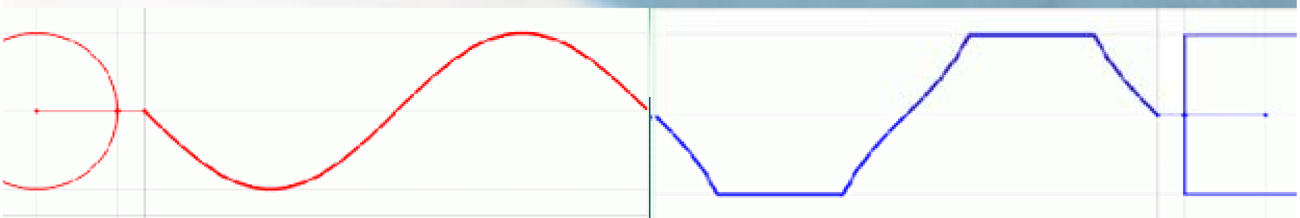


جزوه ریاضیات عمومی ۱ و ۲

مدرس عزت الله فریدنیا

مقطع کاردانی و کارشناسی

[Course title]

ابتدا مباحثی در خصوص چندجمله‌ای:

چندجمله‌ای به عبارت متغیری اطلاق می‌شود که از ترکیب خطی تک‌جمله‌ای‌ها تشکیل می‌شود.

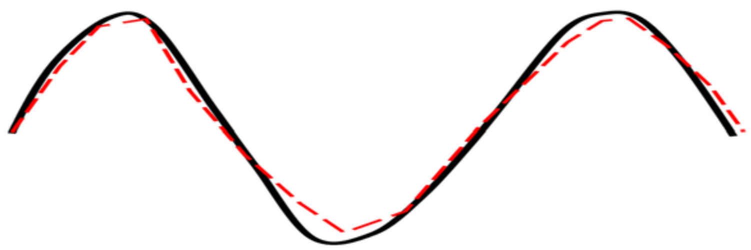
$x^{۵} - ۴x + ۱$

$x^{\frac{۳}{۲}} - x^{-۳} + ۷$

شکل خطی چندجمله‌ای‌ها از قرن ۱۵ میلادی به وجود امده است. چندجمله‌ای‌ها در تمام مباحث ریاضیات نقش مهمی دارند. برای تقریب توابع در آنالیز عددی و حسابی و همچنین معادلات اساسی اقتصاد و علم فیزیک با چندجمله‌ای بیان می‌شوند.

- از چندجمله‌ای برای تقریب سایر تابع‌ها مانند sin و cos و تابع نمایی استفاده می‌شود.

کاربرد در دوربین‌های نقشه‌برداری



معادله چیست؟

در لغت به معنای هم قیدی است، یعنی به معنای تساوی برابری و معادل می‌باشد.

معادلات همراه با عدد از اولین دستاوردهای ریاضی بشرند. در قدیمی‌ترین اسناد ریاضی مکتوب مانند متون میخی بابلیهای باستان که به هزاره قبل میلاد برمی‌گردد.

علامت = (تساوی) که امروزه متداول است روبرت رکورد پزشک دربار سلطنتی مطرح شد و سالیان زیادی طول کشید تا مورد قبول همه قرار بگیرد. تساویهای که برحسب مقدار نامعلومی بدست می‌آیند را معادله می‌نامیم و مقدار نامعلوم را مجهول می‌نامیم.

اصطلاح معادله در فرهنگ لغت دهخدا: تساوی بین مقادیر معلوم و مجهول، به شرطی که تنها به ازای مقادیری خاصی از مجهول، برقرار باشد. این مقادیر خاص که در معادله صدق می‌کند را ریشه‌های معادله گویند. $۳x = ۱۵ \leftarrow$ که تنها به ازای $x = ۵$ صحیح است. این مقادیر خاص همان تفاوت معادله با اتحاد است.

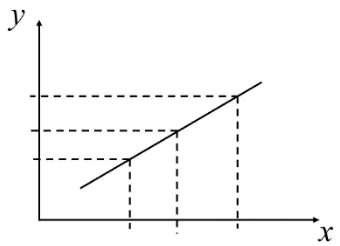
- ارتباط معادله و اتحاد وتوابع:

✓ معادله با اتحاد فرق می‌کند. در اتحاد x هر چه باشد عبارت درست است $(x+y)^۲ = x^۲ + y^۲ + ۲xy$، ولی معادله اتحاد نیست چون فقط به ازای مقادیر خاصی تساوی و برابری برقرار است.

✓ ارتباط توابع و معادله بعداً بحث خواهد شد، کلیه توابع معادله هستند ولی هر معادله‌ای تابع نیست.

- اگر مقدارهای دو متغییر با هم رابطه‌ی خطی داشته باشند و آن‌ها را با x و y نشان دهیم، نمودار این معادله را نمودار خطی می‌نامیم.

$y = ax + b$ a و b اعداد ثابتی‌اند



مانند سن افراد با افزایش قد

y x

معادله درجه اول $ax + b = ۰$

تابع درجه اول $f(x) = ax + b$

معادلات یک مجهولی درجه اول:

$Ax + B = ۰ \qquad x = \frac{-B}{A}$

خواص ۱) $if \quad A \neq ۰ \quad \rightarrow \quad x = \frac{-B}{A}$

۲) $if \quad A = ۰ \quad \& \quad B \neq ۰ \rightarrow$ غیر ممکن $A \neq ۰$

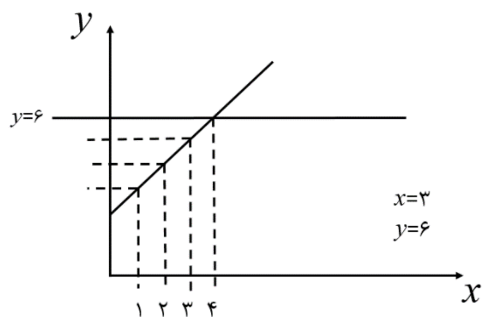
۳) $if \quad A = ۰ \quad \& \quad B = ۰ \rightarrow$ مبهم

مثال برای معادلات خطی: (مفهوم بدست آوردن مجهول روی شکل)

x	y

۰	۳
۱	۴
۲	۵
۳	۶
۴	۷

$$\frac{x+۳}{y}=\frac{۶}{y} \qquad\qquad \begin{aligned} x+۳&=y\\ ۶&=y \end{aligned}$$



در معادله $x+۳=۶ \quad\rightarrow\quad x=۶-۳=۳$

معادله شکل $x+۳-۶=۰$

$۳x-۶=۱۲+x$

x یک طرف $\quad\rightarrow\quad ۳x-x=۱۲+۶$

$$۲x=۱۸, \qquad x=۹$$

منظور از حل معادله وقتی که $y=۰$ باشد $x=۹$ می‌باشد.

تاریخچهٔ «x»

خوارزمی از ریاضی‌دانان و منجم ایرانی در یکی از کتاب‌های خود (الجبر و المقابله) که تا قرن ۱۶ میلادی مبنای مطالعات علمی ریاضی‌دانان اروپایی بود. خوارزمی در این کتاب به جای مجهول درجه اول از کلمهٔ «شیء» به مفهوم «چیز نامعلوم» استفاده کرد. اروپاییان کتاب را که ترجمه می‌کردند برای کلمهٔ «شیء» "Xei" را انتخاب کردند و وقتی که نوشتن معادلات به صورت نمادگذاری معمول شد، اروپاییان "x" حرف اوّل واژه را به جای مجهول درجهٔ اوّل اختیار کردند.

دستگاه معادلات خطی ۲ مجهولی:

در بسیاری از مسائل بیش از یک مجهول وجود دارد، برای یافتن این مجهولات بیش از یک معادله مورد نیاز است که به این معادلات، دستگاه معادلات می‌گویند.

دستگاه ۲ معادله و ۲ مجهول درجه اول:

$$\begin{matrix}(۱)\\(۲)\end{matrix}\begin{cases}Ax+By=C\\A'x+B'y=C'\end{cases}$$

حل دستگاه :

روش اوّل (روش جایگذاری): از رابطهٔ (۱)، y را بدست می‌آوریم

$$y=\frac{C-Ax}{B}$$

y را در رابطهٔ (۲) قرار می‌دهیم

$$A'x+B'\frac{C-Ax}{B}=C'$$

$$x=\frac{B'C-BC'}{AB'-A'B} \qquad y=\frac{AC'-A'C}{AB'-A'B}$$

روش دوم (روش حذفی): در معادله (۱)، B' و در معادله (۲)، B - را ضرب می‌کنیم

$$\begin{cases}AB'x+\cancel{BB'y}=B'C\\A'Bx+\cancel{B'By}=-BC'\end{cases}$$

$$x(AB'-A'B)=B'C-BC'$$

$$x=\frac{B'C-BC'}{AB'-A'B} \qquad y=\frac{AC'-A'C}{AB'-A'B}$$

با جایگذاری مقادیر جواب بدست می‌آید.

$$\begin{cases}(۱)\,x-y=۳\\(۲)\,۴x+۲y=۶\end{cases}$$

۱- روش جایگذاری:

از (۱) $\rightarrow \quad x=y+۳$

در (۲) جایگذاری $\rightarrow \quad ۴(y+۳)+۲y=۶$

$$۴y+۱۲+۲y=۶ \rightarrow ۴y+۲y=-۶ \qquad ۶y=-۶ \rightarrow y=-۱$$

$$y=-۱ \xrightarrow{\text{در (۱)}} x+۱=۳ \rightarrow x=۲$$

۲- روش حذفی

$$\times ۲\begin{cases} x-y=۳ \\ ۴x+۲y=۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۲y=۶ \\ ۴x+۲y=۶ \end{cases}$$
$$۶x=۱۲$$

$x=۲ \rightarrow$ (۱) جایگذاری در $\rightarrow ۲-y=۳ \rightarrow y=-۱$

<u>روش سوم دستور کرامر: (دترمینان مرتبه دوم)</u>

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}=AB'-A'B$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} C & B \\ C' & B' \end{vmatrix}=B'C-BC'$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}=AC'-CA'$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta} \qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta}$$

حل مثال قبلی با روش کرامر:

$$\Delta=\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۴ & ۲ \end{vmatrix}=۲+۴=۶ \qquad \Delta x=\begin{vmatrix} ۳ & -۱ \\ ۶ & ۲ \end{vmatrix}=۶+۶=۱۲ \qquad x'=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{۱۲}{۶}=۲$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{vmatrix}=۶-۱۲=-۶ \qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-۶}{۶}=-۱$$

دستگاه سه معادله و سه مجهولی:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz=D & (1) \\ A'x+B'y+C'z=D' & (2) \\ A''x+B''y+C''z=D'' & (3) \end{cases}$$

روش اول: (روش حذفی)

در دو معادلهٔ (۱) و (۲)، x را حذف می‌کنیم، معادلهٔ (۴) را داریم.

