و b کدام‌اند؟

$\{(a-۱,۲)\ ,\ (۵,a-۲)\ ,\ (a-۲,b+۳)\ ,\ (۳,۵)\ ,\ (۵,۳)\}$

✍حل:

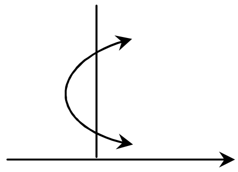
هیچ دو زوج مرتبی نباید شامل مؤلفه‌ی اول یکسان و مؤلفه‌ی دوم متمایز باشند.

$(۵,a-۲)=(۵,۳)\ \Rightarrow\ a-۲=۳\ \Rightarrow\ a=۵$

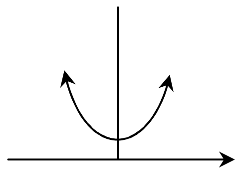
$(a-۲,b+۳)=(۳,b+۳)=(۳,۵)\ \Rightarrow\ b+۳=۵\ \Rightarrow\ b=۲$

بیان نموداری:

اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار یک تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



تابع نیست



تابع است

بیان تابع با نمودار ون:

از تعریف تابع نتیجه می‌شود که اگر تابعی از A به B با نمودار ون نمایش داده شده باشد:

الف) از هر عضو A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود.

ب) لازم نیست که به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود. ممکن است به یک عضو B یک پیکان یا بیش از یک پیکان وارد شود یا اصلاً پیکانی وارد نشود.

☜مثال: اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟ در حالت کلی از یک مجموعه‌ی m عضوی به یک مجموعه‌ی n عضوی چند تابع قابل تعریف است؟

✍حل:

عضو a سه انتخاب دارد که به یکی از آن‌ها متصل شود. به همین ترتیب عضو d,c,b لذا تعداد توابع قابل تعریف $۳^۴=۳\times۳\times۳\times۳$ تابع است. (چون اعضای دامنه مستقل از همند و بنابر اصل ضرب حالات انتخابشان در هم ضرب می‌شود.)

در حالت کلی از یک مجموعه‌ی m عضوی به یک مجموعه‌ی n عضوی، n^m تابع قابل تعریف است.

دامنه و برد:

مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های اول زوج‌های تشکیل دهنده‌ی یک تابع را دامنه و مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تشکیل دهنده‌ی یک تابع را برد تابع می‌نامند.

اگر f تابعی از A به B باشد، دامنه‌ی آن A است ولی لزومی ندارد که برد آن همان B باشد. مجموعه‌ی B را هم دامنه یا مقصد تابع f می‌نامند.

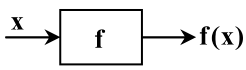
برد یک تابع زیر مجموعه‌ای از هم‌دامنه‌ی آن است و ممکن است مساوی هم‌دامنه نیز بشود.

به‌طور کلی اگر f تابعی از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B باشد، می‌نویسیم: $f:A\to B$

موارد زیادی پیش می‌آید که توابع را صرفاً با ارائه ضابطه معرفی می‌کنند و اشاره‌ای به دامنه نمی‌شود. در این موارد طبق قرارداد، دامنه‌ی تابع بزرگ‌ترین مجموعه‌ای است که ضابطه‌ی ارائه شده روی آن مجموعه تعریف شده است. دامنه‌ی تابع f را با D_f و برد آن را با R_f نمایش می‌دهند.

مقدار تابع در یک نقطه، نمایش جبری (ضابطه‌ی) تابع:

چون تابع تناظری است بین دو مجموعه که مجموعه‌ی اول دامنه و مجموعه‌ی دوم برد نامیده می‌شود به قسمی که هر عضو از دامنه دقیقاً با یک عضو از برد نظیر می‌شود، لذا تابع را می‌توان به‌عنوان یک ماشین در نظر گرفت که با دریافت هر عضو از دامنه، عضوی منحصر به فرد از برد را به‌عنوان خروجی به ما می‌دهد.



مثلاً تابع $f=\{(۱,۵),(۲,۱۰),(۳,۱۵),(۴,۲۰)\}$ را در نظر بگیرید:

$D_f=\{۱,۲,۳,۴\}$ $\qquad$ $R_f=\{۵۱۰۱۵,۲۰\}$

حال می‌توان نوشت:

$f(۱)=۵$ $\qquad$ $f(۲)=۱۰$ $\qquad$ $f(۳)=۱۵$ $\qquad$ $f(۴)=۲۰$

گاهی اوقات یک تابع را می‌توان برحسب یک عبارت جبری از یک متغیر نمایش داد. این‌گونه نمایش تابع را نمایش جبری یا ضابطه‌ی تابع می‌نامند.

مثلاً برای تابع فوق‌الذکر، ضابطه‌ی تابع عبارتست از: $f(x)=۵x$

در هر تابع سه ویژگی زیر اهمیت دارد:

۱- دامنه

۲- هم‌دامنه

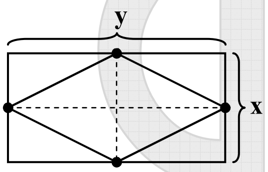
۳- دستور یا قانونی که نحوه‌ی ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم‌دامنه را نشان می‌دهد که این دستور هنگامی‌که در قالب عبارت جبری بیان می‌شود. ضابطه‌ی جبری نام دارد.

اگر ضابطه‌ی تابع $y=f(x)$ باشد، شرط آن که ضابطه‌ای، ضابطه‌ی تابع باشد آن است که:

اگر $x_۱=x_۲ \Rightarrow f(x_۱)=f(x_۲)$

☜مثال: در مستطیلی با عرض x و محیط ۴۰ یک لوزی به‌گونه‌ای محاط شده است که هر رأس لوزی دقیقاً بر وسط یکی از اضلاع منطبق است. مساحت لوزی را به‌عنوان تابعی از عرض مستطیل بیان کنید.

✍حل: اگر عرض مستطیل را y در نظر بگیریم:



محیط $=۲(y+x)=۴۰\rightarrow y=۲۰-x$

$$S_{\text{لوزی}}=\frac{x\times y}{۲}=\frac{x(۲۰-x)}{۲}=۱۰x-\frac{x^۲}{۲}$$

☜مثال: اختلاف دو عدد برابر ۱۲ است. حاصل‌ضرب دو عدد را به‌عنوان تابعی از عدد کوچک‌تر بیان کنید.

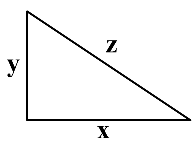
✍حل:x: عدد کوچک‌تر $\qquad$ y: عدد بزرگ‌تر

$$y-x=۱۲ \Rightarrow f=x.y=x(۱۲+x)=۱۲x+x^۲$$

☜مثال: مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲۵ سانتی‌متر مربع است. طول وتر این مثلث را به‌عنوان تابعی از یک ضلع آن به‌دست آورید.

✍حل:

x: ضلع

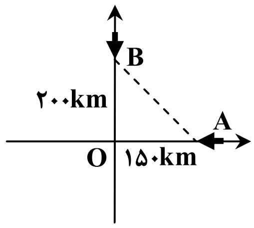


$$S=\frac{xy}{۲}=۲۵ \Rightarrow xy=۵۰ \Rightarrow y=\frac{۵۰}{x}$$

$$\text{وتر}: z=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{x^۲+(\frac{۵۰}{x})^۲}=\frac{\sqrt{x^۴+۲۵۰۰}}{|x|}\underset{x>۰}{=}\frac{\sqrt{x^۴+۲۵۰۰}}{x}$$

مثال: دو هواپیما مانند شکل در دو مسیر عمود بر هم در ارتفاع یکسان، با سرعت ۹۰۰ کیلومتر در ساعت در حال حرکت هستند.
یک هواپیما ۱۵۰ کیلومتر و هواپیمای دیگر ۲۰۰ کیلومتر از نقطه‌ی O فاصله دارند.
اگر مبدأ زمان را همین شکل فرض کنیم ، فاصله‌ی بین دو هواپیما را به‌عنوان تابعی از زمان به‌دست آورید.
ثانیاً نشان دهید این دو هواپیما هرگز به هم برخورد نمی‌کنند.

حل:



$$۹۰۰\frac{km}{h}=۱۵\frac{km}{min}$$

$$x=x_۰+v_۰t=۱۵۰-۱۵t$$

$$y=y_۰+v'_۰t=۲۰۰-۱۵t$$

هواپیمای A در لحظه‌ی $t=۱۰$ از مبدا عبور می‌کند و هواپیمای B در لحظه‌ی $t=۲۰$ از مبدأ عبور می‌کند، لذا این دو هواپیما هرگز به هم برخورد نمی‌کنند.

معادلات و توابع:

معادلاتی که دارای ۲ متغیر مانند x و y هستند، یک رابطه را نشان می‌دهند. برخی از این روابط، ضابطه‌ی تابعی را معلوم می‌کنند. بسیاری از توابع از طریق یک معادله ارائه می‌شوند اما توجه داشته باشید این‌طور نیست که یک معادله‌ی دو متغیره بر حسب x و y حتماً ضابطه‌ی یک تابع را نشان بدهد.

در هر صورت باید اثبات شود که $x_۱=x_۲$ بود، $f(x_۱)=f(x_۲)$ است.

مثال: در کدام‌یک از معادلات زیر y تابعی از x است؟

الف) $x^۲+y=۱$

$$x_۱=x_۲ \Rightarrow x_۱^۲=x_۲^۲ \Rightarrow ۱-x_۱^۲=۱-x_۲^۲ \Rightarrow y_۱=y_۲$$

هر x یک y تولید می‌کند.

ب) $y^۲-x=۱$

$$y^۲=x+۱ \Rightarrow y=\pm\sqrt{x+۱}$$

هر x که می‌دهیم، دو y تولید می‌کند.

ج) $x^۲+y^۲=۲۵$

$$y=\pm\sqrt{۲۵-x^۲}$$

هر x که می‌دهیم دو y تولید می‌کند.

د) $x=|y|+۱$

$$|y|=x-۱ \Rightarrow y=\pm(x-۱)$$

هر x که می‌دهیم، دو y تولید می‌کند.

هـ) $y^۲=x^۲$

$$y=\pm x$$

هر x که می‌دهیم، دو y تولید می‌کند.

و) $x^۲+y^۲-۲x-۲y+۲=۰$

$$(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۰ \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=۱ \\ y=۱ \end{array}\right.$$

این رابطه تنها از یک نقطه تشکیل شده است، لذا تابع است.

ز) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+۲=۰$

$\frac{x^۲+y^۲+۲xy}{xy}=۰ \Rightarrow (x+y)^۲=۰ \Rightarrow y=-x$ چون برای هر x یک y تولید می‌کند ، تابع است

راه دوم: می‌دانیم:

$$\begin{cases} a+\frac{۱}{a}\geq ۲ & a>۰ \\ a+\frac{۱}{a}\leq -۲ & a<۰ \end{cases}$$

که تساوی برای $a=\pm ۱$ رخ می‌دهد، لذا:

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-۲ \Rightarrow \frac{x}{y}=-۱ \Rightarrow y=-x$

توابع خاص و حل نامعادله:

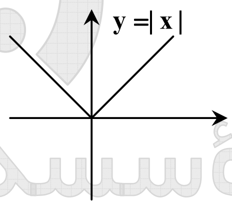
تابع چند جمله‌ای: **توابعی به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+...+a_۰$ را تابع چند جمله‌ای از درجه‌ی n می‌نامند.** $(\forall i; a_i\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N})$

تابع خطی: **هر تابع که بتوان آن را به شکل $y=ax+b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود که حالت خاصی از تابع چند جمله‌ای است.**

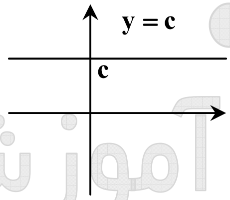
تابع همانی: **اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو در دامنه دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، آن تابع را تابع همانی می‌نامند. $(f(x)=x)$**

تابع ثابت: **تابع ثابت، تابعی است که برد آن تنها شامل یک عضو است $(f(x)=c)$**

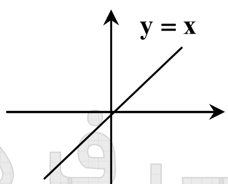
تابع قدرمطلق: **تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدرمطلق نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق را با $f(x)=|x|$ نمایش می‌دهند.**



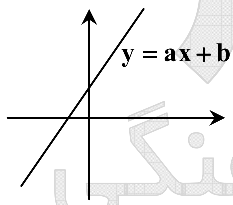
تابع قدرمطلق



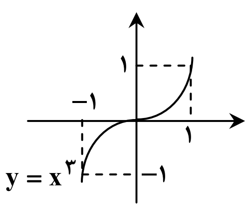
تابع ثابت



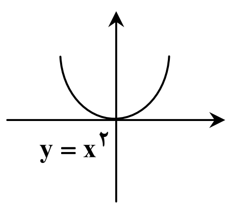
تابع همانی



تابع خطی



چند جمله‌ای درجه ۳



چند جمله‌ای درجه ۲

رسم نمودار تابع:

انتقال نمودار تابع:

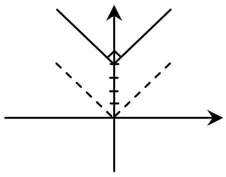
رسم یک تابع به کمک تابعی دیگر را انتقال نمودار تابع می‌نامند. با داشتن نمودار $y=f(x)$، نمودارهای $y=f(x)+a$ و $y=f(x+a)$ را می‌توان رسم کرد.

مثال: به کمک نمودار تابع $y=|x|$ نمودارهای زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را به‌دست آورید.

