خلاصه فرمول های

مکانیک سیالات

مهندسی شیمی

تهیه کننده: دکتر بهزاد خداکرمی

فصل ۱

خواص سیال

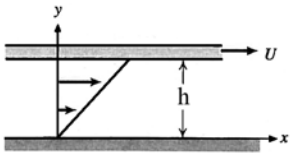
۱ـ۱ـ قانون لزجت نیوتن

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \qquad (۱)$$

$\frac{du}{dy}$: گرادیان سرعت (آهنگ کرنش برشی یا تغییر شکل زاویه‌ای)

μ : لزجت (لزجت مطلق یا لزجت دینامیک)

توزیع سرعت خطی :



$$\tau_{yx} = \mu \frac{U}{h}$$

۱ـ۲ـ لزجت سینماتیك

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad (۲)$$

۱ـ۳ـ واحد لزجت

$۱\ \text{Poise} = ۰/۱\ \text{kg/m.s}$ یا Pa.s

$۱\ \text{cp} = ۱۰^{-۳}\ \text{Pa.s}$ (سانتی‌پویز)

$۱\ \text{St} = ۱۰^{-۴}\ \text{m}^۲/\text{s}$

۱۱ـ٤ـ سیالات غیرنیوتنی

$$\tau = k\left(\frac{du}{dy}\right)^n + \tau_۰ \qquad (۳)$$

سیال نیوتنی: $n = ۱\ ,\ \tau_۰ = ۰$

سیال بینگهام: $n = ۱\ ,\ \tau_۰ \neq ۰$

سیال دیلاتانت: $n > ۱\ ,\ \tau_۰ = ۰$

سیال شبه پلاستیک: $n < ۱\ ,\ \tau_۰ = ۰$

۱ـ۵ـ چگالی و وزن مخصوص

چگالی: $\rho = \frac{m}{V}$ (۴)

وزن مخصوص: $\gamma = \rho g = \frac{W}{V}$ (۵)

۱ـ۶ـ حجم مخصوص

$\nu = \frac{۱}{\rho}$ (۶)

۱ـ۷ـ چگالی نسبی

$S.G = \frac{\text{چگالی سیال}}{\text{چگالی سیال مبنا}} = \frac{\text{وزن مخصوص سیال}}{\text{وزن مخصوص سیال مبنا}}$ (۷)

۱ـ۸ـ کشش سطحی

$\sigma = \frac{F}{L}$ (۸)

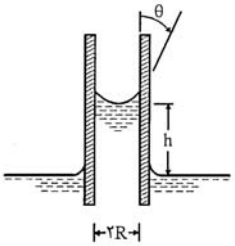
اختلاف فشار داخل و بیرون $\Delta P = P_i - P_o$ **:**

قطره کروی: $\Delta P = \frac{۲\sigma}{R}$

جت استوانه‌ای: $\Delta P = \frac{\sigma}{R}$

حباب کروی: $\Delta P = \frac{۴\sigma}{R}$

۱ـ۹ـ مویینگی



میزان صعود یا نزول مایع در پدیده مویینگی:

$h = \frac{۲\sigma\cos\theta}{\gamma x}$ (۹)

لوله‌ای به شعاع R : $x = R$

دو صفحه موازی به فاصله d : $x = d$

لوله هم محور به شعاع‌های $R_۱$ **و** $R_۲$ **:** $x = R_o - R_i$

۱ـ۱۰ـ مدول کشسانی حجمی

$E_v = -\frac{dP}{dV/V}$ (۱۰)

$E_v = \frac{dP}{d\gamma/\gamma} = \frac{dP}{d\rho/\rho}$ (۱۱)

در فرایند دما ثابت:

$E_v = P$

در فرایند ایزنتروپیک:

$E_v = kP$

فصل ۲

استاتیک سیالات

بخش اول: فشار و روش‌های اندازه‌گیری آن

۲ـ۱ـ فشار

قانون پاسکال:

$$P_x = P_y = P_z$$

سیال غیر ساکن:

$$P = \frac{۱}{۳}(P_x + P_y + P_z) \quad (۱)$$

۲ـ۲ـ تغییرات فشار

نیروی سطحی در واحد حجم ناشی از تغییر فشار:

$$\mathbf{f} = -\nabla P \quad (۲)$$

یا

$$\mathbf{f} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\mathbf{k}\right) \quad (۳)$$

معادله اساسی استاتیک سیالات

$$\frac{dP}{dz} = -\gamma \quad (۴)$$

حالت اول: $\rho = \rho(p)$

$$\int_{P_۱}^{P} \frac{dP}{\rho} = -g(z_۲ - z_۱) \quad (۵)$$

حالت دوم: $\gamma = \gamma(z)$

$$\Delta P = -\int_{z_۱}^{z_۲} \gamma dz$$

حالت سوم: $\rho = cte$

$$P = P_\circ + \gamma h \quad (۶)$$

حالت دما ثابت:

با فرض گاز ایده‌آل :

$$P = P_0 \exp\left[-\frac{\gamma_0}{P_0}(z - z_0)\right] \quad (۷)$$

یا

$$P = P_0 \exp\left[-\frac{g(z - z_0)}{RT_0}\right] \quad (۸)$$

حالت آدیاباتیک:

$$P = P_0\left[۱ - \frac{n-۱}{n}\frac{\gamma_0(z - z_0)}{P_0}\right]^{\frac{n}{n-۱}} \quad (۹)$$

$$T = T_0\left[۱ - \frac{n-۱}{n}\frac{\gamma_0(z - z_0)}{P_0}\right] \quad (۱۰)$$

۲ـ۳ـ اندازه‌گیری فشار

$$P = ۱atm = ۱۰۱۳۲۵Pa = ۱۴/۷Psi = ۱۰/۳۳mH_2O = ۷۶۰mmHg = ۱/۰۱۳۲۵bar$$

$$P_{abs} = P_{gage} + P_{bar} \quad (۱۱)$$

(فشار اتمسفری + فشار نسبی = فشار مطلق)

فشار نسبی − = خلأ نسبی

بخش دوم : نیروهای هیدروستاتیکی وارد بر سطوح

۲ـ۵ـ نیروی هیدروستاتیکی وارد بر صفحه تخت

۲ـ۵ـ۱ـ روش انتگرال‌گیری

$$F = \int_A PdA \quad (۱۲)$$

مختصات نقطه اثر :

$$x_p = \frac{۱}{F}\int_A xPdA \quad (۱۳)$$

$$y_p = \frac{۱}{F}\int_A yPdA \quad (۱۷)$$

۲ـ۵ـ۲ـ روش استفاده از روابط

$$F = P_C A \text{ یا } F = \gamma \bar{h} A \quad (۱۴)$$

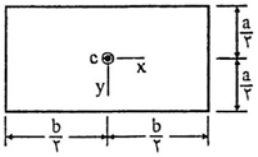
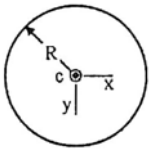
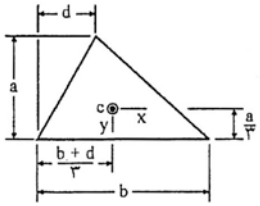
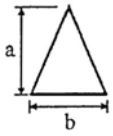
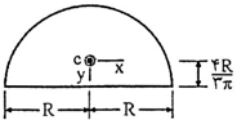
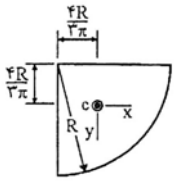
$$x_p = \bar{x} + \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y}A} \quad (۱۵)$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A} \quad (۱۶)$$