و در دو معادلهٔ (۲) و (۳) نیز x را حذف می‌کنیم، معادلهٔ (۵) را داریم.

دو معادلهٔ (۴) و (۵) دارای دو مجهول است، y و z که با استفاده از روش‌های دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول آنها را حل می‌کنیم.

روش دوم: (جایگذاری)

از معادلهٔ (۱)، x را بدست می‌آوریم، معادلهٔ (۴) را داریم.

معادلهٔ (۴) را در معادلهٔ (۲) قرار داده، y را بدست می‌آوریم، معادلهٔ (۵) را داریم.

معادلهٔ (۵) را در معادلهٔ (۳) قرار می‌دهیم، z را بدست می‌آید.

(z) را در معادلهٔ (۵) قرار می‌دهیم، y را بدست می‌آید.

(y) را در معادلهٔ (۴) قرار می‌دهیم، x بدست می‌آید.

روش سوم: (کرامر) دترمینان مرتبه سوم

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}=A\begin{vmatrix} B' & C' \\ B'' & C'' \end{vmatrix}-B\begin{vmatrix} A' & C' \\ A'' & C'' \end{vmatrix}+C\begin{vmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{vmatrix}$$

$$A(B'C''-C'B'')-B(A'C''-C'A'')+C(A'B''-A''B')$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} D & B & C \\ D' & B' & C' \\ D'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \qquad \Delta y=\begin{vmatrix} A & D & C \\ A' & D' & C' \\ A'' & D'' & C'' \end{vmatrix} \qquad \Delta z=\begin{vmatrix} A & B & D \\ A' & B' & D' \\ A'' & B'' & D'' \end{vmatrix}$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta} \qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta} \qquad z=\frac{\Delta z}{\Delta}$$

مساله زیر را با روش کرامر بدست می آوریم :

$$\begin{cases} x-y+z=۳ \\ ۴x+۲y+z=۶ \\ ۳x+۵y-۲z=۴ \end{cases} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۴ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۵ & -۲ \end{vmatrix}=۱(-۴-۵)+۱(-۸-۳)+۱(۲۰-۶)=-۹-۱۱+۱۴=-۶$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۶ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۵ & -۲ \end{vmatrix}=۳(-۴-۵)+۱(-۱۲-۴)+۱(۳۰-۸)=-۲۷-۱۶+۲۲=-۲۱$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۱ \\ ۴ & ۶ & ۱ \\ ۳ & ۴ & -۲ \end{vmatrix}=۱(-۱۲-۴)-۳(-۸-۳)+۱(۱۶-۱۸)=-۱۶+۳۳-۲=۱۵$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۲ & ۶ \\ ۳ & ۵ & ۴ \end{vmatrix}=۱(۸-۳۰)+۱(۱۶-۱۸)+۳(۲۰-۶)=-۲۲-۲+۴۲=۱۸$$

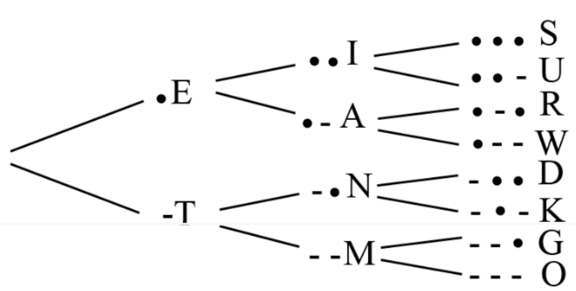
$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-۲۱}{-۶} \qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{۱۵}{-۶} \qquad z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{۱۸}{-۶}=-۳$$

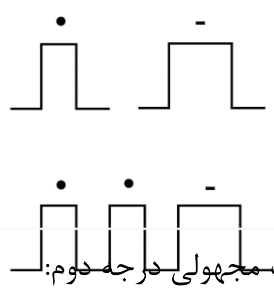
تمرین:

$$\begin{cases} ۵x-y+۲z=۲۱ \\ ۳x+۴y-z=۲۰ \\ x+y-۲z=-۳ \end{cases} \qquad \begin{cases} ۴x+۲y+z=۰ \\ ۴x+۱y\pm z=۰ \\ ۹x-۳y+z=۰ \end{cases}$$

<u>دانستنی‌های ریاضی:</u> کد مورس در سال ۱۸۳۸ میلادی توسط ساموئیل مورس برای استفاده در تلگراف اختراع شد، از نقطه و خط‌فاصله الگوبرداری شده است.

بخشی از کد به صورت درختی: (*Samuel Morse*)





معادلات یک مجهولی درجه دوم:

$Ax^{2}+Bx+c=0,\ A\neq 0$

$if\ B=0\quad \underrightarrow{Ax^{2}=-c}\quad x_{1}=+\sqrt{\frac{-c}{A}},\ x_{2}=-\sqrt{\frac{-c}{A}}$ A و c مختلف‌العلامت‌اند

$if\ c=0\ \Rightarrow Ax^{2}+Bx=0\ \rightarrow x(Ax+B)=0\ \rightarrow\ x_{1}=0$ یا $x_{1}=\frac{-B}{A}$

$if\ B=0\ \&\ c=0\ \Rightarrow Ax^{2}=0\ \rightarrow x=0$

$\Delta = B^{2}-4AC$

$x_{1,2}=\frac{-B\pm\sqrt{\Delta}}{2A},\ x_{1}=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}\ ,\ x_{2}=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$

$if\ \Delta>0\ \rightarrow$ دارد $x_{1}\neq x_{2}$ معادله ۲ ریشه حقیقی

$if\ \Delta=0\ \rightarrow\ x_{1}=x_{2}=\frac{-B}{2A}$ ریشه مضاعف دارد

$if\ \Delta<0\ \rightarrow$ معادله ریشه حقیقی ندارد

(محاسبه ریشه که جمع مقادیر منفی باشد یعنی (۱) $a<0$، (۲) $\Delta<0$)

مسئله را در منزل حل کنید:

۱) $4x^{3}+3=0$

۲) $5x^{2}+3x=0$

۳) $10x^{2}=0$

۴) $9x^{2}=3$

۵) $3x^{2}+5x+6=0$

۶) $x^{2}-7x+10=0$

حل معادله با روش تجزیه

$$x^2 + \underset{\downarrow}{S}x + \underset{\downarrow}{P} = 0$$

ضرب ریشه-

جمع ریشه-   ها

ها

$$S = x_1 + x_2 \quad , \quad P = x_1 x_2$$

اتحاد مزدوج: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(\underset{\downarrow}{\underline{x+3}})(\underset{\downarrow}{\underline{x+2}})$$

$$x = -3 \, , \; x = -2$$

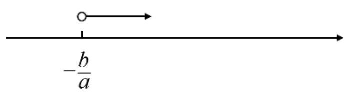
$$2x^2 - 5x + 6 = 0$$

نامعادلات

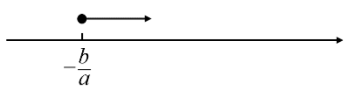
<u>نامعادله یک مجهولی درجه اول:</u>

اگر در یک نامساوی یک مجهول وجود داشته باشد و آن نامساوی به ازای بعضی از مقادیر عددی وابسته به مجهول درست باشد و به ازای بعضی مقادیر دیگر درست نباشد، آن نامساوی را نامساوی شرطی یک مجهولی یا نامعادله یک مجهولی می‌نامند.

