زمان رسیدن جسم افتان به زمین با وجود مقاومت هوا

سمیه بلباسی، م. ابراهیم فولادوند

گروه فیزیک، دانشگاه زنجان، زنجان

چکیده

در این نوشته به بررسی زمان رسیدن جسم افتان از بلندی h به زمین می‌پردازیم. مقاومت هوا را به صورت‌های خطی، مجذوری، و جذری می‌گیریم. حرکت جسم افتان را در دو حالت مختلف به صورت تحلیلی و عددی حل می‌کنیم. در نخستین حالت جسم بدون سرعت آغازین رها می‌شود، و در حالت دوم یک سرعت آغازین افقی v_0 دارد. زمان رسیدن به زمین را در این دو حالت می‌یابیم و با هم می‌سنجیم.

گاما، شماره ی ۲۸، مقاله ی ۱ (تابستان ۱۳۹۳) ویرایش ۱ (۱۳۹۳/۶/۱۰)

Abstract

We investigate the filght time of a falling object when there is air resistance. We consider frictions as linear, quadratic, and square root of velocity, in two cases: 1) object starts motion at rest, 2) object has an initial *horizontal* velocity. We compare flight times of these two cases.

S. Belbasi, M.-E. Fouladvand, *Flight Time of a Falling Object*, Gamma, no. 28, art. 1 (Summer 2014), v. 1 (1 Sep 2014)

URL: http://www.gammajournal.ir

اگر دو جسم افتان از بلندی h حرکت خود را آغاز کنند، یکی با سرعت آغازین صفر، و دیگری با سرعت افقی v_0، کدام یک زودتر به زمین می‌رسد؟ در نبودِ مقاومت هوا هر دو با هم به زمین می‌رسند، زیرا معادله ی حرکت در راستا ی قائم y با معادله ی حرکت در راستا ی افقی x جفت نیست، و به سرعتِ آغازین در راستا ی x وابسته نیست. امّا، با بودنِ مقاومتِ هوا مسئله فرق می‌کند. نیرو یِ مقاومتِ هوا را به صورتِ $\boldsymbol{F} = -K\, v^{\alpha}\, \hat{\boldsymbol{v}}$ می‌گیریم و بسته به این که α کوچکتر، برابر، یا بزرگتر از 1 باشد، مسئله را بررسی می‌کنیم.

۱ $\alpha < 1$

در این حالت بهتر است سوی مثبت y را به سمت زمین بگیریم. با توجه به معادله ی حرکت

$$m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = +m\,\boldsymbol{g} - K\,v^{\alpha-1}\,\boldsymbol{v} \tag{1}$$

معادله ی مربوط به v_y به صورت زیر است:

$$\frac{dv_y}{dt} = g - k\,v_y^{\alpha}, \qquad k := \frac{K}{m}. \tag{2}$$

نمو مؤلفه ی قائم سرعت جسمی که بدون سرعت آغازین می‌افتد، $\tilde{v}_y$، بر اساس این معادله چنین است:

$$d\tilde{v}_y = \left(g - k\,\tilde{v}_y^{\alpha}\right)\,dt. \tag{3}$$

در حالی که نمو مؤلفه ی قائم سرعت جسمی که با سرعت آغازین افقی پرتاب می‌شود، v_y، در هر لحظه برابر است با

$$dv_y = \left[g - k\,v_y\,\left(v_x^2 + v_y^2\right)^{(\alpha-1)/2}\right]\,dt. \tag{4}$$

می‌توانیم این دو رابطه را وارون کنیم و نمو زمان را بر حسب نمو سرعت بنویسیم:

$$d\tilde{t} = \left(g - k\,\tilde{v}_y^{\alpha}\right)^{-1}\,d\tilde{v}_y, \tag{5}$$

$$dt = \left[g - k\,v_y\,\left(v_x^2 + v_y^2\right)^{(\alpha-1)/2}\right]^{-1}\,dv_y. \tag{6}$$