$$\bar{h} = \bar{y}\sin\theta$$

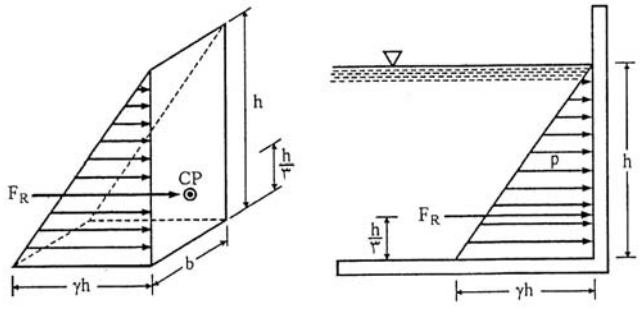
$\bar{h}$ **: مقدار فاصله قایم مرکز سطح صفحه تا سطح آزاد آب**

$\bar{I}_{xy}$ **: حاصلضرب اینرسی** I_G **: گشتاور دوم سطح**

شکل		A	$\bar{I}_{xy}$	I_G
مستطیل		ab	۰	$\frac{۱}{۱۲}ba^۳$
دایره		$\pi R^۲$	۰	$\frac{\pi R^۴}{۴}$
مثلث (کلی)		$\frac{۱}{۲}ab$	$\frac{۱}{۷۲}ba^۲(b-۲d)$	$\frac{۱}{۳۶}ba^۳$
مثلث متساوی‌الساقین		$\frac{۱}{۲}ab$	۰	$\frac{۱}{۳۶}ba^۳$
نیم‌دایره		$\frac{۱}{۲}\pi R^۲$	۰	۰/۱۰۹۷۶$R^۴$
ربع دایره		$\frac{۱}{۴}\pi R^۲$	-۰/۰۱۶۴۷$R^۴$	۰/۰۵۴۸۸$R^۴$

۲ـ۵ـ۳ـ روش منشور فشار

منشور فشار برای یک سطح مستطیلی قایم



$$F_R = V = \frac{۱}{۲}(\gamma h)(bh) = \gamma\left(\frac{h}{۲}\right)A \qquad (۱۷)$$

$$x_P = \frac{1}{V}\int_V x dV \qquad (18)$$

$$y_P = \frac{1}{V}\int_V y dV \qquad (19)$$

۲ـ۶ـ نیروهای هیدروستاتیك وارد بر سطوح خمیده

مؤلفه افقی:

$$F_H = P_c A = \gamma \bar{h} A \qquad (20)$$

مؤلفه قائم:

$$F_v = \gamma V \qquad (21)$$

$\bar{h}$ **فاصله قائم مرکز سطح از سطح تصویر شده تا سطح آزاد سیال و A مساحت این سطح**

برآیند نیروهای افقی و قائم ذکر شده:

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} \qquad (22)$$

$$\tan\alpha = \frac{F_V}{F_H} \qquad (23)$$

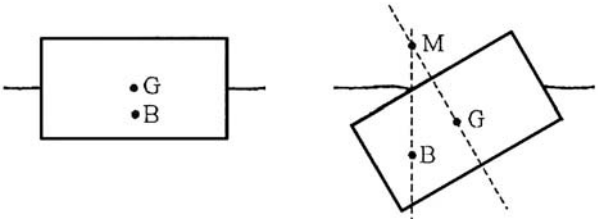
که α **زاویه نیروی برآیند با سطح افق است.**

۲ـ۷ـ نیروی شناوری

$$F'_B = \gamma_f V'_s$$

V'_s **حجمی از جسم که داخل سیال است**

۲ـ۸ـ ارتفاع متاسانتریک



M : نقطه متاسانتریک

$\overline{MG}$ **: ارتفاع متاسانتریک**

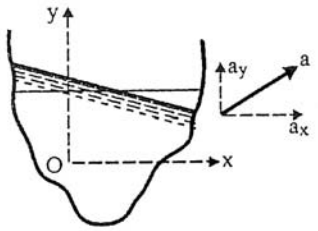
$$\overline{MG} = \overline{MB} - \overline{GB} = \frac{I}{V} - \overline{GB} \qquad (24)$$