الف. $ax+b>0 \;\rightarrow\; ax>-b \;\rightarrow\; x>\frac{-b}{a} \quad , \quad x\in(\frac{-b}{a},+\infty)$



ب. $ax+b\geq 0 \;\rightarrow\; ax\geq -b \;\rightarrow\; x\geq \frac{-b}{a} \quad , \quad x\in[\frac{-b}{a},+\infty)$



ج. $ax+b<0 \;\rightarrow\; ax<-b \;\rightarrow\; x<\frac{-b}{a} \quad , \quad x\in(-\infty,\frac{-b}{a})$

د. $ax+b\leq 0 \;\rightarrow\; ax\leq -b \;\rightarrow\; x\leq \frac{-b}{a} \quad , \quad x\in(-\infty,\frac{-b}{a}]$

$$۵x-۲\leq ۰\rightarrow ۵x=۲\ ,\ x=\frac{۲}{۵}$$

	$x<\frac{۲}{۵}$	$x=\frac{۲}{۵}$	$x>\frac{۲}{۵}$
$۵x-۲$	-		+

$$۳x+۲\leq ۰\rightarrow ۳x=-۲\ ,\ x=\frac{-۲}{۳}$$

	$x<\frac{-۳}{۲}$	$x=\frac{-۳}{۲}$	$x>\frac{-۳}{۲}$
$۳x+۲$	-		+

نامعادله یک مجهولی درجه دوم:

$$ax^{۲}+bx+c<۰ \quad \text{یا} \quad ax^{۲}+bx+c>۰$$

برای حل آن ابتدا $ax^{۲}+bx+c=۰$ مساوی صفر قرار می‌دهیم و Δ را محاسبه می‌کنیم و جواب بدین صورت خواهد بود

جواب نامعادله	جواب نامعادله	جواب معادله	
$ax^{۲}+bx+c<۰$	$ax^{۲}+bx+c>۰$	$ax^{۲}+bx+c=۰$	$\Delta=b^{۲}-۴ac$
$x_۱<x<x_۲$	$x<x_۱,x>x_۲$	$x_۱,x_۲$	$\Delta>۰$
جواب ندارد	$x\neq\frac{-b}{a}$	$x_۱=x_۲=\frac{-b}{a}$	$\Delta=۰$
جواب ندارد	اعداد حقیقی $\mathbf{R}$	جواب حقیقی ندارد	$\Delta<۰$

تمارین:

$x^{۲}-۷x+۱۰\geq ۰$ را با روش تجزیه حل کنید. $(x-۲)(x-۷)\geq ۰$

	$-\infty$	۲	۵	$+\infty$
$x-۲$	-	+	+	
$x-۵$	-	-	+	
$(x-۲)(x-۵)$	+	-	+	
	ج		ج	

a را چنان تعیین کنید که معادله $ax^{۲}+۳x+۲=۰$

۱) ۲ ریشه حقیقی متمایز داشته باشد $\Delta>۰\rightarrow ۹-۸a>۰\Rightarrow a>\frac{۹}{۸}$

۲) دارای ریشه مضاعف باشد $\Delta=۰\rightarrow ۹-۸a=۰\Rightarrow a=\frac{۹}{۸}$

۳) ریشه حقیقی نداشته باشد $\Delta<۰\rightarrow ۹-۸a<۰\Rightarrow a<\frac{۹}{۸}$

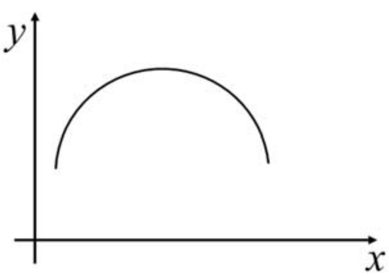
حل نامعادله، $x^{۲}\geq x \;\rightarrow\; x^{۲}-x\geq ۰ \;\rightarrow\; x(x-۱)\geq ۰$

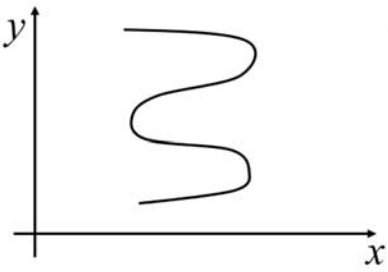
	$-\infty$	۰	۱ $+\infty$
x	-	+	+
$x-۱$	-	-	+
$x(x-۱)$	+	-	+
	ج		ج

$x^{۲}\geq x \;\rightarrow\; x^{۲}-x\geq ۰ \;\rightarrow\; (-\infty,۰)\cup(۱,+\infty)$

رابطه و تابع

برای نخستین بار مفهوم تابع به عنوان مقدار متغییر در قرن ۱۷ میلادی توسط دکارت پدید آمد (اهل فرانسه). در سال ۱۷۴۸ او نماد *F* را برای تابع در نظر گرفت، بالاخره پس از ۲ قرن دیریکله (۱۵۸۹-۱۸۰۵) ریاضی‌دان آلمانی





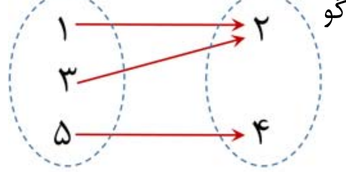
تابع در فرهنگ لغت معین دهخدا: به معنای دنبال کننده و مطیع می‌باشد هرگاه میان دو متغیر پذیر چنان بستگی وجود داشته باشد که تغییر یکی در دیگری تغییر بوجود آورد. نخستین را «متغییر اصلی» و دومی را تابع می‌گویند.

زوج مرتب: هر ۲ تایی (x,y) که ترتیب قرار گرفتن مؤلفه‌ها مهم باشد را زوج مرتب می‌گوییم.

نمایانگر محور yها که غیر وابسته است   نمایانگر محور xها که غیر مستقل است

نکته: ۲ زوج مرتب وقتی با هم مساوی‌اند که مؤلفه‌های اول آن‌ها با هم و مؤلفه‌های دوم آن‌ها با هم برابر باشد.

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \,\&\, y_1 = y_2$$
$$(2,7) \neq (7,2)$$



تابع: هر دو زوج مرتبی را که مولفه‌های اول مساوی نداشته باشند، تابع گو

یعنی در این صورت دنبال‌کننده و مطیع است.

در تابع هدف ها یکسان است. (هدف ۳و۱، ۲ عدد)

$$\forall x \in A, \quad \exists\ y \in B \Rightarrow (x,y) \in f$$

F باید هریک از عناصر A را به عنصری از B نسبت دهد. $F_i \quad A \to B$

$F: A \to B$ یا $A \xrightarrow{F} B$ یا $(x, y) \in F$

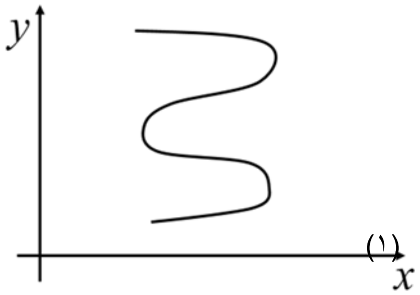
$F(x)$

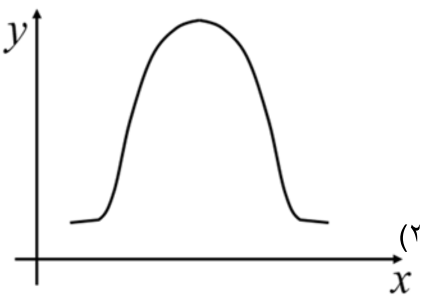
Function متغییر مستقل

وابسته $\leftarrow y = F(x)$

غیر مستقل

تابع در نمودار:





اگر هر خط موازی محور yها نمودار را در یک نقطه قطع کند، تابع است.

دامنه و برد تابع: قلمرو-دامنه *Domain* D_F

برد *Range* $\Re$

دامنه یک تابع مجموع مقدارهایی که یک متغییر مستقل می‌تواند داشته باشد. مؤلفه اول یک زوج مرتب را دامنه گویند.

$$F = \{(x, y) | x \in D_F\}$$

برد یک تابع مجموعه مقداری که یک متغییر وابسته می‌تواند داشته باشد. مؤلفه دوم یک یک زوج مرتب را برد گویند.

$$F = \{(x, y) | y \in \Re_F\}$$

مشخص کردن یک تابع:

آیا هر معاله یک تابع است؟

$F(x) = ۲x + ۳$ ضابطه تابع

متغییر مستقل

شکل (۲) تابع نیست ولی معادله دارد. شکل (۱) هم معادله دارد و هم تابع است.

✓ توابع با توجه به نوع آن‌ها کاربردهای متفاوتی دارند. مثلاً تابع نمایی در اقتصاد و زیست‌شناسی

✓ در رایانه برای مدل‌سازی ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها و در فیزیک نیز کاربرد دارند.

✓ به عبارت ساده‌تر هر معادله‌ای که متغییر مستقل (x) به y وابسته باشد نقش تابع را دارد و می‌تواند پیرو مطیع و فرمانبر باشد.

$\{(x,y)|۲x+۳ \quad x\in\mathbb{R}\}$ $\qquad$ $F(x)=۲x+۳ \to y=۲x+۳$

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

این معادله تابع است، به ازای هر x یک y وجود دارد.

x	y
۰	۳
۱	۵

اعداد طبیعی $\mathbb{N}=\{۱,۲,...\}$

اعداد صحیح $\mathbb{Z}=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$

اعداد گویا $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}|m,n\in Z, n\neq ۰\}$

اعداد گنگ $\mathbb{Q}'=R-Q$

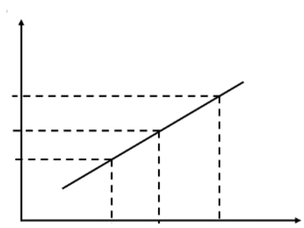
اعداد حقیقی $\mathbb{R}=Q'\cup Q$

اعداد مختلط $\mathbb{C}=\{a+ib|a,b\in\mathbb{R}, i=\sqrt{-۱}\}$

بررسی کنید آیا تابع است؟

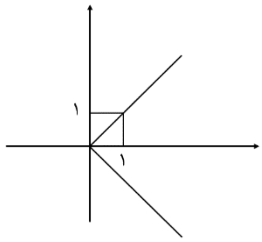
$$F=\{(x,y)|y=x^{۲}, x\leq ۱۰, x\in N\}$$
$$x\in[۱,۲,...,۱۰]$$

x	y
۱	۱
۲	۴
۳	۹



$F = \{(x, y) \| y| = x\}$ $\qquad$ $F: \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$