الف) $y=|x|+۴$

$D=\mathbb{R}$

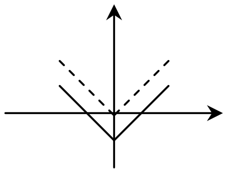
$R_f=[۴,\infty]$



ب) $y=|x|-۱$

$D=\mathbb{R}$

$R_f=[-۱,\infty]$

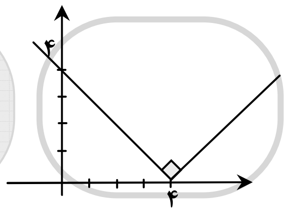


اگر $a>۰$ باشد، نمودار به بالا و اگر $a<۰$ باشد، نمودار به پایین حرکت می‌کند.

ج) $y=|x-۴|$

$D=\mathbb{R}$

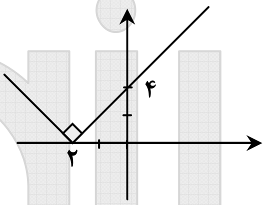
$R=[۰,+\infty)$



د) $y=|x+۲|$

$D=\mathbb{R}$

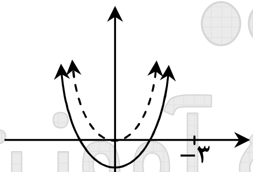
$R=[۰,+\infty)$



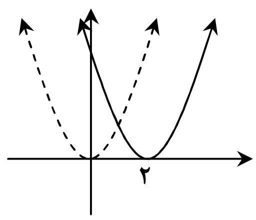
اگر $a>۰$ باشد نمودار به‌سمت چپ و اگر $a<۰$ باشد نمودار به‌سمت راست حرکت می‌کند.

مثال: به‌کمک نمودار $y=x^۲$ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

هـ) $y=x^۲-۳$

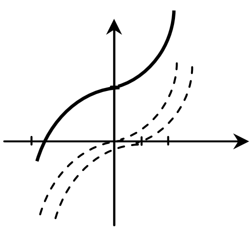


و) $y=(x-۲)^۲$

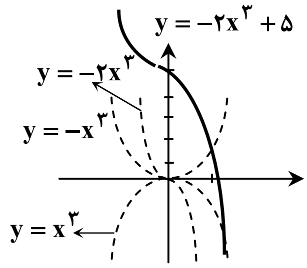


مثال: نمودار توابع زیر را به کمک نمودار $y=x^۳$ رسم کنید.

ز) $y=(x-۱)^۳+۲$



ح) $y=-۲x^۳+۵$



رسم نمودار $y=af(x)$:

نمودار تابع $y=af(x)$ به کمک $y=f(x)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

الف) اگر $a>۱$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب a کشیده می‌شود. (انبساط عمودی)

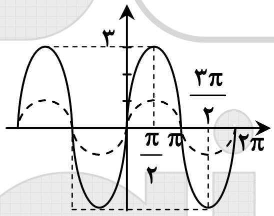
ب) اگر $۰<a<۱$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب a جمع می‌شود. (انقباض عمودی)

ج) اگر $a<۰$ ابتدا نمودار نسبت به محور xها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|a|$ به‌طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.

نکته: $y=-f(x)$ قرینه نمودار تابع نسبت به محور xها است.

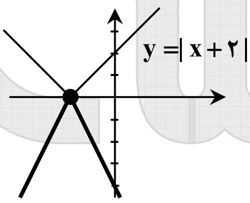
☜مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=۳\sin x$

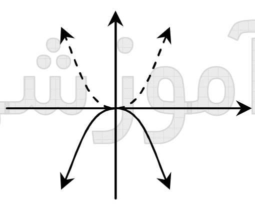


ب) $y=-۲|x+۲|$

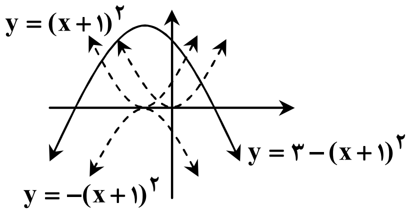
دهانه جمع و قرینه می‌شود.



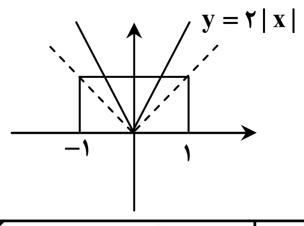
ج) $y=-x^۲$



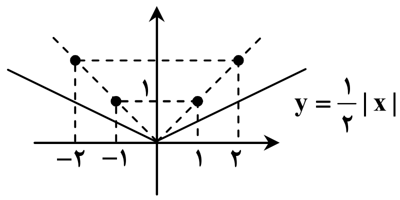
د) $y=-(x+۱)^۲+۳$



هـ) $y=۲|x|$



و) $y=\frac{۱}{۲}|x|$



رسم نمودار $y=f(ax)$

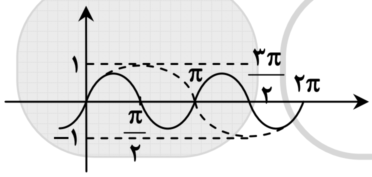
اگر $a>۰$ نمودار $y=f(ax)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها به‌دست آورد.

در حالتی که $a>۱$ نمودار $y=f(x)$ منقبض با ضریب $\frac{۱}{a}$ و در حالتی‌که $a<۱$ نمودار منبسط با ضریب $\frac{۱}{a}$ خواهد شد.

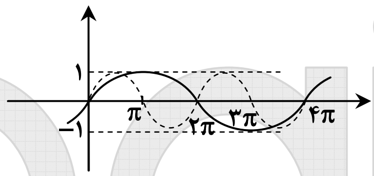
نکته: نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور yها است.

☜مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

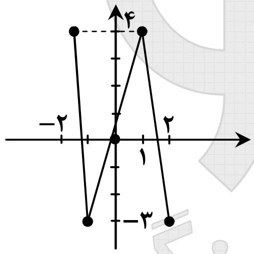
الف) $y=\text{Sin}\,۲x$



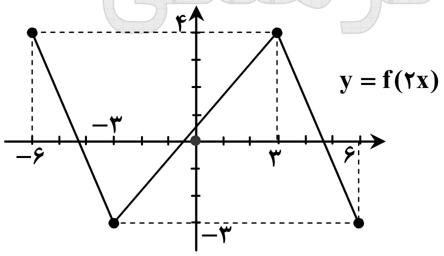
ب) $y=\text{Sin}\,\frac{x}{۲}$



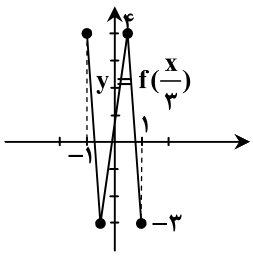
☜مثال: اگر نمودار $y=f(x)$ به شکل زیر باشد، نمودار $y=f(\frac{x}{۳})$ و $y=f(۲x)$ را رسم کنید.



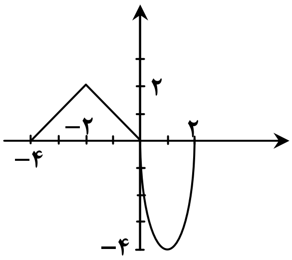
اتفاقی که قبلاً در نقطه‌ی $x=۲$ برای تابع $y=f(x)$ رخ می‌داده، این‌بار در $x=۶$ رخ می‌دهد.

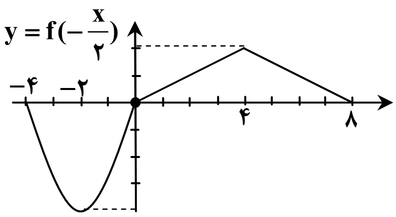


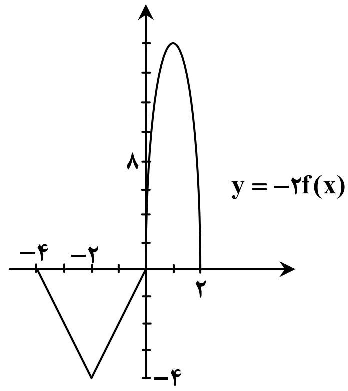
اتفاقی که قبلاً در $x=۲$ رخ می‌داد، این‌بار در $x=۱$ رخ می‌دهد. تابع منقبض می‌شود.



☜مثال: اگر نمودار $y=f(x)$ به شکل زیر باشد، نمودار $y=f(-\frac{x}{2})$ و $y=-2f(x)$ را رسم کنید.







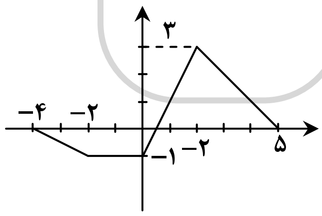
☜مثال: نمودار $f(x)$ در شکل زیر داده شده است. دامنه و برد توابع داده شده را معلوم و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

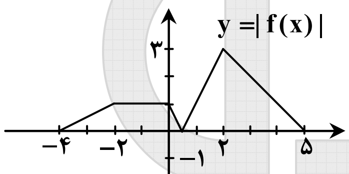
الف) $y=|f(x)|$

ب) $y=f(|x|)$

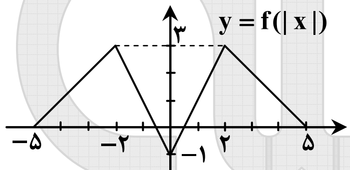
ج) $y=f(-x)$

د) $y=-f(x)$

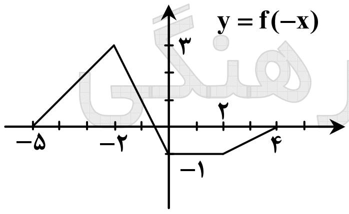




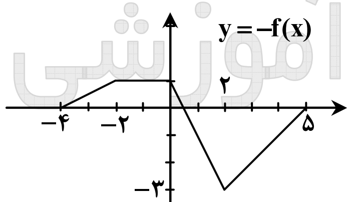
$D=[-4,5]$ $R=[0,3]$



$D=[-5,5]$ $R_f=[-1,3]$



$D=[-5,4]$ $R=[-1,3]$



$D=[-4,5]$ $R=[-3,1]$

توابع گویا:

برخی توابع را می‌توان به کمک یک عبارت گویا (یعنی یک کسر) نمایش داد. مثلاً:

$$f(x)=\frac{2}{x+1} \qquad g(x)=\frac{x^2-3x+1}{-\sqrt{x}+7}$$

باید توجه داشت، توابع گویا در ریشه‌های مخرجشان تعریف نشده‌اند، یعنی باید ریشه‌های مخرج را از دامنه حذف نمود.

مثال: دامنه‌ی توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{(x-1)}{x^3-3x^2+2x}$

$x^3-3x^2+2x=x(x^2-3x+2)=x(x-1)(x-2)$

$D=\mathbb{R}-\{0,1,2\}$

ب) $f(x)=\tan(2x+1)$

توجه کنید که $\tan x$ و $\cot x$ توابع کسری محسوب می‌شوند.

دامنه‌ی $\tan x$ برابر است با:

$D_f=\mathbb{R}-\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$

$2x+1\neq(2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}-1 \Rightarrow x\neq(2k+1)\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

$D_f=\mathbb{R}-\{(2k+1)\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\}$

ج) $f(x)=\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x-1}}}$

$D_f=x-1\neq 0 \to x\neq 1$

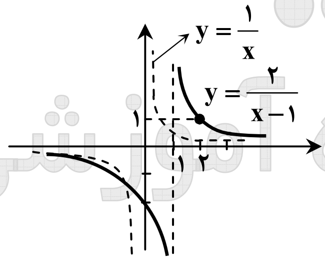
$1-\frac{1}{x-1}\neq 0 \to \frac{1}{x-1}\neq 1 \Rightarrow x\neq 2$

$1-\frac{1}{1-\frac{1}{x-1}}\neq 0 \to \frac{1}{1-\frac{1}{x-1}}\neq 1 \to 1-\frac{1}{x-1}\neq 1$

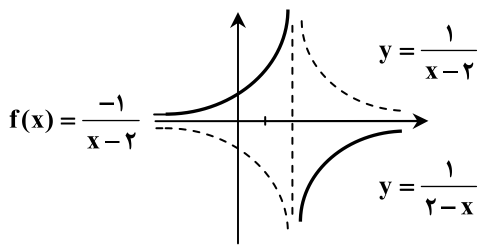
$\frac{1}{x-1}\neq 0$ همواره برقرار است. $\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{1,2\}$

مثال: با توجه به نمودار $f(x)=\frac{1}{x}$ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=\frac{2}{x-1}$

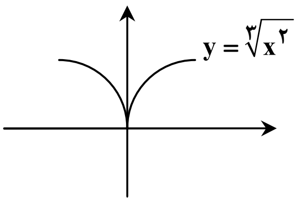


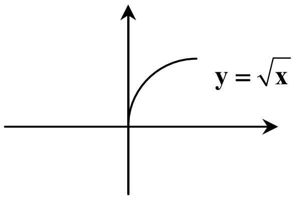
ب) $f(x)=\frac{-1}{2-x}$

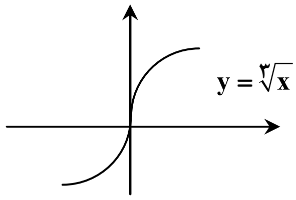


توابع رادیکالی:

توابعی به‌صورت $y=\sqrt[n]{x^m}$ را توابع رادیکالی می‌نامند. مثلاً:



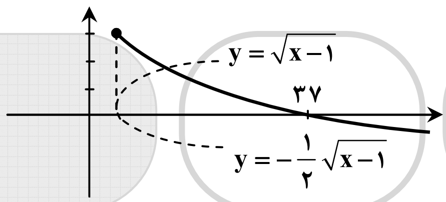




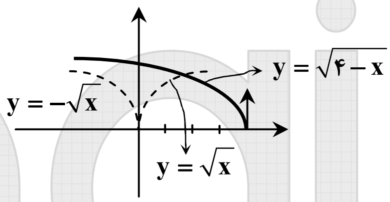
باید توجه داشت توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج، مقادیر منفی را نمی‌پذیرند. یعنی دامنه‌ی تعریفشان ورودی‌های مثبت است.

