

پاسخنامه تشریحی مسائل سری اول

۱- با توجه به رابطه زیر عمل میکنیم:

$$\text{Arctg}(\alpha) + \text{Arctg}(\beta) = \text{Arctg}\left(\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}\right)$$

حال داریم:

$$\text{Arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{Arctg}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctg}\left(\frac{1}{7}\right) + \text{Arctg}\left(\frac{1}{9}\right) = \text{Arctg}\left(\frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}\right)}\right) +$$

$$\text{Arctg}\left(\frac{\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right)}{\left(1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9}\right)}\right) = \text{Arctg}\left(\frac{4}{7}\right) + \text{Arctg}\left(\frac{3}{11}\right) = \text{Arctg}\left(\frac{\left(\frac{4}{7} + \frac{3}{11}\right)}{\left(1 - \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{11}\right)}\right) =$$

$$\text{Arctg}\left(\frac{(21 + 44)}{(77 - 12)}\right) = \text{Arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

تالیفی بیک محمدی

۲- با توجه به رابطه زیر داریم:

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin\left(x + \text{Arctg}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

$$a \cos \varphi\theta + b \sin \varphi\theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin\left(\varphi\theta + \text{Arctg}\left(\frac{a}{b}\right)\right) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\varphi\theta + \text{Arctg}(\text{Cotg } \theta))$$

داریم:

$$\text{Arctg}(\text{Cotg } \pi) = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \sin\left(\varphi\theta + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \theta$$

همچنین طبق فرض مساله داریم: $\text{Cotg } \theta = \frac{a}{b}$

بنابراین:

$$1 + \text{Cotg } \varphi\theta = \frac{1}{\sin \varphi\theta} \rightarrow \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{\varphi}\right)} = \sin \varphi\theta \rightarrow \sin \theta = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow a \cos \varphi\theta + b \sin \varphi\theta = \sqrt{a^2 + b^2} \times \left(\frac{\pm a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \pm a$$

میبینیم که حاصل مستقل از θ است.

تالیفی بیک محمدی

۳- معادله را مرتب کرده و از روش دلتا کمک میگیریم:

$$4 \sin^2 \theta - 2(\sqrt{3}+1) \sin \theta + \sqrt{3} = 0$$

$$\left(\left(\frac{(\sqrt{3}+1)}{2} \right) \pm \left(\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2} \right) \right) = \sin \theta$$

$$\rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$$

$$(1) \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$(2) \sin \theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

تالیفی بیک محمدی

$$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{Cotg} x = c \rightarrow a \operatorname{tg} x + \frac{b}{\operatorname{tg} x} = c \rightarrow a \operatorname{tg}^2 x - c \operatorname{tg} x + b = 0 \quad -4$$

$$\left(\frac{c}{2a} \right) \pm \left(\frac{\sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right)$$

شرط وجود جواب در حوزه اعداد حقیقی این است که عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد بنابراین داریم:

$$c^2 \geq 4ab$$

تالیفی بیک محمدی

$$a \sin^2 x + b(1 - \sin^2 x) = c \rightarrow (a-b) \sin^2 x = c-b \rightarrow \sin^2 x = \frac{c-b}{a-b} \rightarrow \sin^2 x = \frac{(c-b)}{(a-b)} \quad -5$$

با توجه به اینکه $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ پس:

$$0 \leq \frac{(c-b)}{(a-b)} \leq 1$$

تالیفی بیک محمدی

۶- چون تابع چند جمله ای است و ترکیبش با خودش خطی است پس حتماً f بصورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = ax + b$$

$$f(f(x)) = a(ax+b) + b \rightarrow a^2 x + ab + b = x + 4$$

بنابراین با متحد قرار دادن دو عبارت داریم:

$$ab + b = 4 \rightarrow b = \frac{4}{(a+1)} \rightarrow a = 1, b = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = x + 2 \rightarrow f(0) = 2$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است

تالیفی بیک محمدی

۷- در صورتیکه α, β ریشه های معادله درجه دوم باشند و $\alpha \geq \beta$ آنگاه داریم:

$$\alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

$$a - b = \frac{-\sqrt{\Delta}}{a} = -\sqrt{5} \rightarrow [a - b] = [-\sqrt{5}] = -3$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

تالیفی بیک محمدی

$$\alpha^2 - \beta = \alpha + 10 \rightarrow \alpha^2 = \alpha + \beta + 10 = -9 + 10 = 1 \rightarrow \alpha^2 = \pm 1 \quad -8$$

$\alpha = -1$ نمیتواند قابل قبول باشد چون در معادله ی $K^2 = 0$ برای $1 - 9 - K^2 = 0$ جواب بدست نمی آید.

$$\Rightarrow \alpha = 1 \rightarrow 1 + 9 - k^2 = 0 \rightarrow -k^2 = -10 \Rightarrow \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -k^2 = -10$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح می باشد.

تالیفی بیک محمدی

۹- برای بدست آوردن باقیمانده ی f بر $x-2$ باید $f(2)$ را بدست آوریم برای این منظور کافی است در رابطه سوال $x = 1$ قرار دهیم. داریم:

$$x = 1 \rightarrow f(2) + 2f(2) = 1 + 5 \rightarrow f(2) = 3$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

تالیفی بیک محمدی

۱۰- با توجه به رابطه تقسیم داریم: ($R(x)$ باقیمانده و $Q(x)$ خارج قسمت)

$$x^2 - x = (x+1) Q(x) + (x+1)$$

حال کافی است $x = 1$ قرار داده تا مجموع ضرایب $Q(x)$ حاصل شود:

$$\Rightarrow x = 1 \rightarrow 0 = 2Q(1) + 2 \rightarrow Q(1) = -1$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

تالیفی بیک محمدی