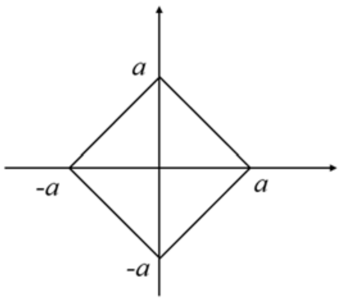
x	y
۰	۰
۱	۱ ±
۲	۲ ±
۳	۳ ±



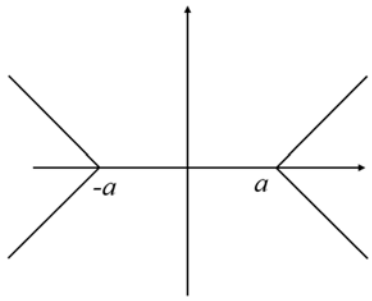
تابع نیست، خط موازی y دو نقطه قطع می‌کند

نمونه سوال $\quad F(x) = \dfrac{۵}{x-۲} \qquad F: \mathbb{R} - \{۲\} \to \mathbb{R}$

نمونه سوال $\quad |x| + |y| = ۳ \qquad$ ج $\to x = ۰ \to |y| = ۳ \to y = \pm ۳$



$|x| + |y| = a$



$|x| - |y| = a$

۲ ضابطه (قانون)

$$F(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

$F: R \to R$

$F = \{(x, y) | y = x,\ x \geq ۰\} \cup \{(x, y) | y = -x,\ x < ۰\}$

برای هر $x < ۰$، yای است، تابع است $\qquad$ برای هر $x \geq ۰$، yای است، تابع است

بررسی مشخص کردن تابع چندضابطه‌ای (قانون):

۱- هر ضابطه‌ای (قانون) معرف تابع باشد.

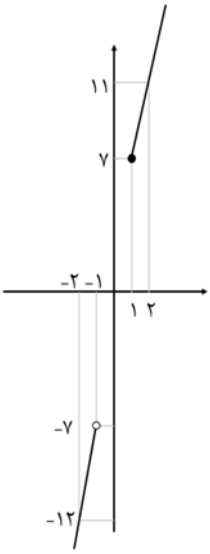
۲- اشتراک دامنه‌ها تهی باشد.

۳- اگر دامنه‌ها اشتراک داشته باشند، به ازای عضو مشترک دامنه، مقادیر y باهم برابر باشند.

تذکر: جاهایی نیاز داریم که روابط و معادلات تابع باشند، بدین خاطر از توابع چندضابطه‌ای استفاده می‌کنیم.

x	y
۱	۷
۲	۱۱
۳	۱۵

$$f(x)=\begin{cases}4x+3 & x\geq 1\\ 5x-2 & x<1\end{cases}$$



x	y
۰	-۲
-۱	-۷
-۲	-۱۲

$y=3$ است و مشترک است تابع است، در دامنه‌ها در $x=0$ اشتراک می‌باشد که

$$\mathrm{F}(x)=\begin{cases}x^3+3 & x\leq 0\\ 2x+3 & x\geq 0\end{cases}$$

دامنه و برد تابع: (کاربرد دامنه و برد)

۱- توابع چندجمله‌ای $\qquad \mathrm{F}(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \qquad D_{\mathrm{F}}=□$

x^2

$2x+5$

x^3+4x^2+3

۲- اگر f تابع چندجمله‌ای و بزرگ‌ترین توان آن فرد باشد، آنگاه برد F مجموعه اعداد حقیقی است.

$y=5x^3+4x^2+1 \qquad \Re_y=□$

۳- برای محاسبه‌ی برد در تابع ۲ جمله مانند $y=ax^{۲}+bx+c$ ۲ راه داریم:

الف: تابع را به صورت مربع کامل درآورده و سپس برد را محاسبه می‌کنیم

$$y=x-۲\sqrt{x}+۳\rightarrow(\sqrt{x}-۱)^{۲}-۱+۳\Rightarrow(\sqrt{x}-۱)^{۲}+۲$$

$$۰\leq(\sqrt{x}-۱)^{۲}<\infty\rightarrow ۲\leq(\sqrt{x}-۱)^{۲}+۲<\infty \qquad \Re_{f}=[۲,\infty)$$

ب: $y=ax^{۲}+bx+c$ را نسبت به x مرتب نموده، سپس شرط جواب در معادلهٔ درجه دوم، $\Delta\geq۰$ یا $\Delta'\geq۰$، را نوشته و حدود y همان برد تابع است.

$$y=x^{۲}-۴x+۵\rightarrow x^{۲}-۴x+۵-y=۰ \qquad \begin{matrix}\Delta\geq۰ & b^{۲}-۴ac\geq۰\\ \Delta'\geq۰ & b'^{۲}-ac\geq۰\end{matrix}$$

$$(-۴)^{۲}-۴(۵-y)\geq۰\rightarrow۱۶-۲۰+۴y\geq۰\rightarrow-۴+۴y\geq۰$$

$$۴y\geq۴\rightarrow y\geq۱\Rightarrow D_{F}=\mathbb{R}\ ,\ \Re_{F}=[۱,\infty)$$

۴- دامنه توابع کسری $F(x)=\dfrac{a_{۰}x^{n}+a_{۱}x^{n-۱}+\dots+a_{n}}{b_{۰}x^{n}+b_{۱}x^{n-۱}+\dots+b_{n}}$ $\qquad D_{F}=\mathrm{R}-\{$ریشه‌های مخرج$\}$

$$y=\frac{۲x+۱۵}{x^{۲}-۴} \qquad x^{۲}-۴=۰\rightarrow x^{۲}=۴\rightarrow x=\pm۴\Rightarrow D_{F}=\mathbb{R}-\{\pm۲\}$$

$$y=\frac{۱}{x}+\frac{۲x}{۳x+۵} \qquad x=۰,۳x+۵\rightarrow۳x=-۵\rightarrow x=-\frac{۵}{۳}\Rightarrow D_{F}=\mathbb{R}-\{۰,-\frac{۵}{۳}\}$$

۵- برد توابع هموگرافیک

$$\mathrm{F}(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad \Re_{F}=\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$$

شرط تابع: باید $c\neq۰$ باشد. چون در غیر این صورت خط راست می‌باشد.

$ad-bc\neq۰$، در غیر این صورت برابر با تابع ثابت است.

۶- $\mathrm{F}(x)=\dfrac{ax^{۲}+bx+c}{a'x^{۲}+b'x+c'} \qquad \dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

ضابطه را طرفین وسطین کرده، عبارت را نسبت به x مرتب نموده و شرط وجود جواب $\Delta \geq ۰$ یا $\Delta' \geq ۰$ می‌باشد که بُرد تابع است. اگر در ابتدا و انتهای بازه‌ی بدست آمده عدد $\frac{a}{a'}$ موجود باشد آن عدد را حذف و برد بدست می‌آید.

برد را محاسبه کنید. $y = \frac{x}{x^۲ + ۱}$

اول طرفین وسطین $\rightarrow yx^۲ + y = x \rightarrow yx^۲ + y - x = ۰ \rightarrow yx^۲ - x + y = ۰$

$ax^۲ + bx + c = ۰$

$$\Delta \geq ۰ \rightarrow (-۱)^۲ - ۴y^۲ \geq ۰ \rightarrow ۱ - ۴y^۲ \geq ۰ \rightarrow ۱ \geq ۴y^۲$$

$$y^۲ \leq \frac{۱}{۴} \rightarrow -\frac{۱}{۲} \leq y \leq \frac{۱}{۲} \Rightarrow \Re_F = [-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}] - \{\frac{۰}{a} = ۰\} = [-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}] - \{۰\}$$

$$\Re_F = [-\frac{۱}{۲}, ۰) \cup (۰, \frac{۱}{۲}]$$

برد و دامنه سوال زیر را محاسبه کنید؟

$$y = \frac{۴ - x^۲}{۴ + x^۲} \qquad ۴y + x^۲y = ۴ - x^۲ \rightarrow x^۲y + x^۲ + ۴y - ۴ = ۰ \rightarrow x^۲(y+۱) + ۴(y-۱) = ۰$$

۷- نکته کنکوری $\mathrm{F}(x) = q(x) + \frac{۱}{q(x)}$

$$\begin{cases} \forall x;\ \ g(x) > ۰ \rightarrow \mathrm{R}_F = [۲, +\infty) \\ \forall x;\ \ g(x) < ۰ \rightarrow \mathrm{R}_F = (-\infty, -۲] \end{cases}$$

سوال نمی‌آید

۸- دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد: برابر با دامنه توابع زیر رادیکال

$$\mathrm{F}(x) = \sqrt[۲n+۱]{\mathrm{g}(x)} \qquad \mathrm{D_F} = \mathrm{D_g}$$

۹- دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج برابر است با $\mathrm{F}(x) = \sqrt[۲n]{\mathrm{g}(x)} \qquad \mathrm{D_F} = \{x | \mathrm{g}(x) \geq ۰\}$

محاسبه دامنه:

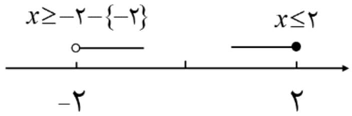
$$\mathrm{F}(x) = \sqrt{۴ - x^۲} \qquad ۴ - x^۲ \geq ۰ \rightarrow ۴ \geq x^۲ \rightarrow -۲ \leq x \leq ۲ \Rightarrow \mathrm{D_F} \in [-۲, ۲]$$

$$F(x)=\sqrt[۳]{\frac{۲-x}{۲+x}} \qquad \frac{۲-x}{۲+x}=۰,\ ۲+x=۰\rightarrow x=-۲\Rightarrow D_F=\mathbb{R}-\{-۲\}$$

$$F(x)=\sqrt{\frac{۲-x}{۲+x}} \qquad \frac{۲-x}{۲+x}\geq ۰,\ ۲+x\neq ۰ \begin{cases} ۲-x\geq ۰\Rightarrow ۲\geq x \\ ۲+x\geq ۰\Rightarrow x\geq -۲ \end{cases}$$

{ریشه‌های مخرج} $۲+x=۰\rightarrow x=-۲$

$D=\mathbb{R}-$



$D=(-۲,۲]$

۱۰- نکته کنکوری: دامنه توابع لگاریتمی: باید لگاریتم مثبت باشد و مبنای لگاریتم مثبت و مخالف یک باشد.