☜مثال: نمودار توابع زیر را با استفاده از نمودار $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

الف) $y=-\frac{۱}{۲}\sqrt{x-۱}+۳$



ب) $y=\sqrt{۴-x}$



☜مثال: اگر دامنه‌ی تعریف $f(x)=\sqrt{(m-۱)x^۲-۲mx+۴}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، مقدار m کدام است؟

✍حل: باید زیر رادیکال همواره مثبت باشد، پس $a>۰\ ,\ \Delta<۰$ لذا:

$$m-۱>۰ \Rightarrow m>۱$$

$$\Delta=۴m^۲-۱۶(m-۱)<۰ \to m^۲-۴(m-۱)<۰ \to (m-۲)^۲<۰$$

که این اتفاق امکان‌ناپذیر است، پس هیچ مقداری برای m با این ویژگی یافت نمی‌شود.

☜مثال: دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x-۳}}+\sqrt{\frac{۲-x}{x}}$

	۱		۳
$x-۱$	$-$	$+$	$+$
$x-۳$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x-۱}{x-۳}$	$+$	$-$	$+$

	۰		۲
$۲-x$	$+$	$+$	$-$
x	$-$	$+$	$+$
$\frac{۲-x}{x}$	$-$	$+$	$-$

$D_۱=(-\infty,۱]\cup(۳,+\infty)$

$D_۱\cap D_۲=(۰,۱]$

$D_۲=(۰,۲]$

ب) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-۱}{۴-x^۲}}$

	-۲		۱		۲
$m-۱$	$-$	$-$		$+$	$+$
$۴-x^۲$	$-$	$+$		$+$	$-$
$\dfrac{x-۱}{۴-x^۲}$	$+$	$-$		$+$	$-$

$D=(-\infty,-۲)\cup[۱,۲)$

ج) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-۲}{۴x-۴x^۲-۱}}$

$$D=\sqrt{\frac{(x-۲)}{-(۲x-۱)^۲}}=\frac{۱}{|۲x-۱|}\sqrt{۲-x}$$

$$D=(-\infty,۲]-\{\tfrac{۱}{۲}\}$$

د) $f(x)=\sqrt{\dfrac{۱-|x|}{۱+|x|}}$

$۱+|x|\geq ۱ \qquad ۱-|x|\geq ۰ \rightarrow |x|\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱ \Rightarrow D_f=[-۱,۱]$

☜مثال: برد توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x-۴}$

برد تابع $f(x)=\sqrt{x}$ برابر $[۰,+\infty)$ است. لذا در تابع فوق فقط دامنه تغییر کرده و با تغییر دامنه برد تحت تأثیر قرار نمی‌گیرد.

$R_f=[۰,\infty)$

ب) $f(x)=\sqrt{۲-x}$

در این تابع نیز فقط دامنه تحت تأثیر قرار گرفته، لذا: $R_f=[۰,+\infty)$

$f(x)=۳-\sqrt{x+۱}$

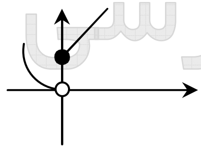
$\sqrt{x+۱}\geq ۰\rightarrow -\sqrt{x+۱}\leq ۰ \Rightarrow ۳-\sqrt{x+۱}\leq ۳ \Rightarrow f(x)\leq ۳ \Rightarrow R_f=(-\infty,۳]$

توابع چند ضابطه‌ای:

توابعی که بخش‌های مختلف دامنه‌ی آن با ضابطه‌های مختلف تعریف می‌شوند، چند ضابطه‌ای نامیده می‌شوند.

مثلاً:

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۰ \\ x^۲ & x<۰ \end{cases}$$



یا تابع $f(x)=|x|$ که در حقیقت عبارتست از:

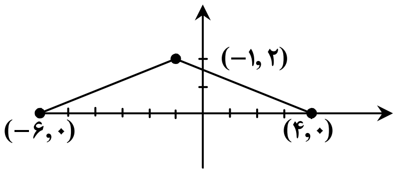
$$f(x)=\begin{cases} x & x>۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

یا:

$$f(x)=|x+۱|+|x-۱|=\begin{cases} ۲x & x\geq ۱ \\ ۲ & -۱<x<۱ \\ -۲x & x\leq -۱ \end{cases}$$

☜مثال: نمودار تابعی به شکل زیر است. ضابطه‌ی آن را بیابید.

✍حل:



$$-۶\le x\le -۱: y-۰=\frac{۲-۰}{-۱-(-۶)}(x+۶)\Rightarrow y=\frac{۲}{۵}(x+۶)$$

$$-۱\le x\le ۴: y-۰=\frac{۲-۰}{-۱-۴}(x-۴)\Rightarrow y=\frac{-۲}{۵}(x-۴)$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{۲}{۵}(x+۶) & -۶\le x\le -۱\\ -\frac{۲}{۵}(x-۴) & -۱\le x\le ۴\end{cases}$$

☜مثال: تابع f با مختصات زیر را رسم کرده و ضابطه‌ی آن را بنویسید.

۱) $f(-۵)=-۲\ ,\ f(۲)=۳$

۲) $D_f=\mathbb{R}$

۳) f در بازه‌ی $[۰,۲]$ ثابت است.

٤) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲، مربع آن را نسبت می‌دهد.

۵) روی اعداد منفی، تابع خطی است و نمودار تابع محور xها را در نقطه‌ی ۳- قطع می‌کند.

✍حل:

$$\left.\begin{array}{l}f(-۳)=۰\\ f(-۵)=-۲\end{array}\right\}\overset{\text{تابع خطی است}}{\Rightarrow}\quad y-۰=\frac{-۲-۰}{-۵+۳}(x+۳)=\frac{-۲}{-۲}(x+۳)\Rightarrow y=x+۳\qquad x<۰$$

$$۰\le x\le ۲: f(x)=f(۲)=۳$$

$$۲<x: f(x)=x^۲\ \Rightarrow\ f(x)=\begin{cases}x^۲ & x>۲\\ ۳ & ۰\le x\le ۲\\ x+۳ & x<۰\end{cases}$$

تساوی دو تابع:

دو تابع وقتی با هم برابرند که نمودارهای آن‌ها دقیقاً بر هم منطبق باشد. به عبارت دیگر هیچ نقطه‌ای یافت نشود که به یکی از نمودارها تعلق داشته باشد، ولی روی دیگری واقع نباشد.

اگر دو تابع به‌صورت مجموعه‌ی زوج‌های مرتب داده شده باشند، هنگامی با هم برابرند که مجموعه‌های زوج‌های مرتب داده شده با هم مساوی باشند.

دو تابع f و g را مساوی نامیم، هرگاه:

الف) دامنه‌ی f و دامنه‌ی g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از دامنه‌ی مشترک: $f(x)=g(x)$

☜مثال: کدام‌یک از جفت تابع‌های زیر برابرند؟

الف) $\begin{cases}f(x)=\frac{x^۲-۱}{x+۱}\\ y(x)=x-۱\end{cases}$

$D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$

$D_g=\mathbb{R}$

با این‌که ضابطه‌شان یکسان است، اما دامنه‌های متفاوتی دارند. لذا برابر نیستند.

ب) $\begin{cases} f(x)=\log x^{۲} \\ g(x)=۲\log x \end{cases}$

$D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

$D_g=\mathbb{R}^+$

لذا دو تابع برابر نیستند.

دقت کنید: $\log x^{۲}=۲\log|x|$

ج) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{۱}{۱+\tan^{۲}x} \\ g(x)=\cos^{۲}x \end{cases}$

$D_f=\mathbb{R}-\{(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\mid k\in\mathbb{Z}\}$ $\quad D_g=\mathbb{R}$

لذا دو تابع برابر نیستند.

د) $\begin{cases} f(x)=[x-[x]] \\ g(x)=۰ \end{cases}$

$۰\le x-[x]<۱$ پس $[x-[x]]=۰$ لذا دو تابع برابرند چون دامنه‌شان نیز یکسان است.

هـ) $f(x)=\dfrac{x^{۲}}{۱+\sqrt{۱+x^{۲}}}$ $\qquad g(x)=\sqrt{۱+x^{۲}}-۱$

$$f(x)=\frac{x^{۲}}{۱+\sqrt{۱+x^{۲}}}\times\frac{۱-\sqrt{۱+x^{۲}}}{۱-\sqrt{۱+x^{۲}}}=\frac{x^{۲}\times(۱-\sqrt{۱+x^{۲}})}{۱-(۱+x^{۲})}=\sqrt{x^{۲}+۱}-۱$$

چون دامنه‌ی هر دو تابع $\mathbb{R}$ است، پس این دو تابع با هم برابرند.

اعمال جبری روی توابع:

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، توابع زیر روی $D_f\cap D_g$ تعریف شده‌اند و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم:

$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$

$(f.g)(x)=f(x).g(x)$

$(\frac{f}{g})(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\qquad g(x)\neq ۰$

☜مثال: اگر $f=\{(۱,۲),(۰,۷),(۳,-۴),(۴,-۳)\}$ و $g(x)=\{(-۲,۱),(۱,۴),(۰,۱),(۳,۰)\}$ باشد، $f\pm g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را حساب کنید.

✍حل:

$D_f\cap D_g=\{۱,۰,۳\}$

$f+g=\{(۱,۶),(۰,۸),(۳,-۴)\}$

$f-g=\{(۱,-۲),(۰,۶),(۳,-۴)\}$

$f.g=\{(۱,۸),(۰,۷),(۳,۰)\}$

$\frac{f}{g}=\{(۱,\frac{۱}{۲}),(۰,۷)\}$

دقت کنید چون $(۳,۰)\in g$ است در $\frac{f}{g}$، زوجی با عضو ابتدای ۳ وجود نخواهد داشت.

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x+۲}$ و $g(x)=\dfrac{x+۱}{x-۳}$، توابع $f+g$، $f-g$، $f.g$ و $\dfrac{f}{g}$ را به همراه دامنه‌ی آن‌ها به دست آورید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} D_f=[-۲,+\infty) \\ D_g=\mathbb{R}-\{۳\} \end{array}\right\} \Rightarrow D_f\cap D_g=[-۲,+\infty)-\{۳\}$$

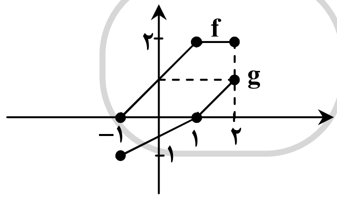
$$f+g=\sqrt{x+۲}+\frac{x+۱}{x-۳}$$

$$f-g=\sqrt{x+۲}-\frac{x+۱}{x-۳}$$

$$f.g=\sqrt{x+۲}\times\frac{x+۱}{x-۳}$$

$$\frac{f}{g}=\frac{\sqrt{x+۲}}{\frac{x+۱}{x-۳}}=\frac{(x-۳)\sqrt{x+۲}}{x+۱} \qquad D_{(\frac{f}{g})}=[-۲,+\infty)-\{-۱,۳\}$$

مثال: نمودار f و g در شکل زیر رسم شده است.



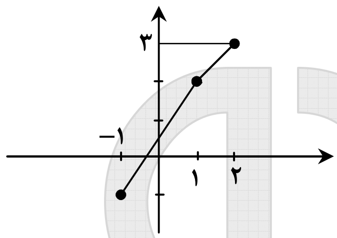
الف) $f+g$ را رسم کنید.

ب) معادله‌ای برای f و g بیابید.

سپس $f+g$ را مستقیماً رسم کنید.

حل:

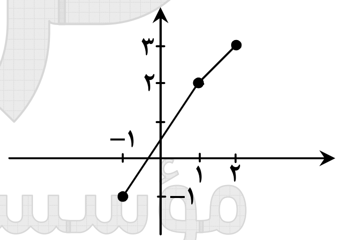
الف)



ب) اگر معادله‌ی خط‌هایی که f و g را تشکیل می‌دهند بنویسیم، خواهیم داشت:

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & -۱\le x<۱ \\ ۲ & ۱\le x<۲ \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x-۱}{۲} & -۱\le x<۱ \\ x-۱ & ۱\le x<۲ \end{cases}$$



$$(f+g)(x)=\begin{cases} x+۱+\dfrac{x-۱}{۲} & -۱\le x<۱ \\ ۲+x-۱ & ۱\le x<۲ \end{cases} \Rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases} \dfrac{۳}{۲}x+\dfrac{۱}{۲} & -۱\le x<۱ \\ x+۱ & ۱\le x<۲ \end{cases}$$

مثال: فرض کنید $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ تابعی با ضابطه‌ی $g(n)=۲n$ باشد. اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و تابع $f:A\to\mathbb{N}$ به‌صورت $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷)\}$ تعریف شود، توابع $۲f+g$ و $\dfrac{۳f}{g}$ و $\dfrac{۱}{f}$ را محاسبه کنید.