I: ممان اینرسی سطح (گشتاور دوم سطح) حول محور y

V: کل حجم مایع جابه‌جا شده

بخش سوم : حرکت صلب‌گونه سیالات

۲ـ۹ـ حرکت با شتاب خطی ثابت



معادله تغییرات فشار:

$$P = P_{.} - \rho a_x x - \rho(g + a_y) y \qquad (۲۵)$$

زاویه سطح آزاد با سطح افق :

$$\tan\theta = \frac{a_x}{g + a_y} \qquad (۲۶)$$

شتاب کلی حرکت:

$$a = \left[a_x^{۲} + (a_y + g)^{۲} \right]^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۲۷)$$

اگر s جهت عمود بر سطح آزاد سیال باشد:

$$\frac{dP}{ds} = \rho a \qquad (۲۸)$$

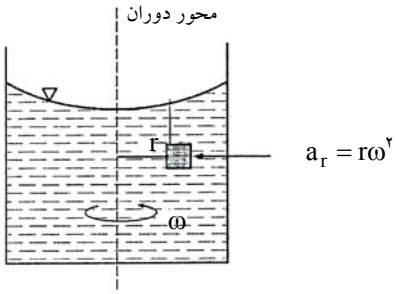
اگر مخزن حاوی سیالی با شتاب ثابت a_y به سمت بالا حرکت کند فشار در فاصله قائم h از سطح آزاد سیال عبارت خواهد بود از:

$$P = \gamma' h \qquad (۲۹)$$

$$\gamma' = \gamma\left(۱ + \frac{a_y}{g}\right)$$

اگر مخزن دارای شتاب رو به پایین باشد علامت + به – تبدیل می‌شود.

۲ـ۱۰ـ حرکت چرخشی یکنواخت



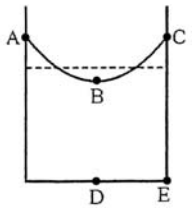
معادله تغییرات فشار:

$$P = \frac{\rho\omega^{۲} r^{۲}}{۲g} - \gamma z + c \qquad (۳۰)$$

معادله سطح فشار ثابت

$$z = \frac{\omega^{۲} r^{۲}}{۲g} + c \qquad (۳۱)$$

$$r_B = ۰ \ , \ r_C = R \ \Rightarrow \ z_C - z_B = h = \frac{R^{۲}\omega^{۲}}{۲g} \qquad (۳۲)$$



فصل ۳

دینامیک سیالات غیرلزج

۳ـ۱ ـ مقدمه

جریان درهم:

$$\tau = (\mu + \eta)\frac{du}{dy} \quad (۱)$$

η : لزجت گردابی

۳ـ۲ ـ سرعت و شتاب

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \quad (۲)$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \quad (۳)$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \quad (۴)$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (۵)$$

جمله اول : شتاب موضعی سه جمله باقی‌مانده : شتاب جابه‌جایی.

$$\mathbf{a}_{local} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \quad (۶)$$

$$\mathbf{a}_{conv} = u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \quad (۷)$$

۳ـ۳ـ دبی حجمی و دبی جرمی

دبی حجمی سیال:

$$Q = \int_A \mathbf{V}.d\mathbf{A} = AV_{av} \quad (۸)$$

سرعت متوسط:

$$V_{av} = \frac{Q}{A} = \frac{\int_A \mathbf{V}.d\mathbf{A}}{A} \quad (۹)$$

دبی جرمی

$$\dot{m} = \int_A \rho \mathbf{V}.d\mathbf{A} \qquad (۱۰)$$

اگر ρ ثابت باشد:

$$\dot{m} = \rho \int_A \mathbf{V}.d\mathbf{A} = \rho Q \qquad (۱۱)$$

بخش دوم: تجزیه و تحلیل انتگرالی

۳ـ٤ـ معادله پیوستگی

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v} \rho d\forall + \int_{c.s} \rho \mathbf{V}.d\mathbf{A} = ۰ \qquad (۱۲)$$

