

به نام خدا

آزمون تئوری ششم

چهارشنبه ششم دی ماه ۱۳۹۱ - زمان: ۴ ساعت

پرسش نخست:

p آرایه‌ی مرتب داریم که هر یک شامل n عدد هستند. می‌خواهیم این آرایه‌ها را merge کنیم یعنی آرایه‌ی مرتبی شامل همه‌ی np عدد به دست آوریم.

(آ) الگوریتمی ارائه دهید که این کار را در $O(np^2)$ انجام دهد.

(ب) الگوریتمی ارائه دهید که این کار را در $O(n^2 p)$ انجام دهد.

(پ) الگوریتمی ارائه دهید که این کار را در $O(n^2 \lg p)$ انجام دهد.

پرسش دوم:

می‌دانیم به ازای هر عدد طبیعی $n > 1$ ، عدد اولی بین n و $2n$ موجود است.

ثابت کنید هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۶ را می‌توان به صورت حاصل جمع اعداد اول متمایز نوشت.

پرسش سوم:

فرض کنیم $n, r \in \mathbb{N}$ و $r \leq n$ ، ثابت کنید:

$$\sum_{k=r}^n C(n, k) C(k, r) = C(n, r) 2^{n-r}$$

پرسش چهارم:

یک n ضلعی در صفحه داریم. مختصات رأس‌های این n ضلعی به شما داده شده است. شما باید تعیین کنید این n ضلعی محدب است یا نه.

(آ) الگوریتمی از $O(n^2)$ برای این کار ارائه دهید.

(ب) الگوریتمی از $O(n)$ برای این کار ارائه دهید.

پرسش پنجم:

گراف وزن‌دار و جهت‌دار G با n رأس و m یال مفروض است. فاصله‌ی k تایی رأس a تا رأس b برابر است با طول کوتاه‌ترین گشت از a به b که دقیقاً k یال دارد.

می‌خواهیم فاصله‌ی k تایی هر جفت از رأس‌های G را بیابیم.

(آ) الگوریتمی از $O(n^3 \lg k)$ ارائه دهید که این کار را انجام دهد.

(ب) الگوریتمی از $O(nmk)$ ارائه دهید که این کار را انجام دهد.

پرسش ششم:

یک دنباله‌ی دودویی به طول $2n$ داریم که همه‌ی رقم‌های آن صفر نیستند. در هر مرحله از دنباله‌ای که داریم دنباله‌ی جدیدی می‌سازیم به این شکل که اگر i امین رقم دنباله‌ی قدیمی دقیقاً با یک رقم ۱ مجاور بود، i امین رقم دنباله‌ی جدید را ۱ قرار می‌دهیم و در غیر

این صورت i امین رقم دنباله‌ی جدید را ۰ قرار می‌دهیم.

ثابت کنید دنباله‌ی ما هیچ‌گاه صفر نمی‌شود.

پیروز باشید!