اکنون با انتگرال‌گیری می‌توانیم مدت زمان لازم را، برای این که هر یک از دو جسم به سرعت مشخص V برسند، مقایسه کنیم. با توجه به نابرابری

$$\frac{v_y}{\left(v_x^2 + v_y^2\right)^{(1-\alpha)/2}} < \frac{v_y}{v_y^{1-\alpha}} = v_y^{\alpha}, \tag{7}$$

برای $\alpha < 1$ خواهیم داشت:

$$T = \int_0^V \left[g - k\,v_y\,\left(v_x^2 + v_y^2\right)^{(\alpha-1)/2}\right]^{-1}\,dv_y < \int_0^V \left(g - k\,\tilde{v}_y^{\alpha}\right)^{-1}\,d\tilde{v}_y = \tilde{T}. \tag{8}$$

زیرا انتگرالده سمت چپ همیشه از انتگرالده سمت راست کوچکتر است. پس مؤلفه ی قائم سرعت جسمی که با سرعتی افقی پرتاب می‌شود زودتر به مقداری معین می‌رسد، و به سادگی، مثلاً با در نظر گرفتن مساحت زیر خم $v_y(t)$ یعنی $\int v_y\,dt$، می‌توان نتیجه گرفت جسمی که با سرعت آغازین افقی پرتاب می‌شود زودتر از جسمی که با سرعت آغازین قائم پرتاب می‌شود به زمین می‌رسد.

۲ $\alpha = 1$

اگر نیروی مقاومت هوا متناسب با v باشد، نابرابری‌های 7 و 8 به برابری تبدیل می‌شوند، و هر دو جسم هم‌زمان به زمین می‌رسند. همین نتیجه را می‌توان به این صورت نیز دید که معادله‌های حرکت برای راستاهای x و y جفت نمی‌شوند، و معادله ی حرکت در راستای y به حرکت در راستای x و در نتیجه به سرعت آغازین افقی وابسته نیست.

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{K}{m}\, v_x, \tag{9}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{K}{m}\, v_y. \tag{10}$$

در این معادله‌ها سوی مثبت y به سمت بالا است. با انتگرال گرفتن از معادله ی دوم می‌توان زمانِ رسیدنِ پرتابه به زمین را به صورت تحلیلی به دست آورد. تعریف می‌کنیم

$$c_1 := K, \tag{11}$$

و خواهیم داشت

$$v_y(t) = \frac{gm}{c_1}(e^{-\frac{c_1}{m}t} - 1) \Rightarrow \int_h^{y(t)} dy = \int_0^t v_y(t')dt' = \frac{gm}{c_1}\int_0^t (e^{-\frac{c_1}{m}t'} - 1)dt' \tag{12}$$

و بنا بر این

$$y(t) = h - \frac{g\,m}{c_1}\left[\frac{m}{c_1}\left(e^{-\frac{c_1\,t}{m}} - 1\right) + t\right]. \tag{13}$$

برای به دست آوردن زمان برخورد به زمین باید معادله ی $y(t) = 0$ را حل کنیم:

$$\frac{c_1\,h}{g\,m} = \frac{m}{c_1}\left(e^{-\frac{c_1\,t}{m}} - 1\right) + t. \tag{14}$$

این معادله حل دقیق ندارد، اما همان طور که در کتاب آریا [۱] اشاره شده است، می‌توان آن را به صورت اختلالی حل کرد. یعنی، فرض می‌کنیم c_1/m کوچک است و با بسط دادن $\exp(-c_1\,t/m)$ تا مرتبه ی سوم، به معادله ی زیر می‌رسیم.