حل:

ابتدا دامنه‌ی مشترک را در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} g=\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۶),(۴,۸)\} \\ f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷)\} \end{array}\right\} \Rightarrow ۲f+g=\{(۱,۶),(۲,۱۰),(۳,۱۶),(۴,۲۲)\}$$

$$۲f+g=\{(۱,۶),(۲,۱۰),(۳,۱۶),(۴,۲۲)\}$$

$$\frac{۳f}{g}=\{(۱,۳),(۲,\frac{۹}{۴}),(۳,\frac{۱۵}{۶}),(۴,\frac{۲۱}{۸})$$

$$\frac{۱}{f}=\{(۱,\frac{۱}{۲}),(۲,\frac{۱}{۳}),(۳,\frac{۱}{۵}),(۴,\frac{۱}{۷})\}$$

ترکیب توابع:

فرض کنید **f** و **g** دو تابع باشند که برد **g** زیر مجموعه‌ای از دامنه‌ی **f** باشد، در این صورت **fog** تابعی است که دامنـه‌ی آن همان دامنه‌ی **g** است و برای هر مقدار **x** در این دامنه داریم:

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

برای دو تابع **f** و **g** ممکن است که برد **g** زیر مجموعه‌ای از دامنه‌ی **f** نباشد، در این صورت **fog** تابعی است که دامنه‌ی آن تمام دامنه‌ی **g** نخواهد بود. برای آن که $f(g(x))$ معنادار باشد لازم است که هم $x \in D_g$ باشد و هم $g(x) \in D_f$.

بنابراین دامنه‌ی **fog** در حالت کلی به شکل زیر است:

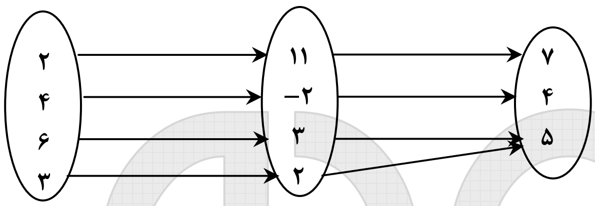
$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

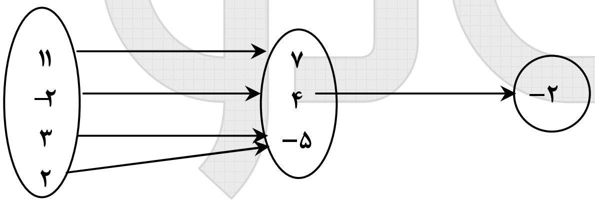
مثال: اگر $g = \{(۲,۱۱),(۴,-۲),(۶,۳),(۳,۲)\}$ و $f = \{(۱۱,۷),(-۲,۴),(۳,-۵),(۲,-۵)\}$ توابع fog و gof را بـه دست آورید و با نمودار ون نمایش دهید.

حل:

$$fog = \{(۲,۷),(۴,۴),(۶,-۵),(۳,-۵)\}$$

$$gof = \{(-۲,-۲)\}$$





عضو دیگری در برد f با دامنه‌ی f مشترک نیست.

مثال: برای دو تابع $f(x) = \frac{۱}{x-۳}$ و $g(x) = \frac{۴}{x}$، تابع fog(x) و gof(x) و دامنه‌ی آن را محاسبه کنید.

$$fog(x) = \frac{۱}{\frac{۴}{x} - ۳} \qquad D_g = \mathbb{R} - \{۰\}$$

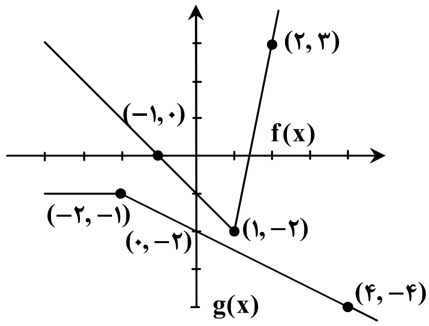
$$D_f : R - \{۳\}$$

$$\frac{۴}{x} \neq ۳ \Rightarrow x \neq \frac{۴}{۳} \Rightarrow D_{fog} = \mathbb{R} - \{۰, \frac{۴}{۳}\}$$

$$D_f : \mathbb{R} - \{۳\}$$

$$gof(x) = \frac{۴}{\frac{۱}{x-۳}} = ۴(x-۳) \Rightarrow D_{gof} : \mathbb{R} - \{۳\}$$

مثال: با توجه به نمودارهای f و g ، $gof(-5)$، $fog(-\frac{1}{2})$ و $fof(7)$ را به دست آورید.



ابتدا ضابطه‌های f و g که هر یک از دو تابع خطی تشکیل شده‌اند را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\begin{cases} y=\frac{2}{-2}(x+1) & x<1 \\ y+2=\frac{5}{1}(x-1) & x\ge 1\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -(x+1) & x<1 \\ 5x-7 & x\ge 1\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} -1 & x<-2 \\ y+1=\frac{1}{-2}(x+2) & x\ge 2\end{cases} \Rightarrow g(x)=\begin{cases} -1 & x<-2 \\ -\frac{x}{2}-2 & x\ge -2\end{cases}$$

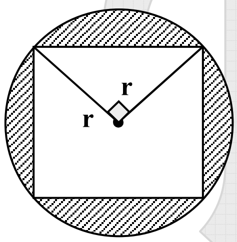
$gof(-5)=g(4)=-4$ $\qquad$ $fog(-\frac{1}{2})=f(-\frac{7}{4})=\frac{3}{4}$

$fog(7)=f(28)=133$

مثال: یک فونداسیون بتنی استوانه‌ای شکل به‌عنوان پایه‌ای برای یک مخزن گازوئیل مکعب مستطیل شکل استفاده می‌شود:

الف) ضلع مخزن را به صورت تابعی از شعاع قاعده‌ی استوانه بنویسید.

ب) مساحت پایه دایره‌ای شکل را به‌عنوان تابعی از شعاع قاعده و تابعی از ضلع مربع بنویسید.



$x=r\sqrt{2}$

$S=\pi r^2=\pi(r\sqrt{2})^2=2\pi r^2$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{1-x}} & x<1 \\ 2x-\frac{3}{4} & x\ge 1\end{cases}$ مقدار $f(f(\frac{3}{4}))$ را به دست آورید.

$$p(\frac{3}{4})=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$$

$$f(\frac{3}{2})=2\times\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

مثال: توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ مفروضند. دامنه‌ی تعریف $(f+2g)of$ را یک بار با به دست آوردن ضابطه و بار دیگر بدون به دست آوردن ضابطه به دست آورید.

$(f+2g)(x)=\sqrt{1-x^2}+2\sqrt{x}$

$(f+2g)of=\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}+2\sqrt{\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{x^4}+2\sqrt[4]{1-x^2}=|x^2|+2\sqrt[4]{1-x^2}=x^2+2\sqrt[4]{1-x^2}$

$\Rightarrow 1-x^2\ge 0\to -1\le x\le 1$ $\qquad$ $D_{(f+2g)of}=[-1,1]$

مستقیم:

$D_f : -1 \le x \le 1$

$D_{f+2g} : 0 \le x \le 1$

اما چون f به‌عنوان ورودی وارد $f+2g$ می‌شود، همواره $f \ge 0$ است و برای $-1 \le x \le 1$ ، $\sqrt{1-x^2} \ge 0$ است که در دامنه‌ی $f+2g$ قرار می‌گیرد، لذا:

$D_{(f+2g)of} = D_f = [-1,1]$

مثال: اگر f تابعی خطی باشد، در هر کدام از حالت‌های زیر f را به دست آورید.

الف) $f(f(x)) = 4x+3$

$$f(x) = ax+b \to f(f(x)) = a(ax+b)+b = a^2x+ab+b \equiv 4x+3 \Rightarrow a^2 = 4 \to a = \pm 2$$

$$ab+b = 3 \Rightarrow b(a+1) = 3 \Rightarrow \begin{cases} b=1 & a=2 \\ b=-3 & a=-2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2x+1 \text{ یا } f(x) = -2x-3$$

ب) $f(1-x) = 5x+1$

$$f(x) = ax+b \to f(1-x) = a(1-x)+b = -ax+a+b \equiv 5x+1 \to \begin{cases} a=-5 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow b=6 \Rightarrow f(x) = -5x+6$$

ج) $f(2x+3) = 3x-2$

$$f(x) = ax+b \Rightarrow f(2x+3) = a(2x+3)+b \equiv 3x-2 \Rightarrow 2ax+3a+b \equiv 3x-2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$3a+b = -2 \Rightarrow b+\frac{9}{2} = -2 \Rightarrow b = -\frac{9}{2}-2 = -\frac{13}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x-\frac{13}{2}$$

مثال: اگر دامنه‌ی تابع $y = f(x)$، مجموعه‌ی $[3,9]$ باشد، دامنه‌ی تابع $y = 2f(\frac{x}{2}+5)$ کدام است؟

هر ورودی‌ای به $f(x)$ باید بین ۳ تا ۹ باشد، لذا:

$$3 \le \frac{x}{2}+5 \le 9 \Rightarrow 2 \le \frac{x}{2} \le 4 \Rightarrow 4 \le x \le 8$$

مثال: اگر $D_f = [4,10]$ و $D_g = [-2,2]$ باشند، دامنه‌ی تابع $3f(2x)-g(\frac{x}{2})$ کدام است؟

$$4 \le 2x \le 10 \Rightarrow 2 \le x \le 5$$

$$-2 \le \frac{x}{2} \le 2 \Rightarrow -4 \le x \le 4$$

چون جمع و تفریق توابع در داخل دامنه‌ی مشترکشان انجام می‌پذیرد، دامنه‌ها را با هم اشتراک می‌گیریم.

$D = [2,4]$

مثال: اگر $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$ باشد، برد تابع $y = f(\frac{x}{3})$ چیست؟

چون $D_f = \mathbb{R}$ است و $\frac{x}{3}$ نیز تمام مقادیر حقیقی را می‌پذیرد لذا برد $f(\frac{x}{3})$ با برد $f(x)$ یکسان است.

حال چون همواره $x^2 \le x^2+1$ است پس: $0 \le \frac{x^2}{x^2+1} < 1$ لذا $0 \le \frac{2x^2}{x^2+1} < 2$

لذا: $0 \le f(x) < 2$ پس $0 \le f(\frac{x}{3}) < 2$

مثال: با فرض آن که $f(x-2)=\sqrt{1-x^2}$ باشد، دامنه‌ی تعریف $f(x+1)$ کدام است؟

$1-x^2\geq 0 \rightarrow -1\leq x\leq 1 \Rightarrow D_{f(x-2)}=[-1,1] \Rightarrow -3\leq x-2\leq -1 \Rightarrow$ $f(x)$ مقادیر بین ۱- و ۳- را می‌پذیرد.

$\Rightarrow D_{f(x)}=[-3,-1] \Rightarrow -3\leq x+1\leq -1 \Rightarrow -4\leq x\leq -2 \Rightarrow D_{f(x+1)}=[-4,-2]$

مثال: در توابع زیر fof را محاسبه کنید.

الف) $f=\{(1,2),(2,3),(3,11)\}$

$fof=\{(1,3),(2,1),(3,2)\}$

ب) $f(x)=\frac{1}{1-x}$

$fof=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}}=\frac{1-x}{-x}$

ج) $f=\{(1,3)(2,3),(1,-1)\}$

$fof=\{\ \}$

چون مؤلفه‌ی دوم هیچ زوجی برابر مؤلفه‌ی اول زوج دیگری نمی‌باشد.

دو مسئله پرکاربرد:

دیدیم با داشتن $g(x)$ و $f(x)$ می‌توان $fog(x)$ یا همان $f(g(x))$ را به دست آورد.

حال به دو مسئله‌ی زیر توجه کنید:

الف) با داشتن $f(x)$ و $f(g(x))$ از ما بخواهند $g(x)$ را به دست آوریم:

در این حالت در تابع $f(x)$ به جای xها، $g(x)$ قرار می‌دهیم و در نهایت عبارت را متحد با $f(g(x))$ قرار می‌دهیم. از این‌جا $g(x)$ به‌دست می‌آید.

مثال: اگر $f(x)=x^2+2x$ و $f(g(x))=x^4-1$ باشد، $g(x)$ چه تابعی است؟

$f(g(x))=(g(x))^2+2(g(x))=x^4-1 \Rightarrow g^2(x)+2g(x)+1=(g(x)+1)^2=x^4$

$\Rightarrow g(x)+1=\sqrt{x^4}=x^2 \Rightarrow g(x)=x^2-1$

ب) با داشتن $g(x)$ و $f(g(x))$ از ما بخواهند $f(x)$ را به‌دست آوریم:

در این حالت راه استاندارد، آن است که $g(x)=t$ فرض شود و در تابع $f(g(x))$، $x=g^{-1}(t)$ جایگذاری شود.

راه بهتر آن است که سعی کنیم در تابع $f(g(x))$، $g(x)$ را بازسازی کنیم. و $f(g(x))$ را برحسب $g(x)$ به‌دست آوریم.

مثال: اگر $f(g(x))=4x^2+4x+7$ و $g(x)=2x+1$، $f(x)$ را بیابید.

راه ۱:

$g(x)=2x+1=t \Rightarrow x=\frac{t-1}{2}$

$f(t)=4(\frac{t-1}{2})^2+4(\frac{t-1}{2})+7=(t-1)^2+2(t-1)+7$

$=t^2-1+7=t^2+6 \Rightarrow f(x)=x^2+6$

مثال: اگر $f(g(x))=x^2+\frac{1}{x^2}$ و $g(x)=x-\frac{1}{x}$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

$f(g(x))=(x-\frac{1}{x})^2+2 \Rightarrow f(g(x))=g^2(x)+2 \Rightarrow f(x)=x^2+2$

مسئله گسترده $f(x)$:

گاهی اوقات عبارتی که در آن $f(x)$ برحسب دو تابع مانند $u(x)$ و $v(x)$ بیان شده است را به ما می‌دهند و $f(x)$ را می‌خواهند. در این صورت باید کاری کرد که $u(x)$ به $v(x)$ تبدیل شود و بالعکس و سپس دو معادله دو مجهول حاصل را حل کرد.