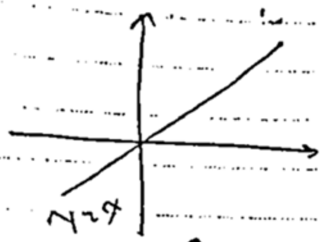
$$F(x)=\ln_{h(x)}^{g(x)}\Rightarrow D_F=D_g\cap D_h=\{x\,|\,g(x)>۰,h(x),h(x)\neq ۰\}$$

مثال زیر را با توجه به نکته فوق حل کنید؟

$$F(x)=\ln_{۱-x^۲}^{x-۴}$$

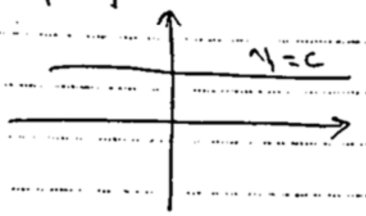
انواع تابع :

۱- تابع همانی $I = \{(x,x) \mid x \in R\}$



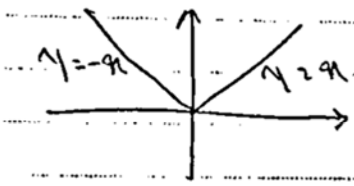
نمودار تابع $y = x$

۲- تابع ثابت $C = \{(x,c) \mid x \in R\}$



نمودار تابع $y = c$

۳- تابع قدر مطلق $y = |x| \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$



خواص تابع قدر مطلق :

1) $-|x| < x < |x|$

2) $|-x| = |x|$

3) $|x| < a \iff -a \leq x \leq a$ (شرط $a>0$)

4) $|x| \geq a \begin{cases} x \geq a \\ x \geq -a \end{cases}$ (شرط $a>0$) اثبات: $|x| \geq a \Rightarrow x^2 \geq a^2$ ، $x \geq \sqrt{a^2} \to x \geq |a|$

5) $|x| = a \longrightarrow x = \pm a$ ۲ حالت $x \geq +a$ ، $x \geq -a$

6) $|x| = |y| \longrightarrow x = \pm y$

7) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$

8) $|xy| = |x|\,|y|$

9) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (نامساوی مثلث)

10) $|x-y| \geq |x| - |y|$

11) $|x| + |y| = |x+y| \iff xy \geq 0$

حل معادله $|x+3| + |x-4| = |2x-1|$ با توجه به خاصیت (11)

$(x+3)(x-4) \geq 0$

$x+3 \geq 0 \to x \geq -3$ و $x-4 \geq 0$ ، $x \geq 4$

Subject
Date

۴. تابع جزء صحیح (براکت)

$y = [x]$

تابعی است که از اعداد حقیقی به اعداد صحیح، طوری که به هر عدد حقیقی، بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی آن را نسبت می‌دهد:

$f: R \longrightarrow Z$

$x \xrightarrow{f} [x] = n \qquad n \le x < n+1 \qquad n \in Z$

خواص تابع جزء صحیح:

1) $[x+n] = [x] + n, \quad n \in Z$

2) $0 \le x - [x] < 1, \quad 0 < mx - [mx] < 1$

مهم: $f(x) = mx - [mx] \quad D_f = (-\infty, +\infty), \quad R_f = [0,1)$

3) $[x] \le x < [x]+1$ یا $0 \le x - [x] < 1$

4) if $x \in Z$; $[-x] = -[x]$

if $x \notin Z$; $[-x] = -[x] - 1$

5) $[-x] + [x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \in R - Z \\ & x \notin Z \end{cases}$

6) $[x + [x + [x + \cdots + [x]]]] = n[x]$

7) $\forall n \in N: \quad [nx] = [x] + [x + \frac{1}{n}] + \cdots + [x + \frac{n-1}{n}]$

مثال (m) معادله $[x] + [-x+2] + [x+1] = 9$ را حل کنید؟

$[x] + [-x] + 2 + [x] + 1 = 9 \Rightarrow [x] + [-x] + [x] = 6$

if $x \in Z$: $0 + x = 6$

if $x \notin Z$: $\cancel{[x]} - \cancel{[x]} - 1 + [x] = 6 \Rightarrow [x] = 7$

Subject
Date

تابع یک به یک: تابع $F: A \longrightarrow B$ را یک به یک گوییم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in A$ داشته باشیم:

$$F(x_1) = F(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

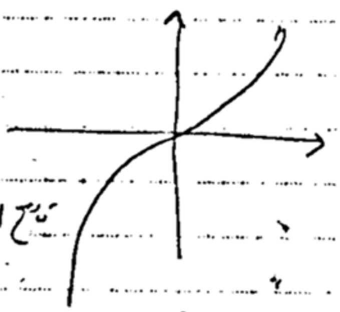
یا

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$$

مثال $F(x) = x^3 \quad R \longrightarrow R$

$$(x_1)^3 = (x_2)^3 \longrightarrow x_1 = x_2$$

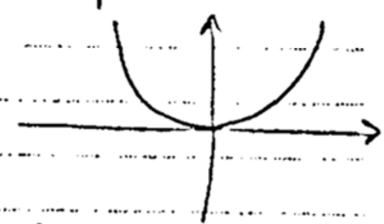
$$x_1 \neq x_2 \longrightarrow (x_1)^3 \neq (x_2)^3$$



تابع است

مثال $F(x) = x^2 \quad R \longrightarrow R$

$$(x_1)^2 = (x_2)^2 \longrightarrow x_1 \neq x_2$$



$$F(1) = 1 \qquad F(-1) = 1$$

$$1 \neq -1$$

تابع نیست

مثال $F(x) = |x| + 3 \quad R \longrightarrow R$

$$(|x_1| + 3) = (|x_2| + 3) \longrightarrow x_1 \neq x_2$$

$$F(2) = |2| + 3 = 5$$

$$F(-2) = |-2| + 3 = 5$$

$$F(2) = F(-2) \longrightarrow +2 \neq -2$$

تابع نیست

Subject
Date

③ $F(x) = \dfrac{5}{x-2}$ $\quad F: R - \{2\} \longrightarrow R$

یک به یک است .

$\dfrac{5}{x_1-2} = \dfrac{5}{x_2-2} \longrightarrow x_1 = x_2$

تابع یک به یک در نمودار : هر خط موازی محور x ها ($y = a$) نمودار را اگر در یک نقطه قطع کند یک به یک می باشد در غیر این صورت یک به یک نیست

تابع پوشا : (پوششی) تابع $F: A \longrightarrow B$ را پوشا گوئیم هرگاه برد تابع با مجموعه B برابر باشد ($R_F = B$) یا به عبارت دیگر

$\forall y \in B, \exists x \in A \mid F(x) = y$

آیا پوشاست ؟

$F(x) = x^3 + 1 \quad R \to R$

برای هر عضو دلخواه از برد F مثلا R

$y = x^3 + 1 \longrightarrow \sqrt[3]{y-1} = x$

$F(x) = F(\sqrt[3]{y-1}) = (\sqrt[3]{y-1})^3 + 1 = y - 1 + 1 = y$

برای هر عضو از برد F یک عضو از قلمرو (دامنه) F پیدا کرد، پس F پوشاست .

(تمرین) $F(x) = x^2 - 3 \quad R \to R$ (در منزل انجام دهید)

پوشا نیست

$y = x^2 - 3 \longrightarrow x = \pm\sqrt{y+3}$

چرا برای $y = -4$ جوابی بدست نمی آید پس F پوشا نیست

$F(x) = x^3 \qquad R \to R$

$y = x^3 \to x = \sqrt[3]{y}$

$F(x) = F(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$ $\quad$ پس پوشا می باشد.

Papco

وارون تابع:

برای تابع یک به یک و پوشای $F: A \to B$ تابع $g: B \to A$ را وارون F می‌گوییم و آن را با F^{-1} نشان می‌دهیم پس

$$F^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in F\}$$

$$D_{F^{-1}} = R_F \qquad R_{F^{-1}} = D_F$$

$F: A \to B$ تابعی که یک به یک و پوشا باشد:

الف) اگر F^{-1} وارون F باشد F هم وارون F^{-1} است.