۱- جریان پایا

$$\sum \dot{m}_{out} - \sum \dot{m}_{in} = ۰ \quad \text{یا} \quad \sum \dot{m}_{in} = \sum \dot{m}_{out} \qquad (۱۳)$$

برای جریان داخلی یک لوله:

$$\rho_۱ A_۱ V_۱ = \rho_۲ A_۲ V_۲ \quad \text{یا} \quad \rho AV = cte \qquad (۱۴)$$

۲- سیال تراکم‌ناپذیر و جریان پایا

$$\sum Q_{out} - \sum Q_{in} = ۰ \quad \text{یا} \quad \sum Q_{in} = \sum Q_{out} \qquad (۱۵)$$

برای جریان داخلی یک لوله:

$$A_۱ V_۱ = A_۲ V_۲ \quad \text{یا} \quad AV = cte \qquad (۱۶)$$

۳ـ۵ـ معادله اندازه حرکت خطی

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v} \mathbf{V}\rho d\forall + \int_{c.s} \mathbf{V}\rho \mathbf{V}.dA \qquad (۱۷)$$

برای جریان پایا :

$$\sum \mathbf{F} = \int_{c.s} \mathbf{V}\rho \mathbf{V}.d\mathbf{A} \qquad (۱۸)$$

در حالتی که جریان پایا، یک بعدی و سرعت‌ها برحسب مقدار متوسط بیان شوند داریم:

$$\sum \mathbf{F} = \left(\sum \rho Q \mathbf{V}\right)_{out} - \left(\sum \rho Q \mathbf{V}\right)_{in} \qquad (۱۹)$$

در سه بعد:

$$\begin{cases} \sum F_x = \left(\sum \rho Q V_x\right)_{out} - \left(\sum \rho Q V_x\right)_{in} \\ \sum F_y = \left(\sum \rho Q V_y\right)_{out} - \left(\sum \rho Q V_y\right)_{in} \\ \sum F_z = \left(\sum \rho Q V_z\right)_{out} - \left(\sum \rho Q V_z\right)_{in} \end{cases}$$

درحالتی که یک ورودی و یک خروجی داشته باشیم:

$$\sum \mathbf{F} = \rho Q\left(\mathbf{V}_۲ - \mathbf{V}_۱\right) = \dot{m}\left(\mathbf{V}_۲ - \mathbf{V}_۱\right) \qquad (۲۰)$$

بخش سوم: تجزیه و تحلیل دیفرانسیلی جریان سیال

۳ـ۶ـ معادله پیوستگی

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=-\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{یا} \quad \nabla\cdot\rho\mathbf{V}=-\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{۲۱}$$

$$\rho=\text{cte}: \ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=۰ \quad \text{یا} \quad \nabla\cdot\mathbf{V}=۰ \tag{۲۲}$$

$$\text{حالت پایا}: \ \nabla\cdot\rho\mathbf{V}=۰ \tag{۲۳}$$

یا

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=۰ \tag{۲۴}$$

معادله پیوستگی در مختصات استوانه‌ای:

$$\frac{۱}{r}\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r}+\frac{۱}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=-\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{۲۵}$$

۳ـ۷ـ خطوط سیالاتی

خط جریان

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w} \tag{۲۶}$$

که u و v و w مؤلفه‌های بردار سرعت در جهات x ، y و z هستند.