مثال: از عبارات زیر $f(x)$ را به‌دست آورید:

الف) $f(x)-2f(-x)=2x^3$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)-2f(-x)=2x^3 \\ x=-x: f(-x)-2f(x)=-2x^3 \ \rightarrow\ 2f(-x)-4f(x)=-4x^3 \end{array}\right\} \Rightarrow -3f(x)=-2x^3 \Rightarrow f(x)=\frac{2x^3}{3}$$

ب) $2f(x)-f(\frac{1}{x})=3x \qquad x\neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} 2f(x)-f(\frac{1}{x})=3x \ \rightarrow\ 4f(x)-2f(\frac{1}{x})=6x \\ 2f(\frac{1}{x})-f(x)=\frac{3}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow 3f(x)=6x+\frac{3}{x}=\frac{6x^2+3}{x} \Rightarrow f(x)=\frac{6x^2+3}{3x}$$

ج) $3f(\sin x)+f(\cos x)=\cos^2 x$

$$3f(\sin(\frac{\pi}{2}-x))+f(\cos(\frac{\pi}{2}-x))=\cos^2(\frac{\pi}{2}-x) \Rightarrow 3f(\cos x)+f(\sin x)=\sin^2 x$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 3f(\sin x)+f(\cos x)=\cos^2 x \\ \quad 3f(\cos x)+f(\sin x)=\sin^2 x \ \rightarrow\ 9f(\cos x)+3f(\sin x)=3\sin^2 x \end{array}\right\}$$

$$8f(\cos x)=3\sin^2 x-\cos^2 x=3(1-\cos^2 x)-\cos^2 x$$

$$8f(\cos x)=3-4\cos^2 x \Rightarrow f(\cos x)=\frac{1}{8}(3-4\cos^2 x) \Rightarrow f(x)=\frac{1}{8}(3-4x^2)$$

توابع زوج و فرد:

تابع f را زوج نامیم هرگاه:

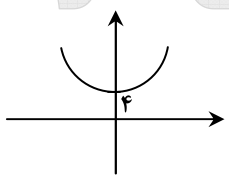
الف) دامنه‌ی آن متقارن باشد، یعنی اگر $x\in D_f$ است آن‌گاه $-x\in D_f$ باشد.

ب) برای هر $x\in D_f \ : \ f(-x)=f(x)$

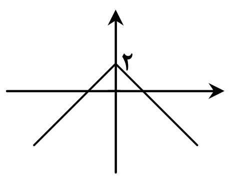
نمودار توابع زوج نسبت به محور yها قرینه است.

مثلاً توابع زیر زوجند:

$f(x)=x^2+4$



$f(x)=2-|x|$



تابع $\mathbf{f}$ را فرد نامیم هرگاه:

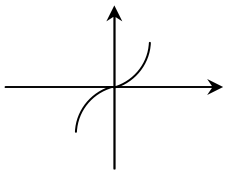
الف) دامنه‌ی آن متقارن باشد.

ب) برای هر $f(-x)=-f(x) : x \in D_f$

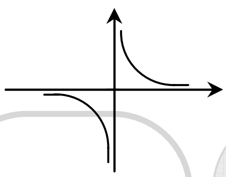
نمودار توابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

مثلاً توابع زیر فردند:

$f(x)=x^{۳}$

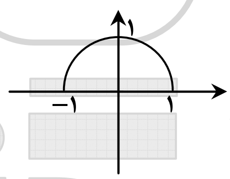


$f(x)=\frac{۱}{x}$



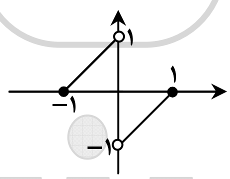
مثال: از روی نمودار تعیین کنید کدام‌یک از توابع زیر زوجند و کدام‌یک فردند؟

الف)



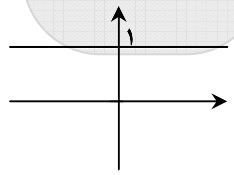
زوج است.

ب)



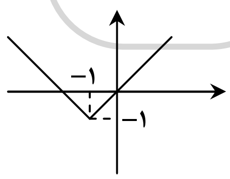
فرد است.

ج)



زوج است.

د)



نه زوج است نه فرد

مثال: زوج یا فرد بودن توابع زیر را تعیین کنید:

الف) $f(x)=x\sqrt{۵-x^{۲}}$

$f(-x)=-x\sqrt{۵-x^{۲}}=-f(x) \rightarrow$ $f(x)$ فرد است.

ج) $f(x)=|x|$

$f(-x)=|-x|=|x|=f(x) \rightarrow$ $f(x)$ زوج است.

ج) $f(x)=۲x+\operatorname{Sin}x$

$f(-x)=۲(-x)+\operatorname{Sin}(-x)=-۲x-\operatorname{Sin}x=-f(x) \rightarrow$ $f(x)$ فرد است

د) $f(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$

$f(-x)=\begin{cases} -۱ & x>۰ \\ ۱ & x<۰ \end{cases}=-f(x) \Rightarrow$ f فرد است.

مثال: زوج یا فرد بودن توابع $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ را در زیر تعیین کنید.

$f=\{(-۲,۵)،(-۱,۴)،(۰,۳)،(۱,۴)،(۲,۵)\}$

$f(-۲)=f(۲)=۵$

$f(-۱)=f(۱)=۴$

$f(۰)=۳$

f زوج است.

$g=\{(-۲,۱),(-۱,۲),(۰,۰),(۱,-۲),(۲,-۱)\}$

$f(-۲)=-f(۲)=۱$

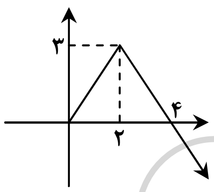
$f(-۱)=-f(۱)=۲$

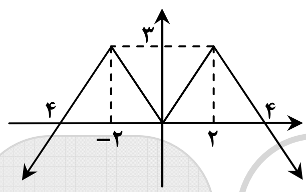
$f(۰)=۰$

f فرد است.

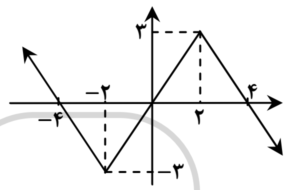
مثال: اگر تابع $y=f(x)$ در قسمت $x\geq ۰$ به شکل زیر باشد، $f(x)$ را برای $x<۰$ به‌گونه‌ای تعیین کنید که نمودار جدید یک تابع زوج را نمایش دهد.

بار دیگر $f(x)$ را برای $x<۰$ به‌گونه‌ای تعیین کنید که $f(x)$ نمایش‌دهنده تابع فرد باشد.





حالتی‌که f زوج باشد :



حالتی‌که f زوج باشد :

مثال: اگر f یک تابع زوج و غیرثابت باشد، تعیین کنید در هر یک از حالات زیر آیا g زوج است یا فرد است؟ یا نه زوج است نه فرد؟

الف) $g(x)=-f(x)$

$g(-x)=-f(-x)$. f زوج است $=-f(x)=g(x)$. g زوج است.

ب) $g(x)=f(-۵x)$

$g(-x)=f(۵x)$. f زوج است $=f(-۵x)=g(x)\rightarrow$ g زوج است.

ج) $g(x)=f(x)+۳$

$g(-x)=f(-x)+۳=f(x)+۳=g(x)\rightarrow$ g زوج است.

د) $g(x)=-f(x-۳)$

$g(-x)=-f(-x-۳)=-f(x+۳)$

چون $g(-x)$ ارتباطی با $g(x)$ ندارد، $g(x)$ نه فرد است نه زوج است.

نکات توابع زوج و فرد:

۱- داریم: (به‌صورت ستونی بخوانید)

↓ ↓ ↓ ↓

f	زوج	زوج	فرد	فرد
g	زوج	فرد	زوج	فرد
$f\pm g$	زوج	؟	؟	فرد
f.g	زوج	فرد	فرد	زوج
$\frac{f}{g}$ $g\neq ۰$	زوج	فرد	فرد	زوج
fog	زوج	زوج	زوج	فرد

۲- اگر تابع f تابعی با دامنه‌ی متقارن باشد تابع $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{۲}$ تابعی همواره زوج است و تابع $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{۲}$ تابعی همواره فرد است.

و چون داریم: $f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{۲}+\frac{f(x)-f(-x)}{۲}$ پس هر تابع فرد را می‌توان به‌صورت جمع یک تابع فرد و یک تابع زوج نوشت.

مثال: تابع $f(x)=x^۳+۲x^۲-\frac{۱}{x}+\sqrt{۱-x^۲}-۱$ را به‌صورت جمع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید.

جزء زوج: $\frac{f(x)+f(-x)}{۲}=\frac{(x^۳+۲x^۲-\frac{۱}{x}+\sqrt{۱-x^۲}-۱)+(-x^۳+۲x^۲+\frac{۱}{x}+\sqrt{۱-x^۲}-۱)}{۲}=۲x^۲+\sqrt{۱-x^۲}-۱$

جزء فرد: $\frac{f(x)-f(-x)}{۲}=x^۳-\frac{۱}{x}$

نتیجه: در چند جمله‌ای ها، جملات با درجه‌ی فرد اجزای فرد تابع و جملات با درجه‌ی زوج، اجزای زوج تابع‌اند.

مثال: اگر تابع $f(x)=x^۳+(a+۲)x^۲-\frac{۱}{x}$ تابعی فرد باشد. a کدام است؟

باید جمله درجه زوج نداشته باشیم، پس: $a=-۲$

۳- تنها تابعی که هم زوج است و هم فرد تابع ثابت: $f(x)=۰$ است. زیرا:

$$\left.\begin{array}{l}f(-x)=f(x)\\ f(-x)=-f(x)\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=-f(x)\Rightarrow ۲f(x)=۰\Rightarrow f(x)=۰$$

مثال: تابع $f(x)=[\frac{x^۲}{x^۲+۱}]$ از لحاظ زوج یا فرد بودن چگونه است؟

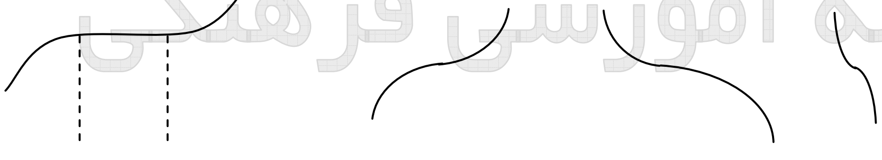
چون همواره صورت کسر از مخرج کسر کوچک‌تر است لذا: $۱>\frac{x^۲}{x^۲+۱}\geq ۰$ است. پس $[\frac{x^۲}{x^۲+۱}]=۰$ است. لذا این تابع هم زوج و هم فرد است.

تابع صعودی، تابع نزولی:

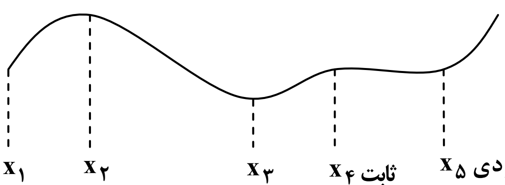
تابع $f(x)$ را صعودی نامیم، هرگاه برای هر $x_۱$ و $x_۲$ از دامنه که $x_۱<x_۲$ بود، $f(x_۱)\leq f(x_۲)$ باشد و اگر $f(x_۱)<f(x_۲)$ باشد، تابع را صعودی اکید می‌نامیم.

تابع $f(x)$ را نزولی نامیم، هرگاه برای هر $x_۱$ و $x_۲$ از دامنه که $x_۱<x_۲$، $f(x_۱)\geq f(x_۲)$ باشد.

و اگر $f(x_۱)>f(x_۲)$ باشد، تابع را نزولی اکید می‌نامیم.

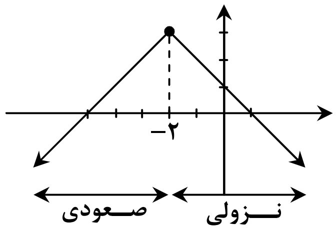


یادآوری می‌کنیم تابع $f(x)$ را ثابت می‌نامیم هرگاه برای هر دو عضو $x_۱$ و $x_۲$ از دامنه‌ی f داشته باشیم: $f(x_۱)=f(x_۲)$. ثابت ثابت هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود. البته توابع می‌توانند در قسمتی از دامنه‌ی‌شان صعودی و در قسمت دیگری نزولی باشند، مانند تابع زیر که صعودی یا نزولی نیست اما در قسمتی از دامنه صعودی و در قسمت نزولی است.



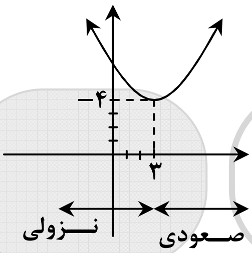
مثال: با رسم نمودار توابع زیر تعیین کنید هر کدام در دامنه‌شان در کدام قسمت صعودی و در کدام قسمت نزولی و در کدام قسمت ثابتند؟

الف) $f(x) = -|x+۲|+۳$



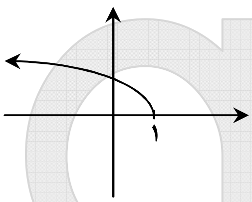
نه صعودی نه نزولی

ب) $f(x) = x^۲ - ۶x + ۱۰$



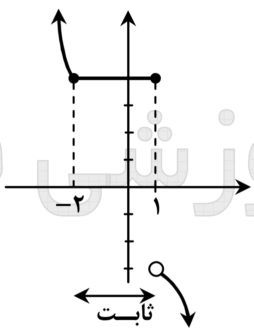
نه صودی نه نزولی

$f(x) = \sqrt{۱-x}$



تابع نزولی اکید است

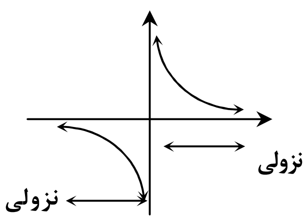
د) $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \le -۲ \\ ۴ & -۲ \le x \le ۱ \\ -x^۲ - ۲ & x > ۱ \end{cases}$



تابع نزولی است

هـ) $f(x) = \frac{۱}{x}$

تابع نه صعودی است نه نزولی



نکته: داریم: (ستونی بخوانید)

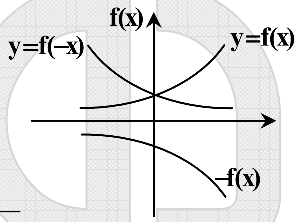
	↓	↓	↓	↓
f	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی
g	نزولی	صعودی	نزولی	صعودی
fog	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

اثبات:

$$x_2 > x_1 \xrightarrow{g\ \text{صعودی}} g(x_2) \ge g(x_1) \begin{cases} f\ \text{نزولی}: f(g(x_2)) \le f(g(x_1)) \ \text{fog نزولی} \\ f\ \text{صعودی}: f(g(x_2)) \ge f(g(x_1)) \ \text{fog صعودی} \end{cases}$$

$$x_2 > x_1 \xrightarrow{g\ \text{نزولی}} g(x_2) \le g(x_1) \begin{cases} f\ \text{صعودی}: f(g(x_2)) \le f(g(x_1)) \ \text{fog نزولی} \\ f\ \text{نزولی}: f(g(x_2)) \ge f(g(x_1)) \ \text{fog صعودی} \end{cases}$$

نکته: تابع $-f(x)$ و $f(-x)$ از لحاظ صعودی یا نزولی بودن برخلاف $f(x)$ است. (یعنی اگر $f(x)$ صعودی باشد، $f(-x)$ و $-f(x)$ نزولی است.)