$$\frac{h}{g} = \frac{t^2}{2} - \frac{c_1\,t^3}{6\,m}. \tag{15}$$

با کمی دقت دیده می‌شود که اگر نیروی میراننده وجود نداشته باشد، یعنی $c_1 = 0$، به همان نتیجه ی آشنای $t = \sqrt{2\,h/g}$ می‌رسیم. اگر نیروی میراننده وجود داشته باشد، زمان را بر حسب پارامتر کوچک c_1/m و با چشم‌پوشی از جملات با توان بیشتر از 2 گرد این جواب بسط می‌دهیم. خواهیم داشت

$$t = \sqrt{\frac{2\,h}{g}} + \beta_1\,\frac{c_1}{m} + \beta_2\left(\frac{c_1}{m}\right)^2. \tag{16}$$

با برابر قرار دادن ضرایب جملات متناسب با c_1/m و $(c_1/m)^2$، β_1 و β_2 را به دست می‌آوریم. سرانجام به این نتیجه می‌رسیم که

$$t = \sqrt{\frac{2\,h}{g}} + \frac{h}{3\,g}\frac{c_1}{m} + \frac{5\sqrt{2}}{12}\left(\frac{h}{g}\right)\left(\frac{c_1}{m}\right)^2 + O\left(\frac{c_1}{m}\right)^3. \tag{17}$$

با شرایط آغازین

$$h = 10\,\mathrm{m} \qquad \frac{c_1}{m} = 0.1 \qquad g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \tag{18}$$

تا مرتبه ی اول زمان $t = 1.463\,\mathrm{s}$ و تا مرتبه ی دوم زمان $t = 1.464\,\mathrm{s}$ به دست می‌آید. مقداری که به روش شبیه‌سازی به دست می‌آید $1.47\,\mathrm{s}$ است.

۳ $\alpha > 1$

در این حالت سوی نابرابری‌های 7 و 8 عوض می‌شود و همیشه خواهیم داشت $T > \tilde{T}$، یعنی جسمی که قائم می‌افتد زودتر از جسمی که افقی پرتاب شده به زمین می‌رسد.

چون حالت $\alpha = 2$ اهمیت ویژه‌ای در مکانیک و مکانیک شاره‌ها دارد، آن را دقیق‌تر بررسی می‌کنیم. همان طور که در کتابهای فاؤلز [۲] و ماریون [۳] اشاره شده، می‌توان معادله ی حرکت در راستای y را برا ی جسمی که بدون سرعت آغازین شروع به حرکت می‌کند، به صورت زیر نوشت. جهت مثبت y بالا است و $c_2 := K$.

$$m\,\frac{dv}{dt} = -m\,g - c_2\,v^2. \tag{19}$$

این معادله را می‌توان با استفاده از

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\,\tanh^{-1}\frac{u}{a} \tag{20}$$

حل کرد. پاسخ این است:

$$v = -\sqrt{\frac{g}{c_2}}\,\tanh\left(t\sqrt{\frac{c_2\,g}{m}}\right). \tag{21}$$

انتگرال‌گیری از رابطه ی بالا بستگی زمانی زیر را به دست می‌دهد.

$$y(t) = h - \frac{m}{c_2}\ln\left[\cosh\left(t\sqrt{\frac{c_2\,g}{m}}\right)\right]. \tag{22}$$

با صفر گذاشتن $y(t)$ زمان رسیدن به زمین به دست می‌آید.