۳ـ۸ـ تابع جریان

برای جریان تراکم‌ناپذیر دوبعدی در صفحه xy :

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y} \ , \ v=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{۲۷}$$

رابطه بین دبی جریان با تابع جریان:

$$Q=\psi_۲-\psi_۱ \tag{۲۸}$$

برای جریان تراکم‌پذیر:

$$\rho u=\frac{\partial \psi}{\partial y} \ , \ \rho v=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{۲۹}$$

$$\dot{m}=\psi_۲-\psi_۱ \tag{۳۰}$$

۳ـ۹ـ معادله اندازه حرکت

برای جریان تراکم‌ناپذیر با لزجت ثابت:

جهت x :

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho g_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲}\right) \tag{۳۱}$$

جهت y :

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho g_y-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad (۳۲)$$

جهت z :

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho g_z-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad (۳۳)$$

جریان غیرلزج $(\mu=0)$:

معادله اولر : $\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\rho\mathbf{g}-\nabla P$ (۳۴)

۳ـ۱۰ ـ معادله برنولی

$$\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=cte \quad (۳۵)$$

یا

$$\frac{P}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}+z=cte \quad (۳۶)$$

یا

$$P+\frac{1}{2}\rho V^2+\gamma z=cte \quad (۳۷)$$

هد کل:

$$H=\frac{P}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}+z \quad (۳۸)$$

۳ـ۱۱ ـ ضریب تصحیح انرژی جنبشی

$$\alpha=\frac{1}{A}\int_A\left(\frac{v}{V}\right)^3 dA \quad (۳۹)$$

V سرعت متوسط در هر مقطع و v **توزیع سرعت**

۳ـ۱۲ ـ ضریب تصحیح اندازه حرکت

$$\beta=\frac{1}{A}\int_A\left(\frac{v}{V}\right)^2 dA \quad (۴۰)$$

۳ـ۱۳ ـ توان

$$P=\gamma Qh \quad (۴۱)$$

γ : وزن مخصوص سیال، Q : دبی حجمی و h : ارتفاع معادل انرژی

توان موجود در یک جت سیال:

$$P=\gamma Q\frac{V_j^2}{2g}=\gamma AV_j\frac{V_j^2}{2g}=\frac{1}{2}\rho A_j V_j^3$$

فصل ۴

آنالیز ابعادی و تشابه

٤ـ١ـ ابعاد

ابعاد برخی از کمیت‌های مهم در مکانیک سیالات

کمیت	نشانه	بعد در MLTθ	بعد در FLTθ
طول	L	L	L
سطح	A	$L^{۲}$	$L^{۲}$
حجم	∀	$L^{۳}$	$L^{۳}$
سرعت	V	$LT^{-۱}$	$LT^{-۱}$
شتاب	a	$LT^{-۲}$	$LT^{-۲}$
دبی حجمی	Q	$L^{۳}T^{-۱}$	$L^{۳}T^{-۱}$
دبی جرمی	$\dot{m}$	$MT^{-۱}$	$FTL^{-۱}$
چگالی	ρ	$MT^{-۳}$	$FT^{۲}L^{-۴}$
وزن مخصوص	γ	$ML^{-۲}T^{-۲}$	$FL^{-۳}$
فشار و تنش	P, σ	$ML^{-۱}T^{-۲}$	$FL^{-۲}$
لزجت	μ	$ML^{-۱}T^{-۱}$	$FTL^{-۲}$
لزجت سینماتیک	ν	$L^{۲}T^{-۱}$	$L^{۲}T^{-۱}$
کشش سطحی	σ	$MT^{-۲}$	$FL^{-۱}$
سرعت زاویه‌ای	ω	$T^{-۱}$	$T^{-۱}$
گشتاور	T	$ML^{۲}T^{-۲}$	FL
توان	P	$ML^{۲}T^{-۱}$	$FLT^{-۱}$
کار و انرژی	W, E	$ML^{۲}T^{-۲}$	FL

٤ـ٢ـ قضیه پی باکینگهام

تعداد متغیر : n
تعداد ابعاد : m

$\Rightarrow$ تعداد اعداد بی‌بعد $= n - m$

٤ـ٣ـ اعداد بی‌بعد

عدد رینولدز : $Re = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{VL}{\nu} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی لزجی}}$ **(۱)**

عدد فرود : $Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی وزن}}$ **(۲)**

عدد اویلر : $Eu = \frac{\Delta P}{\rho V^2} = \frac{\text{نیروی فشاری}}{\text{نیروی اینرسی}}$ **(۳)**

عدد ماخ : $M = \frac{V}{C} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی تراکم‌پذیری}}$ **(۴)**

(C سرعت صوت است.)