مثال: صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را بررسی کنید.

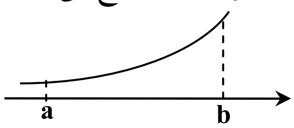
الف) $y = \sqrt{2-3x}$

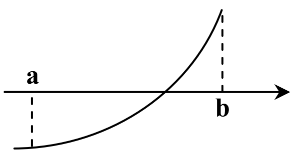
تابع $f(x) = 2-3x$ نزولی است و تابع $g = \sqrt{x}$ صعودی است در نتیجه gof نزولی است.

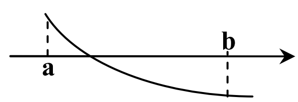
ب) $y = \cos^{-1}(2x-1)$

تابع $f(x) = 2x-1$ صعودی و تابع $g(x) = \cos^{-1}(x)$ نزولی است در نتیجه gof نزولی است.

نکته: اگر تابع $f(x)$ روی بازه $[a,b]$ صعودی اکید یا نزولی اکید باشد، در این بازه حداکثر یکبار محور xها را قطع می‌کند.





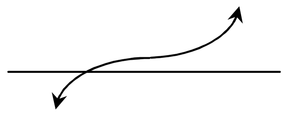


تابع یک‌به‌یک:

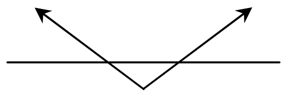
تابع تعریف شده بین دو مجموع یک‌به‌یک است هرگاه به هر عضو مجموعه دوم بیش از یک عضو از مجموعه اول نظیر نشود.

لذا در یک تابع یک‌به‌یک هر عضو برد تصویر تنها یک عضو از دامنه است.

به‌طور کلی یک تابع در صورتی یک‌به‌یک است که هر خط موازی محور xها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



یک به یک است



یک به یــک نیســت

از لحاظ ریاضی می‌توان گفت تابع f یک‌به‌یک است هرگاه:

$x_1, x_2 \in D_f$ اگر $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

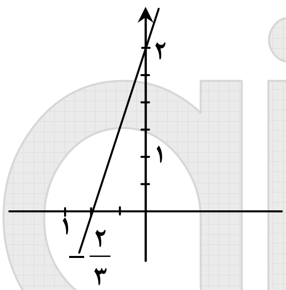
یا می‌توان گفت:

اگر $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

یک‌به‌یک بودن را هم می‌توان با توجه به نمودار و هم می‌توان با توجه به شرط بالا تحقیق کرد.

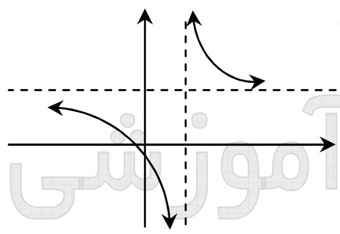
مثال: ثابت کنید توابع زیر یک‌به‌یک‌اند.

الف) $f(x) = 3x + 2$



اثبات جبری: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$

ب) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

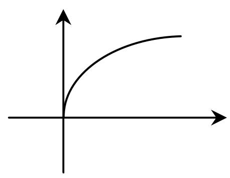


هر خط موازی محور xها تابع را در یک نقطه قطع می‌کند.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \Rightarrow 2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 1 = 2x_1x_2 - 2x_2 + x_1 - 1$$

$$\Rightarrow -2x_1 + x_2 = -2x_2 + x_1 \Rightarrow 3x_2 = 3x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

ج) $f(x) = \sqrt{x}$

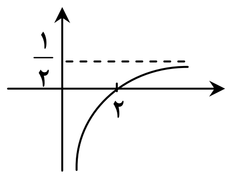


هر خط موازی محور xها تابع را در یک نقطه قطع می‌کند.

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1}=\sqrt{x_2} \Rightarrow x_1=x_2$$

د) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{2x^2} \qquad x \geq 0$

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}$$



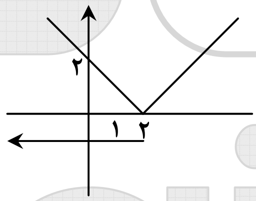
هر خط موازی محور x ها تابع را در یک نقطه قطع می‌کند.

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{2}{x_1^2}=\frac{1}{2}-\frac{2}{x_2^2} \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=x_2$$

گاهی اوقات توابعی روی همه دامنه‌ی شان یک‌به‌یک نیستند. اما با کوچک کردن دامنه یک تابع ممکن است بتوانیم تابعی یک‌به‌یک بسازیم.

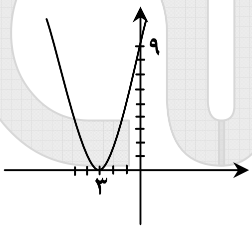
مثال: با محدود کردن دامنه‌ی هر یک از توابع زیر روی یک بازه، تابعی یک‌به‌یک بسازید.

الف) $y=|x-2|$



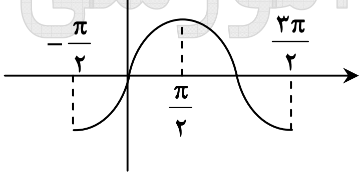
روی بازه‌های $(2,+\infty]$ و $[-\infty,2)$ جداگانه یک‌به‌یک است.

ب) $y=(x+3)^2$



روی بازه‌های $(-\infty,-3)$ و $(-3,+\infty)$ جداگانه یک‌به‌یک است.

ج) $y=\mathrm{Sin}x \qquad [-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$



روی بازه‌های $[\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ جداگانه یک‌به‌یک است.

وارون یک رابطه

اگر در یک رابطه جای مؤلفه‌های اول و دوم هر یک از زوج‌های مرتب را عوض کنیم، وارون رابطه‌ی R به‌دست می‌آید.

$$R^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in R\}$$

مثلاً اگر $R=\{(1,2),(2,3),(3,4),(1,4)\}$ باشد، آن‌گاه:

$$R^{-1}=\{(2,1),(3,2),(4,3),(4,1)\}$$

نکات:

۱- دامنه R برد R^{-1} و برد R دامنه R^{-1} است.

۲- در حالتی که رابطه به‌صورت یک نمودار نمایش داده شده باشد، با پیدا کردن قرینه هر نقطه از نمودار نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم)، نمودار وارون آن به‌دست می‌آید.

تابع معکوس یا تابع وارون:

اگر وارون تابعی مانند f، خود یک تابع باشد، آن را «تابع وارون» f می‌نامیم (تابع معکوس). در این‌صورت f را وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) می‌نامند. تابع وارون f را با نماد f^{-1} نمایش می‌دهیم. توجه کنید که f^{-1} یک نماد است و نباید آن را با $\frac{1}{f(x)}$ اشتباه گرفت.

اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد و داشته باشیم $f(a) = b$ آن‌گاه: $f^{-1}(b) = a$ برای رسم نمودار f^{-1} کافی است نمودار f را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه کنیم. تعریف زوج مرتبی f^{-1} به‌صورت زیر است:

$$f^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in f \}$$

شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری f آن است که f یک‌به‌یک باشد.

یافتن ضابطه تابع وارون:

برای به‌دست آوردن ضابطه‌ی تابع وارون یک تابع وارون‌پذیر مانند f در معادله $y = f(x)$، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x تابع $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

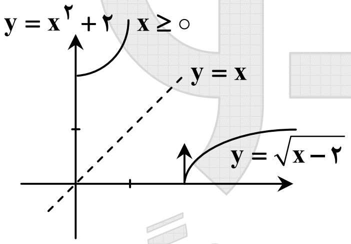
مثال: ضابطه‌ی وارون توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \sqrt{x-2}$

$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

$y = \sqrt{x-2} \xrightarrow{y \geq 0} x - 2 = y^2 \Rightarrow x = 2 + y^2 = f^{-1}(y)$

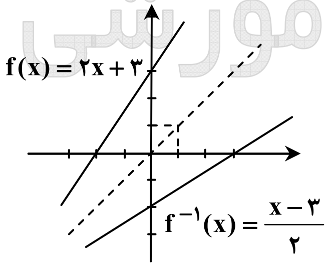
$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 2$



ب) $f(x) = 2x + 3$

$y = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2} = f^{-1}(y)$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

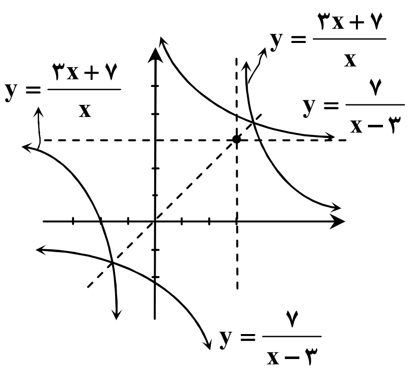


ج) $f(x) = \frac{7}{x-3}$

$y = \frac{7}{x-3} \Rightarrow yx - 3y = 7$

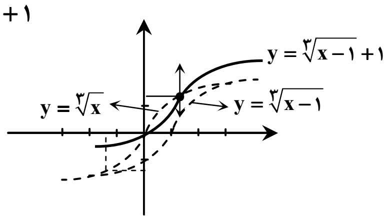
$\Rightarrow 3y = yx - 7$

$x = \frac{3y+7}{y} = f^{-1}(y) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+7}{x}$

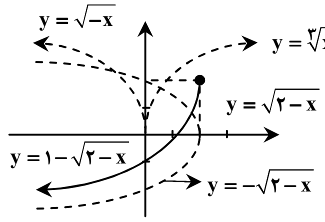


مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=\sqrt[3]{x-1}+1$



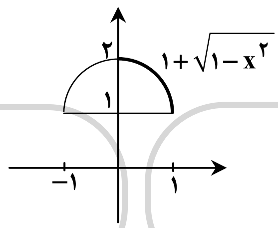
ب) $y=1-\sqrt{2-x}$



مثال: ثابت کنید که تابع $f(x)=1+\sqrt{1-x^2}$ روی دامنه‌ی $[0,1]$ یک به یک است و وارون آن را به‌دست آورید.

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 1+\sqrt{1-x_1^2}=1+\sqrt{1-x_2^2}\Rightarrow 1-x_1^2=1-x_2^2\Rightarrow -x_1^2=-x_2^2$$

$\Rightarrow x_1^2=x_2^2 \xrightarrow{x_1,x_2>0} x_1=x_2 \rightarrow$ f یک به یک است.

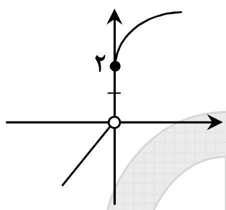


$$y=1+\sqrt{1-x^2}\Rightarrow \sqrt{1-x^2}=y-1\Rightarrow 1-x^2=(y-1)^2$$

$$\Rightarrow x^2=1-(y-1)^2 \xrightarrow{x\ge 0} x=\sqrt{1-(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y)=\sqrt{2y-y^2}\rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{2x-x^2}$$

مثال: در مورد وارون‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ \sqrt{x}+2 & x\ge 0\end{cases}$ تحقیق کنید و در صورت وارون‌پذیری، وارون آن را بیابید.



برای وارون‌پذیری توابع چند ضابطه‌ای اولاً تک‌تک ضوابط باید یک‌به‌یک باشند. ثانیاً برد ضابطه‌های مختلف نباید با هم اشتراک داشته باشند.

این دو موضوع در مورد تابع فوق‌الذکر هر دو صادقند.

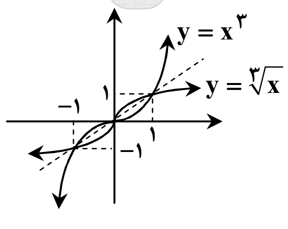
لذا معکوس تک‌تک ضابطه‌ها را به‌دست می‌آوریم. البته دقت کنید دامنه‌ی f^{-1} همان برد f است.

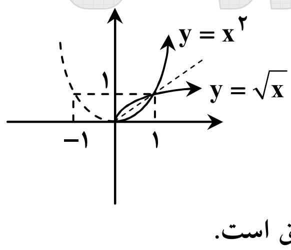
$$\begin{cases} y=x \rightarrow x=y \rightarrow f^{-1}(x)=x & x<0 \\ y=\sqrt{x}+2 \rightarrow \sqrt{x}=y-2 \xrightarrow{y\ge 2} x=(y-2)^2 \Rightarrow f^{-1}(x)=(x-2)^2 & x\ge 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ (x-2)^2 & x\ge 2\end{cases}$$

مثال: نمودار توابع $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$ را به کمک نمودار $y=x^2$ و $y=x^3$ رسم کنید.