ب) وارون تابع یک به یک و پوشا باشد تعریف شده است

پ) ترکیب دو تابع F و F^{-1} یک تابع همانی است یعنی

$$(F^{-1} \circ F)(x) = (F \circ F^{-1})(x) = x$$

برای محاسبه‌ی $F^{-1}(x)$ از معادله $y=F(x)$ مقدار x را برحسب y تعیین می‌کنیم تا $x = F^{-1}(y)$ معلوم شود که در این تابع جای x و y را عوض می‌کنیم تا $y = F^{-1}(x)$ به دست آید

وارون تابع را حساب کنید. $F: R \to R$ $\quad F(x) = 2x-4$

$$y = 2x-4 \to y-2x+4=0$$

$$-2x = -4-y \to x = \tfrac{1}{2}(y+4)$$

$$y = F(x) = F\left[\tfrac{1}{2}(y+4)\right] = 2\left[\tfrac{1}{2}(y+4)\right] - 4 = y + \cancel{4} - 4 = y$$

F پوشا است

تابع y صعودی است (نکته) هر تابع صعودی یا نزولی یک به یک است پس یک به یک است.

Subject
Date

حال برای محاسبه‌ی وارون ابتدا y را برحسب x حل می‌کنیم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$x = \tfrac{1}{2}(y+4)$$
$$y = \tfrac{1}{2}(x+4)$$
وارون تابع ما برابر است با $f^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}(x+4)$

$$f \circ f^{-1}(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = f\left[\tfrac{1}{2}(x+4)\right] = 2\left(\tfrac{1}{2}(x+4)\right) - 4 = x$$
$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(2x-4) = \tfrac{1}{2}(2x-4+4) = x$$
$$f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x)$$

وارونش را بررسی کنید. حل توسط تمرین $f(x) = x^3+1$ (تمرین)

حد و پیوستگی توابع

تابع: $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x}$ را در نظر بگیرید.

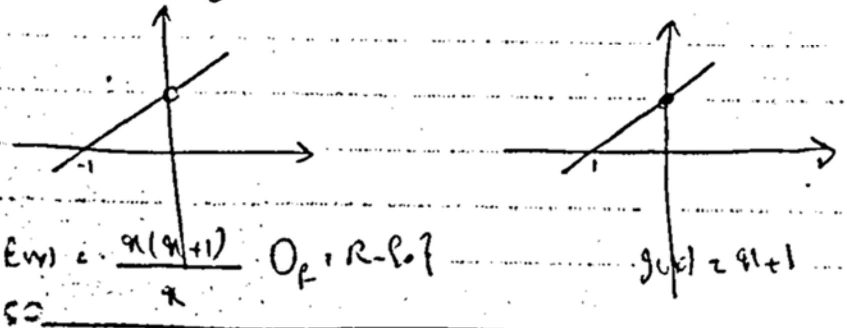
$$D_f = R - \{0\} \longrightarrow R$$

پس به ازای x≠0 داریم: $\dfrac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}} = (x+1)$

$$\Rightarrow g(x) = x+1$$

f و g برابر نیستند چون دامنه‌شان یکسان نیست ولی به ازای هر $x \neq 0$

$$f(x) = g(x) = x+1$$



$f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x}$ $D_f = R - \{0\}$ $g(x) = x+1$ $D_g = R$

Subject

Date

مقادیر تابع $F(x)$ را به ازای مقادیر مختلف x نزدیک به صفر $(x \neq 0)$ را در جدول زیر داریم

x	-1	$-0/5$	$-0/1$	$-0/05$	$-0/01$	$-0/001$
$F(x) = x+1$, $x \neq 0$	۰	۰/۵	۰/۹	۰/۹۵	۰/۹۹	۰/۹۹۹

x	۱	۰/۵	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۱	۰/۰۰۱
$F(x) = x+1$, $x \neq 0$	۲	۱/۵	۱/۱	۱/۰۵	۱/۰۱	۱/۰۰۱

در جدول نشان داده شده که با نزدیک شدن x از طرف راست یا چپ به صفر $F(x)$ به یک میل می‌کند یعنی:

$F(x) \longrightarrow 1$ وقتی که $x \longrightarrow 0$

یعنی: $F(x)$ وقتی که x به صفر میل کند برابر ۱ است (و نه خود ۱)

یعنی در زبان ریاضی:

$$\lim_{x \to 0} F(x) = 1$$

یا

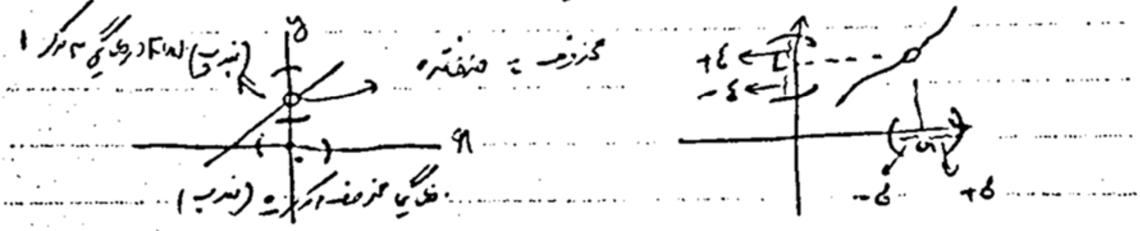
$$\lim_{x \to 0} \frac{x(x+1)}{x} = 1$$

نکات

الف: F در $x=0$ تعریف نشده است

ب: وقتی x از چپ یا راست به صفر نزدیک می‌شود یعنی x در همسایگی محذوف صفر قرار دارد.

ج: وقتی $F(x)$ به ۱ نزدیک می‌شود یا میل می‌کند یعنی $F(x)$ در همسایگی ۱ قرار دارد.



PAPCO

Subject
Date

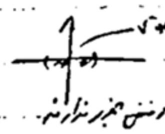
تعریف حد: فرض می‌کنیم تابع F در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده باشد عددی مانند L را حد تابع F در نقطه a می‌نامیم اگر برای هر $\varepsilon>0$، عدد مثبتی مانند δ (وابسته به ε) وجود داشته باشد و طوری که

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

اگر L حد تابع F در نقطه $x=a$ باشد داریم:

$$\lim_{x\to a} F(x)=L$$

نکته: $F(x)=\sqrt{x}$



نقطه صفر نقطه انتهایی دامنه است و همسایگی محذوف ندارد.

$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$ وجود ندارد زیرا حد همسایگی به مرز [illegible]

قضایای حد:

① اگر $F(x)$ چندجمله‌ای باشد داریم: $F(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_nx^n$

$$\lim_{x\to a} F(x)=F(a)=c_0+c_1a+c_2a^2+\dots+c_na^n$$

مثال: $\lim_{x\to 2} x^3-4x+1=8-8+1=1$

② اگر حد $F(x)$ وجود داشته باشد $\lim_{x\to a} f(x)=l$ و c عدد ثابتی باشد

$$\lim_{x\to a} cf(x)=cl \qquad \lim_{x\to 0}\frac{5x(x+1)}{x}$$

③ اگر $\lim_{x\to a}F(x)=L$, $\lim_{x\to a}g(x)=M$ و (به شرط اینکه حدها برای F و g وجود داشته باشند)

$$\lim_{x\to a}[F(x)+g(x)]=L+M \qquad \lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-x-6}{x-3}+2x^2-8\right)$$

$$\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)}=5+10$$

$$\lim_{x\to a}F(x)g(x)=L.M \qquad \lim_{x\to 0}(x^2-2)(x+4)$$

$$\lim_{x\to a}[F(x)]^n=L^n \qquad \lim_{x\to 1}(x^2-4x+5)^3$$

$$=\left[\lim_{x\to 1}(x^2-4x+5)\right]^3=2^3=8$$

Subject
Date

n- عدد صحیح و مثبت باشد $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x+4}=\sqrt{\lim_{x\to 1}(x+4)}=\sqrt{5}$$

قضیه حد خارج قسمت: اگر $\lim_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim_{x\to a} g(x)=m,\ m\neq 0$ داریم:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{L}{m}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}\Rightarrow$$ با بررسی مخرج $3x^6+x^3+1=5\neq 0$

$$=\frac{\lim_{x\to1}\text{—}}{\lim_{x\to1}\text{—}}=\frac{4+9+7}{3+1+1}=4$$

(3) $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ حد را بدست آورید؟

وقتی x به ۴ میل می‌کند مخرج صفر می‌شود پس از قضیه حد خارج قسمت نمی‌توان بهره برد لذا باید رفع ابهام کنیم صورت را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم تا این صورت مخرج را گویا کنیم.

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ اتحاد مزدوج

$$\underset{(a-b)}{\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}}\times\underset{(a+b)}{\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}}=\frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{x-4}}=\sqrt{x}+2=4$$

(در منزل) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2+3x-8}{x^2+x-2}}=\sqrt{\frac{-8}{-2}}=2$

(در منزل) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\frac{(x+2)-4}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{4}$

قضیه فشردگی: فرض کنید به ازای همه مقادیر x داشته باشیم

$$h(x)\le f(x)\le g(x)$$

ادامه دارد

PAPCO

Subject
Date

اگر $\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$ آنگاه تابع f در a حد دارد و $\lim_{x\to a} f(x) = L$

مثال

$$-x^2+2x+6 \le f(x) \le x^2-2x+8$$

$$\lim_{x\to 1} -x^2+2x+6 = -1+2+6 = 7 \qquad \lim_{x\to 1} x^2-2x+8 = 1-2+8 = 7$$

پس طبق قضیه فشردگی $\lim_{x\to 1} f(x) = 7$

مثال: $\lim_{x\to 0} f(x)$ را حساب کنید؟

$$\sqrt{1+x^2} \le f(x) \le 1+|x|$$

نکات: $\lim_{x\to 0} \frac{a}{\cos bx} = a$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} bx} = \frac{a}{b}$

$$\lim \frac{\sin ax}{ax} = \frac{a}{a} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} nx}{\operatorname{tg} mx} = \frac{n}{m} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{x} = a$$

