جلسه‌ی دهم، یازدهم و دوازدهم ـ نظریه‌ی مجموعه‌ها

توجه:

- مطابق قوانین درس، با تقلّب در تمرین‌ها به شدّت برخورد خواهد شد. با توجه به سخت‌گیری کم در تصحیح تمرینات، نوشتن راه حل نادرست حاصل از تلاش، بسیار معقول‌تر از تقلّب است.
- تمرینات باید در برگه‌ی $A۴$ نوشته شوند.
- تمرین تحویلی سری ۶: سوال شماره ۵ (مهلت تحویل: ۲۰ مرداد)

۱. در کلاس، برای تعریف زوج مرتب (x,y)، مجموعه‌ی $\{\{x\},\{x,y\}\}$ را تعریف کردیم. نشان دهید این تعریف، تعریف مناسبی برای زوج مرتب است. در واقع باید نشان دهید دو زوج مرتب $(x_۱,y_۱),(x_۲,y_۲)$ برابرند، اگر و تنها اگر $x_۱ = x_۲, y_۱ = y_۲$ باشند. سپس نشان دهید تعریف‌های زیر، تعریف‌های مناسبی برای زوج مرتب نیستند:

آ) $\{\{x\},\{y\}\}$

ب) $\{x,\{y\}\}$

پس از آن بررسی کنید کدام یک از تعریف‌های زیر، تعریف مناسبی برای سه‌تایی مرتب (x,y,z) هستند:

آ) $\{\{x,y\},\{y,z\}\}$

ب) $(\{x,y\},\{y,z\})$

ج) $\{\{x\},\{x,y\},\{x,y,z\}\}$

۲. فرض کنید $X \neq \phi$ و $f : X \to Y$ یک تابع باشد. ابتدا صورت هر یک از قسمت‌ها را خوب هضم کنید و سپس شروع به فکر کردن کنید!

آ) نشان دهید f یک تابع درون‌گستر[۱] است، اگر و تنها اگر تابع $g : Y \to X$ وجود داشته باشد که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $g(f(x)) = x$.

[۱] injective

ب) نشان دهید f یک تابع برون‌گستر[۲] است، اگر و تنها اگر تابع $g : Y \to X$ وجود داشته باشد که به ازای هر $y \in Y$ داشته باشیم $f\big(g(y)\big) = y$.

ج) نشان دهید f یک تابع درون‌گستر است، اگر و تنها اگر به ازای هر دو تابع $h_۱, h_۲ : Y \to X$ که برای هر $y \in Y$، شرط $f\big(h_۱(y)\big) = f\big(h_۲(y)\big)$ را دارند، بتوان نتیجه گرفت $h_۱ = h_۲$.

د) نشان دهید f یک تابع برون‌گستر است، اگر و تنها اگر به ازای هر دو تابع $h_۱, h_۲ : Y \to X$ که برای هر $x \in X$، شرط $h_۱\big(f(x)\big) = h_۲\big(f(x)\big)$ را دارند، بتوان نتیجه گرفت $h_۱ = h_۲$.

آیا در این مسئله از اصل انتخاب استفاده کردید؟ اگر پاسخ مثبت است، کجا؟

۳. آ) نشان دهید ضرب کارتزین تعدادی متناهی مجموعه‌ی شمارا، شماراست.

ب) فرض کنید X یک مجموعه‌ی شمارا باشد. یک **دنبالک** از X، دنباله‌ای متناهی از اعضای X است. نشان دهید مجموعه‌ی تمام دنبالک‌های X، شماراست.

ج) یک عدد حقیقی را **جبری** گوییم، هرگاه ریشه‌ی یک چندجمله‌ای مانند $a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \ldots + a_۰$ باشد؛ طوری که تمام a_i ها عدد صحیح باشند. نشان دهید مجموعه‌ی اعداد جبری، شماراست! یک عدد حقیقی را **متعالی** گوییم، هرگاه جبری نباشد. ثابت کنید مجموعه‌ی اعداد متعالی ناشماراست.

۴. آ) نشان دهید تابعی دوسویه[۳] از مجموعه‌ی اعداد حقیقی بازه‌ی $(۰, ۱)$ به $\mathbb{R}$ وجود دارد.

ب) نشان دهید تابعی دوسویه از مجموعه‌ی نقاط یک مربع ۱×۱ به $\mathbb{R}$ وجود دارد.

ج) نشان دهید تابعی دوسویه از مجموعه‌ی نقاط یک صفحه به $\mathbb{R}$ وجود دارد.

۵. آ) تعدادی دایره در یک صفحه قرار دارند. مجموعه‌ی این دایره‌ها را C در نظر بگیرید. به ازای نقطه در صفحه مانند P، C_P را مجموعه‌ی دایره‌هایی در نظر می‌گیریم که شامل آن نقطه می‌شوند. نشان دهید اگر به ازای هر P داشته باشیم $|C_P| \leq |\mathbb{N}|$، آنگاه $|C| \leq |\mathbb{N}|$.

ب) تعدادی دایره در یک صفحه قرار دارند. مجموعه‌ی این دایره‌ها را C در نظر بگیرید. می‌دانیم مرکز هیچ دایره‌ای در دایره‌ای دیگر نیست. نشان دهید $|C| \leq |\mathbb{N}|$.

[۲] surjective
[۳] bijective