چون $y=\sqrt{x}$ وارون تابع $y=x^2$ (برای $x>0$) و $y=\sqrt[3]{x}$ وارون تابع $y=x^3$ است، خواهیم داشت:





مثال: نشان دهید وارون تابع $y=\dfrac{ax+b}{x-a}$ بر خودش منطبق است.

$$y=\frac{ax+b}{x-a}\Rightarrow xy-ay=ax+b\Rightarrow x(y-a)=ay+b$$

$$\Rightarrow x=\frac{ay+b}{y-a}\Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{ay+b}{y-a}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{ax+b}{x-a}$$

نکته: در حالت کلی در صورتی‌که در تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+d}$، $a=-d$ باشد، وارون f بر خودش منطبق است. (از لحاظ نمودار مرکز تقارن منحنی روی خط $y=x$ قرار گرفته است.)

مثال: تابع $f(x)=ax+b$، $a\neq 0$ داده شده است. همه مقادیر a و b را به‌ازای آن‌ها: $f^{-1}(x)=f(x)$ باشد، را بیابید.

$$y=ax+b \Rightarrow x=\frac{y-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{y-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$$

$$\Rightarrow ax+b=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a} \xrightarrow[\text{باید ضرایب یکسان داشته باشند.}]{\text{برای آن‌که دو عبارت متحد باشند،}} \left.\begin{array}{l} a=\frac{1}{a} \Rightarrow a=\pm 1 \\ b=-\frac{b}{a} \Rightarrow a=-1 \end{array}\right\} \overset{\cap}{\Rightarrow} a=-1$$

یعنی اگر وارون یک تابع خطی بخواهد بر خود تابع منطبق باشد، باید این خط بر نیمساز ربع اول و سوم عمود باشد.

مثال: اگر $y=m_1x+h_1$ و $y=m_2x+h_2$ معادله‌ی دو خط باشد که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند، نشان دهید:

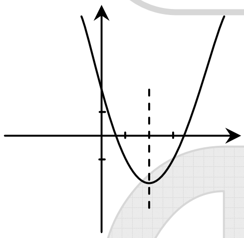
$$m_1m_2=1$$

در واقع یکی از این دو خط وارون دیگری است:

$$y=m_1x+h_1 \Rightarrow x=\frac{y-h_1}{m_1}=\frac{1}{m_1}y-\frac{h_1}{m_1} \Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{1}{m_1}y-\frac{h_1}{m_1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{m_1}x-\frac{h_1}{m_1} \overset{\text{باید دو عبارت متحد باشند.}}{=\!=\!=\!=} m_2x+x_2 \Rightarrow \frac{1}{m_1}=m_2 \Rightarrow m_1m_2=1 - \frac{h_1}{m_1}=h_2$$

مثال: تابع $y=x^2-4x+2$ را به دو جزء یک‌به‌یک تفکیک کنید و در هر بخش معکوس آن را جداگانه بیابید.



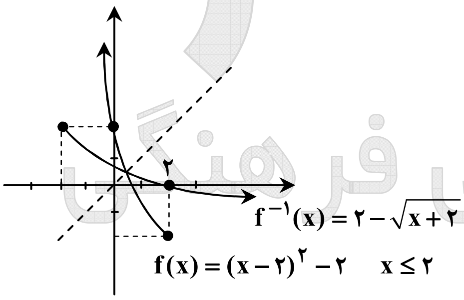
$$y=(x-2)^2-2$$

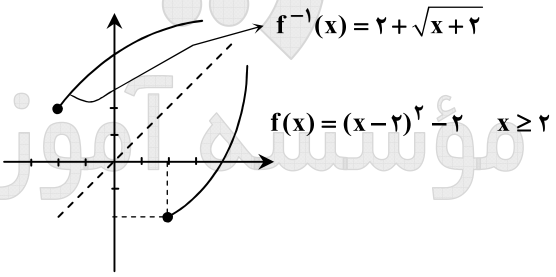
برای $x\geq 2$ و $x\leq 2$ تابع یک‌به‌یک است و خواهیم داشت:

$$(x-2)^2=y+2 \Rightarrow x-2=\pm\sqrt{y+2}$$

$$x\geq 2 \to x-2\geq 0 \xrightarrow{\sqrt{y+2}\geq 0} x-2=\sqrt{y+2} \Rightarrow x=2+\sqrt{y+2}$$

$$x\leq 2 \to x-2\leq 0 \xrightarrow{-\sqrt{y+2}\leq 0} x-2=-\sqrt{y+2} \Rightarrow x=2-\sqrt{y+2} \Rightarrow f^{-1}(x)=2-\sqrt{x+2}$$



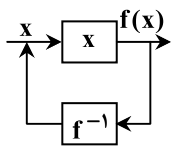


نکات وارون یک تابع:

۱- اگر f^{-1} وارون f باشد، داریم:

$$D_f=R_{f^{-1}} \qquad R_f=D_{f^{-1}}$$

۲- داریم:



$$f^{-1}of(x)=f^{-1}(f(x))=x \qquad x\in D_f$$

$$fof^{-1}(x)=f(f^{-1}(x))=x \qquad x\in D_{f^{-1}}$$

۳- $(fog)^{-1}(x)=g^{-1}of^{-1}(x)$

۴- وارون یک تابع صعودی تابعی صعودی و وارون یک تابع نزولی، تابعی نزولی است.

مثال: اگر $f=\{(۱,۳),(۲,۴)\}$ باشد، $f^{-۱}$ را به‌دست آورید، سپس $f^{-۱}of$ و $fof^{-۱}$ را نیز بیابید. آیا این دو تابع همواره برابرند؟

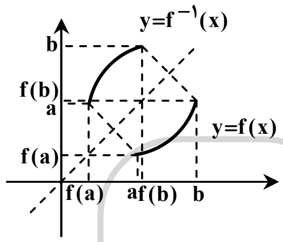
$$f^{-۱}=\{(۳,۱),(۴,۲)\}$$

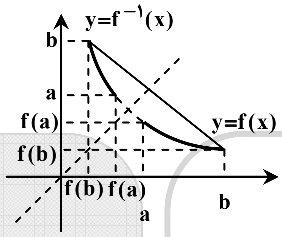
$$f^{-۱}of=\{(۱,۱),(۲,۲)\} \qquad D_f=\{۱,۲\}$$

$$fof^{-۱}=\{(۳,۳),(۴,۴)\} \qquad D_{f^{-۱}}=\{۳,۴\}$$

دقت می‌کنید که هر دو تابع نسبت به دامنه تعریفشان همانی‌اند، اما با هم برابر نیستند.

۵- اگر $f(x)$ روی $[a,b]$ نزولی باشد. $f^{-۱}(x)$ روی $[f(b),f(a)]$ نزولی است.





راه حل کلی یافتن برد توابع معکوس‌پذیر:

همان‌طور که گفتیم برای هر تابع و معکوس آن همواره:

$$D_f=R_{f^{-۱}}$$
$$D_f=D_{f^{-۱}}$$

یعنی همواره برد یک تابع معکوس‌پذیر برابر است با دامنه‌ی تابع معکوس آن.

از این راه حل در مورد توابع غیر یک‌به‌یک نیز می‌توان گاهی بهره برد، البته با در نظر گرفتن این دقت که معکوس آن ممکن است تابع نباشد.

البته در مورد توابعی که نامساوی‌هایی در مورد آن‌ها می‌دانیم می‌توانیم از آن نامساوی‌ها نیز استفاده کنیم (مانند توابع مثلثاتی یا براکتی).

مثال: برد توابع زیر را بیابید.

الف) $y=\dfrac{x^۲}{x^۲+۱}$

$$\Rightarrow x^۲y+y=x^۲ \Rightarrow x^۲(y-۱)+y=۰ \Rightarrow x^۲=\frac{y}{۱-y}$$

$$\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{y}{۱-y}} \xrightarrow{\text{دامنه‌ی } f^{-۱} \text{ را تعیین می‌کنیم}} \frac{y}{۱-y}\geq ۰$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} y & & ۰ & & ۱ & \\ \hline \frac{y}{۱-y} & - & | & + & | & - \end{array} \Rightarrow ۰\leq y<۱ \rightarrow R=[۰,۱)$$

ب) $y=x^۲-۲x$

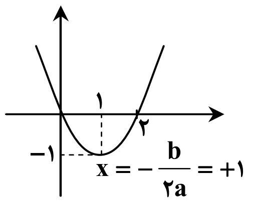
$$(x-۱)^۲=y+۱ \Rightarrow x-۱=\pm\sqrt{y+۱} \xrightarrow{\text{دامنه‌ی } f^{-۱} \text{ را تعیین می‌کنیم}} y+۱\geq ۰ \Rightarrow y\geq -۱ \Rightarrow R=[-۱,+\infty]$$

راه دوم:

$$y=(x-۱)^۲-۱$$

می‌دانیم همواره $x^۲\geq ۰$ است پس: $y=(x-۱)^۲-۱\geq -۱$

راه سوم:



ج) $y=\frac{x^۲+۱}{x}$

$$yx=x^۲+۱\Rightarrow x^۲-yx+۱=۰\Rightarrow x=\frac{+y\pm\sqrt{y^۲-۴}}{۲}$$

حال دامنه‌ی تابع فوق را می‌یابیم:

$y^۲-۴\geq ۰$ پس: $\begin{cases} y\geq ۲\\ y\leq -۲\end{cases}$

راه دوم: نکته: داریم:

$$x+\frac{۱}{x}:\begin{cases}\geq ۲ & x>۰\\ \leq -۲ & x<۰\end{cases}$$

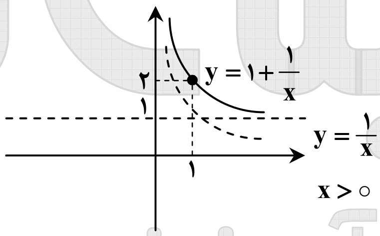
مثال: ثابت کنید $f(x)=\frac{|x|+۱}{|x|}$ زوج است و با استفاده از آن برد تابع را به‌دست آورید.

f تابعی زوج است:

$$f(-x)=\frac{|-x|+۱}{|-x|}=\frac{|x|+۱}{|x|}=f(x)$$

لذا کافی است برد را برای $x>۰$ به‌دست آوریم، چون برد قسمت $x<۰$، همان برد $x\geq ۰$ است. (به جهت تقارن تابع نسبت به محور yها)

$$x>۰: f(x)=\frac{x+۱}{x}=۱+\frac{۱}{x}$$



برد تابع برای $x>۰$, $R=(۱,+\infty)$ است. پس برد کامل تابع همین است.

البته راه اصلی پیدا کردن برد تابع آن است که دامنه‌ی تابع معکوس تابع $y=f(x)$ را به‌دست آوریم:

$$y=\frac{x+۱}{x}=۱+\frac{۱}{x}\Rightarrow y-۱=\frac{۱}{x}\xrightarrow{x>۰}x=\frac{۱}{y-۱}\xrightarrow{\frac{۱}{y-۱}>۰}f^{-۱}(y)=\frac{۱}{y-۱}>۰\to y>۱$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید برد f همان دامنه‌ی $f^{-۱}$ است. که یافتن دامنه‌ی $f^{-۱}$ نهایتاً منجر به یافتن محدوده‌ی تغییرات y می‌شود.

$$f(x)=\log(x+\sqrt{x^۲+۱})$$

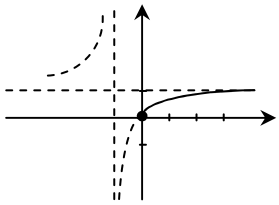
$$f(-x)=\log(-x+\sqrt{x^۲+۱})\overset{\text{ضرب در مزدوج}}{=}\log\left(\frac{(-x^۲+(x^۲+۱))}{x+\sqrt{x^۲+۱}}\right)=\log\frac{۱}{x+\sqrt{x^۲+۱}}$$

$=\log(x+\sqrt{x^۲+۱})^{-۱}=-\log(x+\sqrt{x^۲+۱})=-f(x)$ فرد است. $f(x)$

مثال: ثابت کنید که تابع $f(x)=\frac{x}{|x|+1}$ تابعی فرد است و با استفاده از آن برد f را بیابید.

$f(-x)=\frac{-x}{|-x|+1}=\frac{-x}{|x|+1}=-f(x) \rightarrow$ $f(x)$ فرد است.

اگر برد $f(x)$ در قسمت $x\geq 0$ را بیابیم. برد تابع در قسمت $x<0$ قرینه برد تابع در $x\geq 0$ است.



$x\geq 0: y=\frac{x}{x+1}$

$R=[0\ ,\ 1)$

حالا برای $x<0$، $-1<y\leq 0$ است. لذا برد تابع $-1<y<1$ است.

راه ۲: چون صورت همواره از مخرج کوچک‌تر است، پس $0\leq\frac{x}{x+1}<1$ است.

حالا برای $x<0$، $-1<y\leq 0$ است. لذا برد تابع $-1<y<1$ است.

راه ۳:

$y=\frac{x}{x+1} \overset{x\geq 0}{\Rightarrow} yx+y=x \Rightarrow x(y-1)=-y \Rightarrow x=\frac{y}{1-y}\geq 0 \Rightarrow$

		0		1	
y	−	0	+		+
$1-y$	+		+		−
$\frac{y}{1-y}$	−	0	+	تعریف نشده	−

$\Rightarrow 0\leq y<1$

حالا برای $x<0$، $-1<y\leq 0$ است. لذا برد تابع $-1<y<1$ است.

توابع متناوب:

حرکاتی که الگوی خاصی را تکرار می‌کنند، حرکت متناوب می‌نامند.