$$t = \sqrt{\frac{m}{c_2\,g}}\,\cosh^{-1}\frac{h\,c_2}{m}. \tag{23}$$

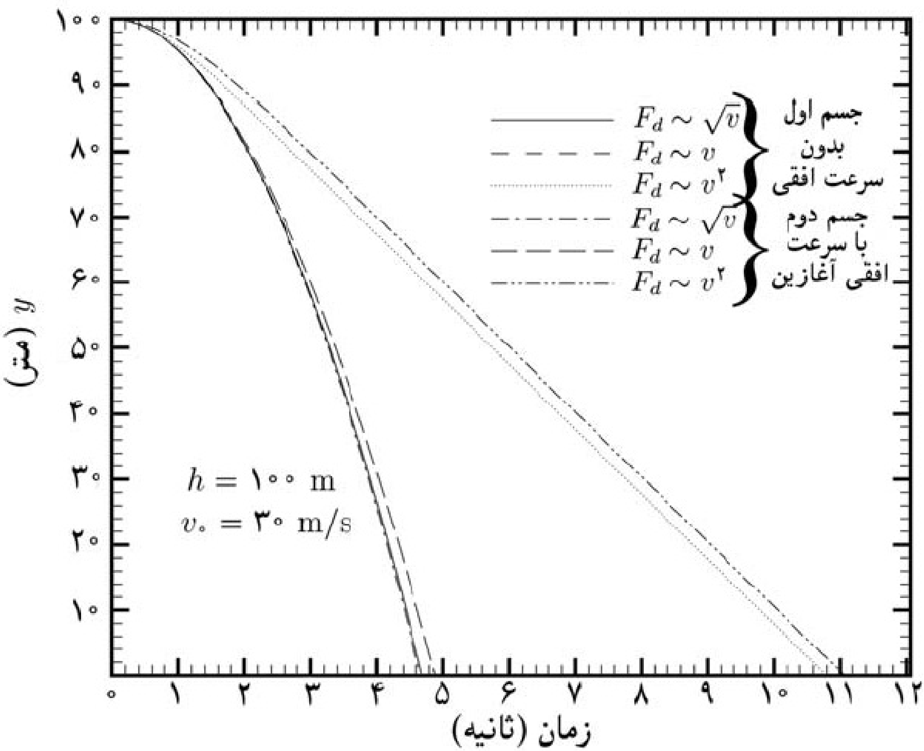
با شرط آغازین

$$h = 10\,\mathrm{m} \qquad \frac{c_2}{m} = 0.1 \qquad g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \tag{24}$$

زمان $t = 1.675\,\mathrm{s}$ و با شبیه‌سازی مقدار $t = 1.68\,\mathrm{s}$ به دست می‌آید.

اگر جسم در شروع حرکت سرعت آغازینی در راستای x داشته باشد، معادله‌های حرکت در راستاهای x و y ناخطی و جفت‌شده اند.

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{c_2}{m}\,v\,v_x, \qquad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{c_2}{m}v\,v_y - g, \tag{25}$$



شکل ۱: نمودار بلندی بر حسب زمان برای هر دو جسم افتان، یکی بدون سرعت آغازین و دیگری با سرعت آغازین افقی، برای نیروهای مقاومت گوناگون.

که در این جا

$$v := \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{26}$$

اندازه ی سرعت است، و معادله‌های حرکت در راستاهای x و y به هم وابسته اند. تا جایی که نویسنده‌ها می‌دانند، حل تحلیلی این معادلات ممکن نیست، و باید حل عددی به کار برده شود.

در نموار شکل ۱ خم بلندی جسم بر حسب زمان را، برای حالت‌های $\alpha = 2$، $\alpha = 1$، و $\alpha = 1/2$ کشیده ایم. برای حل عددی، شرایط آغازین به شکل

$$h = 10\,\mathrm{m} \qquad v_0 = 30\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \tag{27}$$

و پارامترهای

$$\frac{K}{m} = 0.1 \qquad g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \tag{28}$$

گرفته شده اند. حل عددی با الگوریتم اویلر ریچاردسون [۴] با گام زمانی $\Delta t = 0.01$ به دست آمده است.

مراجع

[1] A. P. Arya, *Introduction to Classical Mechanics*, Allyn Bycon Publishing, 1990, pp. 35-44.

[2] G. R. Folws, *Analytical Mechanics*, Saunders College, 1985, pp. 72-73.

[3] J. B. Marion and S. T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Harcourt Brace Jovanovich, 1998, p. 91.

[4] H. Gould, J. Tobochnik, and G. Christian, *An Introduction to Computer Simulation Methods*, Addison-Wesley, 2005, p.48.