حل: $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 8x} = \lim \frac{\frac{\sin 4x}{\cos 4x}}{\sin 8x} = \lim \frac{\sin 4x}{\cos 4x \sin 8x}$

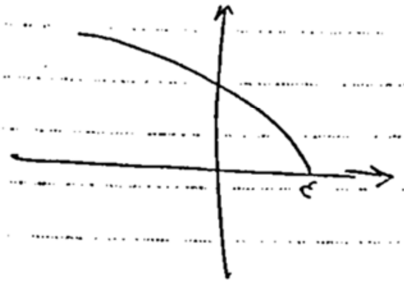
$$= \lim\left(\frac{1}{\cos 4x} \times \frac{\sin 4x}{\sin 8x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 4x} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 8x} = 1 \times \frac{4}{8} = \frac{4}{8}$$

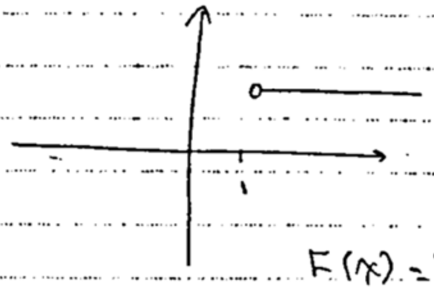
$$\times \lim_{x\to 0} \frac{\cot 3x}{\cot 2x} \qquad \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{7x}$$

Subject

Date

حد راست و حد چپ (تکمیل درس مبحث برای کار تحقیقاتی)





$F(x)=2 ,\ x>1$

$F(x)=\sqrt{4-x}$

برای $x \geq 1$ تعریف شده ، برای $x>4$ تعریف نشده

دارای حد راست است ، دارای حد چپ است

یعنی تابع حد راست تابع وقتی $x=1$ برابر ۲ است و حد چپ ندارد.

یعنی تابع حد چپ تابع وقتی $x \to 4$ میل کند برابر صفر است ولی حد راست ندارد.

تعریف: فرض کنیم F روی (a, c) تعریف شده باشد اگر وقتی از سمت راست به a نزدیک می‌شود $(x>a)$ حد راست داریم:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

فرض کنیم F روی (c, a) تعریف شده باشد اگر وقتی از سمت چپ به a نزدیک می‌شود $(x<a)$ حد چپ داریم:

$$\lim_{x \to a^-} F(x) = L$$

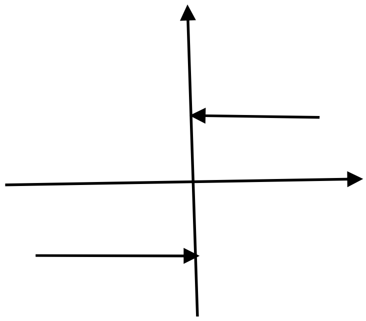
نکته: اگر حد چپ و راست تابعی در یک نقطه برابر نباشند و یا وجود نداشته باشد تابع در آن نقطه حد ندارد.

$$F(x) = \frac{|x|}{x} \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

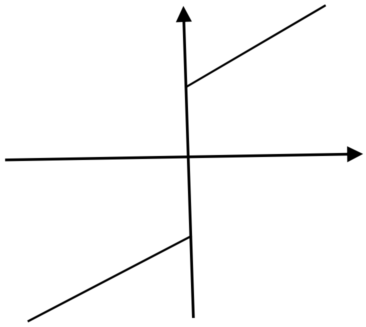
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\frac{|-x|}{-x}=\frac{x}{-x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1$$

حد چپ و راست برابر نیستند



$$F(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 0\\ x-1 & x<0\end{cases}$$

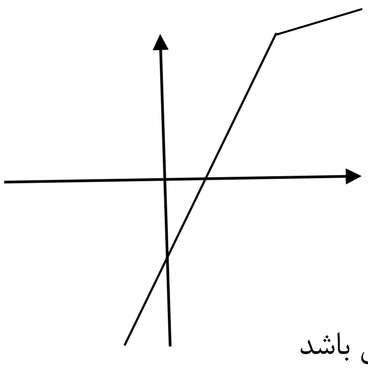


$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}F(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1$$

برابر نیستند پس $\lim_{x\to 0}F(x)$ موجود نیست

$$F(x)=\begin{cases} 2x+1 & x\geq 2\\ 4x-3 & x<2\end{cases}$$



$$\lim_{x\to 2^+}F(x)=\lim_{x\to 2^+}(2x+1)=5$$

$$\lim_{x\to 2^-}F(x)=\lim_{x\to 2^-}(4x-3)=5$$

حد راست و چپ با هم برابر هستند پس تابع در نقطه x=2 برابر و موجود می باشد

$$\lim_{x\to 2}F(x)=5$$

در مساله زیر مقدار k را طوری بدست آورید که تابع f در نقطه x=1 حد داشته باشد ؟

$$F(x) = \begin{cases} 4x+1 & x>1 \\ 2x+k & x\leq 1 \end{cases}$$

حد نامتناهی (حدهای بی نهایت) :

توابعی که دارای حد $\infty-$ یا $\infty+$ می باشند.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ +\infty & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

حد در بینهایت :

حد تابع وقتی که به $\infty+$ یا $\infty-$ میل می کند .

$$\lim_{x\to 2} \frac{5x-1}{x-2} = \frac{9}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{8}{(x-1)^2} = \frac{8}{0} = +\infty$$

قضیه : اگر $\lim_{x\to a} F(x) = +\infty$ یا $\lim_{x\to a} F(x) = -\infty$ آنگاه a یک عدد حقیقی و یا یکی از نمادهای $+\infty$ $-\infty$ ∞ باشد . $\lim_{x\to a} \frac{1}{F(x)} = 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

نمونه مساله؟

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2+1}{4x^2-2x+1}$$

برای حل این مسائل، صورت و مخرج را بزرگترین توان x که در صورت و مخرج آمده تقسیم می کنیم و سپس قضیه حد خارج قسمت را بکار می بریم .

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{7x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(7+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{7+0}{4-0+0}=\frac{7}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+6x+9}{4x^3+7x^2+5x}$$

صورت و مخرج بزرگترین توان یعنی x^3 تقسیم می کنیم .

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{9}{x^3}}{4+\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}}=\text{قضیه حد خارج قسمت}=\lim_{x\to-\infty}\frac{0+0+0}{4+0+0}=0$$

اگر داشته باشیم $f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}F(x)=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0} & n=m\ ,\ \text{اگر توانهای صورت و مخرج برابر بودند}\\ 0 & n<m\ ,\ \text{توان صورت کمتر از توان مخرج باشد}\\ \pm\infty & n>m\ ,\ \text{توان صورت بزرگتر از توان مخرج باشد}\end{cases}$$

نمونه مساله :

توانها صورت بزرگتر $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+7x+6}{4x^2+9}=+\infty$

حد مقابل را محاسبه کنید ؟

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x+6}{\sqrt{2x^2-7}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+5} - x)$$

پیوستگی :

زپ ۱۶۲: تابع F را در نقطه x=a پیوسته می نامیم هر گاه سه شرط زیر برقرار باشد.

۱- F در a تعریف شده باشد یعنی F(a) وجود داشته باشد.

۲- F در a حد داشته باشد یعنی $\lim\limits_{x\to a} F(x)$ وجود داشته باشد به عبارتی حد راست و حد چپ برابر باشند.

۳- حد تابع برابر مقدار تابع در آن نقطه باشند یعنی $\lim\limits_{x\to a} F(x) = F(a)$ برقرار باشد.

اگر حتی یکی از شرایط بالا در x=a برقرار نباشد F در a ناپیوسته می نامیم. اگر F در a پیوسته نباشد a را یک نقطه ناپیوستگی F می نامیم.

تعریف: تابع F در نقطه a پیوستگی چپ دارد هرگاه $\lim\limits_{x\to a^-} F(x) = F(a)$

تابع F در نقطه a پیوستگی راست دارد هرگاه $\lim\limits_{x\to a^+} F(x) = F(a)$

پیوستگی (پیوستگی چپ و راست) توابع را در نقطه داده شده بررسی نمائید؟

زپ ۱۶۵: $\mathrm{F(x)} = \begin{cases} \mathrm{x}^2 + 1 & x > -2 \\ -2\mathrm{x} + 1 & x = -2 \\ -2\mathrm{x} + 1 & x < -2 \end{cases}$

زپ ۱۶۳: $\mathrm{F(x)} = \begin{cases} 5\mathrm{x} + 3 & x > 2 \\ \mathrm{x} + 1 & x = 2 \\ \mathrm{x} + 1 & x < 2 \end{cases}$

زپ ۱۶۳: $\mathrm{F(x)} = \begin{cases} 3\mathrm{x} + \mathrm{x}^2 & x < 1 \\ 4\mathrm{x} & x > 1 \end{cases}$

زپ ۱۶۴: $\mathrm{F(x)} = \begin{cases} \mathrm{x}^2 - 1 & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ -\mathrm{x} + 1 & x > 1 \end{cases}$

(نکته کنکوری) ماهان ۴۸: توابع چند جمله ای ، توابع رادیکالی با فرجه فرد، توابع sin و cos در دامنه تعریفشان پیوسته اند. تابع F(x)=[x] برای هر $x_0 \in z$ بر بازه (x_0, x_0+1) پیوسته است و در $x = x_0$ از راست پیوسته است.