تابع f را متناوب می‌نامند، هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم:

$(x, x+T\in D_f) \qquad f(x+T)=f(x)$

کوچک‌ترین عدد T با خاصیت بالا را دوره‌ی تناوب می‌نامند.

نکات:

۱- دوره تناوب توابع $f(x)=Cos(ax+b), f(x)=Sin(ax+b)$ برابر $T=\frac{2\pi}{|a|}$ است.

و دوره تناوب توابع $f(x)=Cot(ax+b)\ ,\ f(x)=tan(ax+b)$ برابر $T=\frac{\pi}{|a|}$ است.

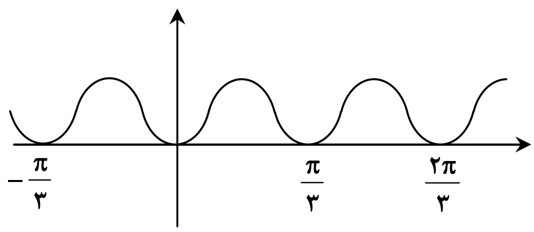
۲- دوره تناوب توابع: $f(x)=Cos^2ax\ ,\ f(x)=Sin^2ax\ ,\ f(x)=|Cosax|\ ,\ f(x)=|Sinax|$ برابر $T=\frac{\pi}{|a|}$ است.

۳- دوره تناوب تابع $f(x)=n(x)-[nx]$ برابر $T=\frac{1}{n}$ است.

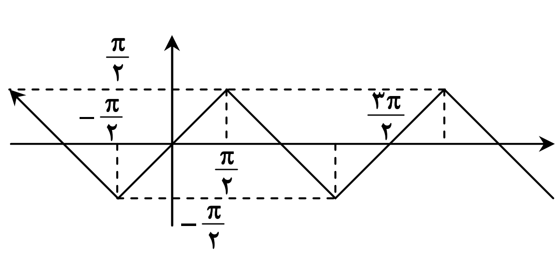
مثال: دوره تناوب توابع زیر را به‌دست آورده و آن‌ها را رسم کنید.

الف) $f(x)=Sin^2 3x$

$T=\frac{\pi}{3}$



ب) $f(x)=\text{Sin}^{-1}(\text{Sin}x)$

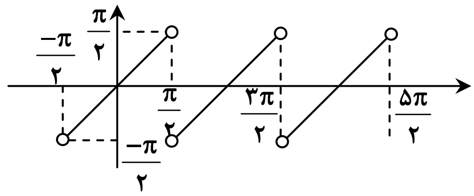


$T=2\pi$

$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\to -1\le \text{Sin}\le 1\Rightarrow -\frac{\pi}{2}\le \text{Sin}^{-1}(\text{Sin}\,x)=x\le\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}\to -1\le \text{Sin}\le 1\Rightarrow -\frac{\pi}{2}\le \text{Sin}^{-1}(\text{Sin}\,x)=x\le\frac{\pi}{2}$

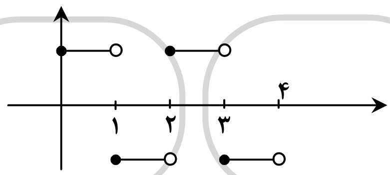
ج) $f_{(x)}=\tan^{-1}(\tan x)$



$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\to -\infty<\tan x<\infty\to -\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}(\tan x)=x<\frac{\pi}{2}$

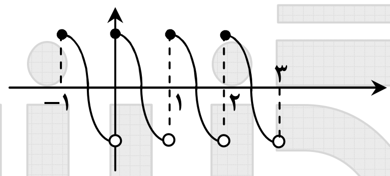
$T=\pi$

د) $f(x)=(-1)^{[x]}$



$T=2$

هـ) $f(x)=\text{Cos}\pi(x-[x])$

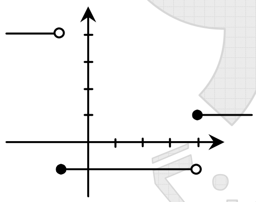


$T=1$

توابع پله‌ای:

هر تابعی که بتوان دامنه‌ی آن را به تعدادی بازه تقسیم‌بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها تابع ثابت باشد، یک تابع پله‌ای می‌نامند.

مثال: تابع پله‌ای $f(x)=\begin{cases}5 & x<-1\\ -1 & -1\le x<4\\ 2 & 4\le x\end{cases}$ را رسم کنید.



تابع جزء صحیح:

برای هر عدد حقیقی x جزء صحیح آن، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیش‌تر نیست (یعنی یا مساوی با آن است یا کوچک‌تر از آن است). جزء صحیح x را با نماد [x] نمایش می‌دهیم.

تابعی‌که به هر عدد حقیقی، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و با $f(x)=[x]$ نمایش داده می‌شود.

نکات:

۱- همواره داریم:

$[x]\le x<[x]+1$

یا

$x-1<[x]\le x$

از این‌جا نتیجه می‌شود: $0\le x-[x]<1$

۲- اگر $k \leq \mathbb{Z}$ باشد، داریم:

$$[x+k]=[x]+k$$

۳-

$$[2x]=[x]+[x+\frac{1}{2}]$$

$$[3x]=[x]+[x+\frac{1}{3}]+[x+\frac{2}{3}]$$

$$\vdots$$

$$[nx]=[x]+[x+\frac{1}{n}]+\dots+[x+\frac{n-1}{n}]$$

اثبات: برای نمونه اولین رابطه را اثبات می‌کنیم.

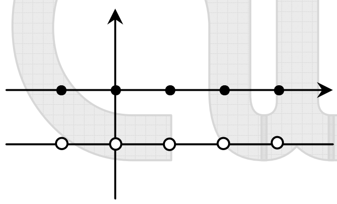
اگر α جزء اعشاری عدد باشد: $0 \leq \alpha < 1$ $\quad x=[x]+\alpha$

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \rightarrow [2x]=[2([x]+\alpha)]=2[x]+[2\alpha]=2[x]+\overbrace{\underbrace{[2\alpha]}_{0\leq 2\alpha<1}}^{0}=2[x] \\ \frac{1}{2} \leq \alpha < 1 \rightarrow [2x]=[2([x]+\alpha)]=2[x]+\underbrace{[2\alpha]}_{1\leq 2\alpha<2}=2[x]+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \rightarrow [x]+[x+\frac{1}{2}]=2[x] \\ \frac{1}{2} \leq \alpha < 1 \rightarrow [x]+[x+\frac{1}{2}]=2[x]+1 \end{cases}$$

۴-

$$[x]+[-x]=\begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

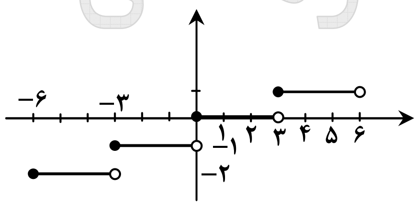


نتیجه:

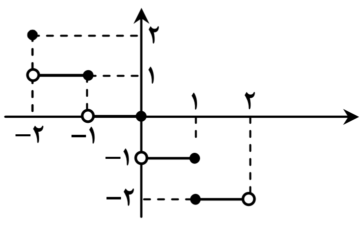
$$[-x]=\begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -1-[x] & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

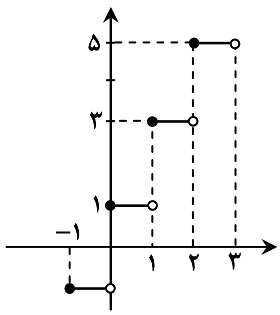
مثال: نمودار توابع زیر را در بازه‌های خواسته شده به‌دست آورید.

$f(x)=[\frac{x}{3}]$ $\qquad [-6,6]$



$f(x)=[-x]$ $\qquad [-2,2]$





$f(x) = ۲[x] + ۱ \qquad [-۱, ۳]$

مثال: دامنه‌ی توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{۱ - [۳ - \sqrt{x}]}$

$۱ - [۳ - \sqrt{x}] = ۱ - ۳ - [-\sqrt{x}] \geq ۰ \Rightarrow [-\sqrt{x}] \leq -۲ \Rightarrow -\sqrt{x} < -۱ \Rightarrow \sqrt{x} > ۱ \Rightarrow x > ۱$

ب) $f(x) = \dfrac{x}{[x] + [-x]}$

$[x] + [-x] = \begin{cases} -۱ & x \notin \mathbb{Z} \\ ۰ & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

پس دامنه‌ی این تابع عبارت است از: $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

ج) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - [x]}{x^۲ + x + ۱}}$

$x^۲ + x + ۱ : \Delta = ۱ - ۴ < ۰ \rightarrow$ مخرج همواره مثبت است

$f(x) = \dfrac{۱}{[|x|]} \;,\; [|x|] \neq ۱ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |x| \geq ۲ \Rightarrow \begin{array}{l} x \geq ۲ \\ x \leq -۲ \end{array} \\ |x| < ۱ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۱ \end{array}\right\} D = (-\infty, -۲] \cup [-۱, ۱] \cup [۲, \infty)$

مثال: برد تابع $f(x) = \sqrt{x - ۹[\frac{x}{۹}]}$ شامل چند عدد صحیح است؟

$f(x) = \dfrac{۱}{[|x|] - ۱}$

$x - ۹[\frac{x}{۹}] = ۹(\frac{x}{۹} - [\frac{x}{۹}])$

می‌دانیم $۰ \leq x - [x] < ۱$ پس: $۰ \leq \frac{x}{۹} - [\frac{x}{۹}] < ۱$

$\Rightarrow ۰ \leq ۹(\frac{x}{۹} - [\frac{x}{۹}]) < ۹ \Rightarrow ۰ \leq \sqrt{x - ۹[\frac{x}{۹}]} < ۳$

مثال: معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید:

الف) $[\frac{x}{۳}] = \frac{x}{۳}$

چون براکت عدد صحیح است، لذا: $\frac{x}{۳} = k \in \mathbb{Z}$ پس: $x = ۳k$ لذا:

$[\frac{۳k}{۴}] = k \Rightarrow \frac{۳k}{۴} - ۱ < [\frac{۳k}{۴}] \leq \frac{۳k}{۴} \Rightarrow \frac{۳k - ۴}{۴} \leq k \leq \frac{۳k}{۴} \Rightarrow ۳k - ۴ \leq ۴k \leq ۳k$

$\Rightarrow -۴ \leq k \leq ۰ \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = ۰, -۱, -۲, -۳ \Rightarrow x = ۰, -۳, -۶, -۹$

ب) $[x]-[-x]=۷$

$$[-x]=\begin{cases}-[x] & x\in\mathbb{Z}\\ -[x]-۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\begin{cases}[x]-(-[x])=۷ & x\in\mathbb{Z}\\ [x]-(-[x]-۱)=۷ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[x]=\frac{۷}{۲} \Rightarrow \text{غیرممکن}\\ [x]=۳ \Rightarrow ۳<x<۴\end{cases}$$

ج) $[\frac{x+۲}{x}]=۲$

$$[۱+\frac{۲}{x}]=۲ \Rightarrow ۱+[\frac{۲}{x}]=۲ \Rightarrow [\frac{۲}{x}]=۱ \Rightarrow ۱\le\frac{۲}{x}<۲ \Rightarrow ۱<x\le ۲$$

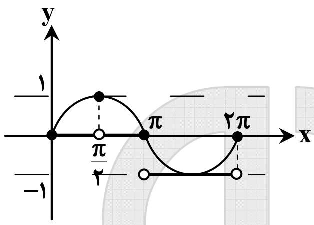
رسم تابع $y=[f(x)]$ و $y=f([x])$

رسم $y=[f(x)]$

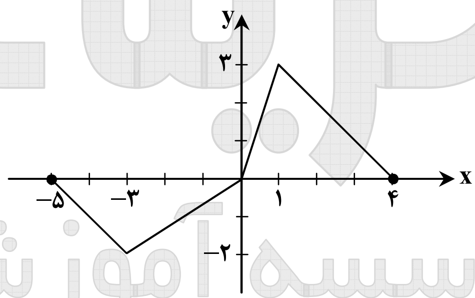
برای رسم $y=[f(x)]$ خطوط $y=k\in\mathbb{Z}$ را به موازات محور xها رسم می‌کنیم و سپس در نقاط تقاطع با منحنی قسمتی که بین دو خط محور شده است را روی خط پایینی تصویر می‌کنیم.

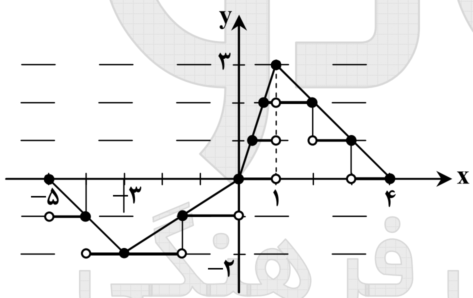
در نواحی‌ای که تابع صعودی است، ابتدای بازه‌ها را تو پر رسم می‌کنیم، و در نواحی‌ای که تابع نزولی است، انتهای بازه‌ها را تو پر رسم می‌کنیم.

مثال: نمودار $y=[\sin x]$ را رسم کنید. (در یک دوره‌ی تناوب)



مثال: اگر f به شکل زیر باشد، $y=[f(x)]$ را رسم کنید.





رسم $y=f([x])$:

برای رسم $y=f([x])$ خطوط $x=k\in\mathbb{Z}$ را رسم کرده و از ابتدای نقطه‌ی تقاطع هر خط با منحنی پاره‌خطی به طول ۱ واحد به سمت راست رسم می‌کنیم. همواره نقاط ابتدای بازه‌ها تو پر خواهند بود (یعنی نقاط سمت چپ توپرند).

مثال: اگر نمودار $y=f(x)$ به شکل زیر باشد، $y=f([x])$ را رسم کنید.