مشتق:

در نیمه دوم سدهٔ هفدهم مطالعه در مساله مهم زیر مورد علاقه دانشمندان بود:

۱- معادله یک منحنی داده شده است معادله خط مماس بر آن را در یک نقطه دلخواه از منحنی بدست آورید.
۲- معادله حرکت غیریکنواخت متحرکی داده شده است سرعت حرکت را در یک لحظه دلخواه بدست آورید.

لایپنیس روی مساله اول و نیوتن روی مساله دوم کار می کردند که معلوم شد که این دو مساله در اساس متفاوت نیستند که با معلوم بودن F ، تابع دیگری به نام $\acute{F}$ که بعدها به نام مشتق به خود گرفت، تعیین شود.

تعریف مشتق درفرهنگ معین : در ریاضی حد نسبت نمو تابع به نمو متغیر وقتی که نمو متغیر به صفر میل کند. یا آهنگ تغییر هر تابع نسبت به متغیر آن.

برای حالت لایپنیس مساله اول : تابع y=F(x) را در نظر می گیرم فرض کنیم $a \in D_F$ اگر $\lim_{x\to a} \frac{F(x)-F(a)}{x-a}$ وجود داشته باشد آن را مشتق F در نقطه a می نامیم و با $F(\acute{a})$ نشان می دهیم.

شکل:

مشتق تابع $F(x) = x^2 + 4x + 3$ را در نقطه x=1 را بدست آورید؟

شکل:

با توجه به شکل بالا $N(a+h,F(a+h))$ و $M(a,F(a))$ این نقاط را روی $y=F(x)$ در نظر میگیریم مثلث قائم الزاویه MHN را داریم:

$$tan\alpha = \frac{NH(\alpha\ \text{ضلع مقابل})}{MH\ (\alpha\ \text{ضلع مجاور})} = \frac{F(a+h)-F(a)}{h}$$

که $tan\alpha$ را ضریب زاویه ای (شیب) خط MN می گوئیم.

فرض می کنیم F در x=a مشتق پذیر باشد در این صورت $\lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$ وجود دارد یعنی وقتی h به سمت صفر نزدیک می شود نقطه M ثابت می ماند و نقطه N در امتداد منحنی به طرف M حرکت می کند و خط MN امتدادش را چنان تغییر می دهد که ضریب زاویه ای (شیب) آن به عدد $F'(a)$ به عنوان حد نزدیک می شود.

زپ۱۸۷: نکته: معادله خط مماس بر نمودار تابع $y=F(x)$ در نقطه ای به طول a که روی نمودار قرار دارد برابر است با $y-F(a)=F'(a)(x-a)$

زپ۱۸۸: نکته: معادله خط قائم اورده شود.

زپ۱۸۵: منزل: مشتق تابع و معادله خط مماس $F(x)=x^3$ را در نقطه $x=2$ بدست آورید؟

شکل:

مشتق تابع و معادله خط مماس $F(x)=x^2+4x+3$ را در نقطه $x=1$ بدست آورید؟

شکل:

در دو مثال بالا می بینیم که M (همانطور که در شکل گفته شد) مقداری ثابت است که با حرکت h به سمت صفر N نیز به M نزدیک می شود.

زپ ۱۹۲: برای روش نیوتن حالت دوم :

فرض می کنیم معادله حرکت جسم M روی محور OS به صورت S=S(t) باشد(برحسب زمان) سرعت متحرک M در لحظه t=a را با $s\acute{(a)}$ تعریف می کنیم.

$$v(a) = s\acute{(a)} = \lim_{t\to a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$$ سرعت

زپ ۱۹۲: فرض می کنیم $s(t)=t^2+3t$ معادله حرکت جسمی روی خط مستقیمی باشد سرعت این متحرک را در لحظه t=2 بدست آورید؟

قضیه: زپ ۱۹۲و۱۹۳: رابطه پیوستگی و مشتق: اگر تابع F در نقطه x=a مشتق پذیر باشد در این نقطه پیوسته خواهد بود. عکس این قضیه درست نخواهد بود مانند تابع F(X)=|x| که در نقطه x=0 پیوسته است ولی مشتق ندارد.

قضایای مشتق :

زپ۱۹۳ ماهان۸۹و۹۰: فرض می کنیم a عددی ثابت است و $n\epsilon N$ و u,v ترکیب خطی می باشند.

ردیف	Function	derivative		Function	Derivative
1	x^n	nx^{n-1}	10	$\cot(x)$	$\csc^2(x)$
2	$x^{\frac{n}{m}}$	$\frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}$	11	$\sec(x)$	$\sec(x)\tan(x)$
3	a^x	$ln(a)a^x$	12	$\csc(x)$	$-\csc(x)\cot(x)$
4	e^x	e^x	13	$\sin^{-1}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	log_x^a	$\frac{1}{xln(a)}$	14	$\cos^{-1}(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6	$ln(x)$	$\frac{1}{x}$	15	$\tan^{-1}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
7	$\sin(x)$	$\cos(x)$	16	$\cot^{-1}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
8	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	17	$\sec^{-1}(x)$	$\frac{1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}$

9	$\tan(x)$	$\sec^2(x)$	18	$\csc^{-1}(x)$	$\frac{-1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}$
نمادهای مشتق: $D_x(y), y'$ و $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$					

مشتق توابع زیر را محاسبه کنید؟

$$y = 4$$

$$y = -7x$$

$$y = 3x^2$$

$$y = -2x^4$$

سوالات زیر از زپ ۱۹۶ تا ۲۲۴

$$y = 3x^6 + 5x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 7x + 4$$

$$y = (2x+1)^3$$

$$y = (x^4+1)(x^2+3x)$$

$$y = \frac{2x+3}{4x+5}$$

$$y = \frac{(x-2)^3}{2x-3}$$

$$y = \frac{5}{(2x-2)^4}$$

$$y = \sqrt{x^2+7x+15}$$

$$y = \sqrt[4]{(x-1)^3}$$

$$y = \sqrt[4]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3} \qquad y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$y = 3x^{\frac{-1}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}}$$

$y = x^2\sqrt{x^2 + 4}$

$y = \sin(4x^2)$

$y = \sin(4x^2 + 7x)$

$y = \cos(\frac{2x + 1}{x + 3})$

$y = \frac{1}{x^2}$

$y = 3^{x^2+5}$

$y = 3^{cot\sqrt{x}}$ ماهان ۹۱

$y = 10^{x^2-sinx}$ رپ فرخو ۲۷۱

$y = x^2\left(\sqrt{2}\right)^{x+\sqrt{x}}$ رپ فرخو ۲۷۱

زپ۱۹۹: تعریف :اگر مشتق راست در نقطه a $F_+\acute{}(a)$ و مشتق چپ در نقطه a $F_-\acute{}(a)$ برابر باشند آنگاه تابع F در a مشتق پذیر است و $F\acute{}(a)$. در غیر اینصورت مشتق وجود ندارد.

پیوستگی و مشتق پذیری توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی نمائید؟

زپ ۱۹۹: $F(x) = \begin{cases} x+1 & x > 3 \\ 2x-2 & x \leq 3 \end{cases}$

زپ 201: $F(x) = \begin{cases} x^2+3x & x > 1 \\ 5x-1 & x \leq 1 \end{cases}$

زپ201: $F(x) = \begin{cases} x^2+4x & x < 1 \\ 4x-7 & x \geq 1 \end{cases}$

زپ 201: تابع $F(x) = \begin{cases} ax+b & x > 2 \\ 4+2b & x \leq 2 \end{cases}$ داده شده مقادیر a,b را طوری تعیین کنید که $\acute{F}(2)$ موجود باشد(یعنی در x=2 مشتق پذیر باشد).

ماکسیمم و مینیمم تابع:

زپ 257: تعریف : تابع F در نقطه c دارای ماکسیمم نسبی است هرگاه یک همسایگی از c وجود داشته باشد به طوری که F در آن همسایگی تعریف شده و به ازای هر x در این همسایگی $F(c) \geq F(x)$

شکل:

تعریف : تابع F در نقطه c دارای مینیمم نسبی است هرگاه یک همسایگی از c وجود داشته باشد به طوری که F در آن همسایگی تعریف شده و به ازای هر x در این همسایگی $F(c) \leq F(x)$

شکل:

تعریف : اگر تابع F در نقطه c ماکسیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد گوئیم F در c اکسترمم نسبی دارد.

زپ۲۶۱: قضیه : اگر F(x) به ازای همه مقادیر در فاصله (a,b) موجود بوده و $c \in (a,b)$ اکسترمم نسبی داشته باشد آنگاه در صورت وجود $\acute{F}(c)$ ، داریم : $\acute{F}(c) = 0$.

زپ۲۶۱: اگر تابع F مشتق پذیر باشد تنها مقادیری از x که F در آنها اکسترمم نسبی دارد آنهایی هستند که $\acute{F}(x) = 0$ صدق کند که عکس این موضوع صادق نیست.

شکل: برای مفهوم مورد بالا

زپ۲۶۱: تعریف : نقطه $c \in D_F$ را یک نقطه بحرانی F می نامیم هر گاه یکی از دو شرط زیر برقرار باشد.

۱- $\acute{F}(c) = 0$
۲- $\acute{F}(c)$ وجود نداشته باشد (یعنی مشتق پذیر نباشد).

زپ۲۶۱: در صورت وجود نقاط بحرانی تابع را بدست آورید؟

$$F(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 2 - x & x > 1 \\ 2x - 1 & x \leq 1 \end{cases}$$

$$F(x) = |x - 1|$$

زپ۲۶۱: با در نظر گرفتن تعریف نقطه بحرانی، معادله $\acute{F}(c) = 0$ را با توجه به مفهوم مشتق بنویسید؟

مهم-شکل