عدد وبر : $We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی کشش سطحی}}$ **(۵)**

عدد استروهال : $St = \frac{L\omega}{V} = \frac{\text{نیروی سانتریفوز}}{\text{نیروی اینرسی}}$ **(۶)**

فصل ۵

جریان‌های داخلی تراکم‌ناپذیر و لزج

۵ـ۱ ـ جریان در داخل لوله‌ها

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{V d}{\nu} \qquad (۱)$$

V: سرعت متوسط جریان، d قطر لوله، μ: لزجت سیال، ν: لزجت سینماتیک سیال

طول ناحیه ورودی (L):

$$\text{جریان آرام}: \frac{L}{d} = ۰/۰۶ Re \qquad (۲)$$

$$\text{جریان درهم}: ۱۰ \le \frac{L}{d} \le ۶۰ \quad \text{یا} \quad \frac{L}{d} = ۴/۴ Re^{\frac{۱}{۶}} \qquad (۳)$$

جریان آرام داخل لوله‌ها

$$\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \tau_{rx}) = \frac{\partial P}{\partial x} \qquad (۴)$$

$$\begin{cases} r = ۰ \ : \ \dfrac{du}{dx} = ۰ \\ r = R \ : \ u = ۰ \end{cases}$$

$$u = -\frac{R^۲}{۴\mu}\left[۱ - \left(\frac{r}{R}\right)^۲\right]\frac{dP}{dx} \qquad (۵)$$

$$u_{max} = -\frac{R^۲}{۴\mu}\frac{dP}{dx} \qquad (۶)$$

$$\frac{u}{u_{max}} = ۱ - \left(\frac{r}{R}\right)^۲ \qquad (۷)$$

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^۲} = \frac{۱}{۲} u_{max} \qquad (۸)$$

$$\alpha = ۲ \ , \ \beta = \frac{۴}{۳}$$

معادله هاگن – پوازی

$$\Delta P = \frac{۱۲۸\mu L Q}{\pi d^{۴}} \qquad (۹)$$

$$\Delta P = \frac{۳۲\mu L u}{d^{۲}} \qquad (۱۰)$$

تنش برشی:

$$\tau_{rx} = -\mu \frac{du}{dr} = -\frac{r}{۲} \frac{dP}{dx} \qquad (۱۱)$$

جریان، کاملاً توسعه یافته:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_{۲} - P_{۱}}{L} = -\frac{\Delta P}{L} \qquad (۱۲)$$

تنش برشی روی دیواره لوله:

$$\tau_w = \tau\big|_{r=R} = \frac{R}{۲} \frac{\Delta P}{L} \qquad (۱۳)$$

و در نتیجه:

$$\frac{\tau_w}{\tau} = \frac{R}{r} \quad \text{یا} \quad \tau = \frac{\tau_w}{R} r \qquad (۱۴)$$

برای یک لوله با زاویه θ نسبت به افق قرار داشته باشد که فشار دو انتهای آن برابر باشد:

$$u = \frac{R^{۲} - r^{۲}}{۴\mu} \gamma \sin\theta \qquad (۱۵)$$

$$\tau_w = \frac{R}{۲} \gamma \sin\theta \qquad (۱۶)$$

۵ـ۲ـ جریان آرام سیالات غیرنیوتنی در لوله‌ها

الف) سیالات بینگهام

$$\tau = \tau_y + \mu_P \frac{du}{dr}$$

$$\frac{Q}{\pi R^{۳}} = \frac{\tau_w}{۸\mu_p} \left[۱ - \frac{۴}{۳}\left(\frac{\tau_y}{\tau_w}\right) + \frac{۱}{۳}\left(\frac{\tau_y}{\tau_w}\right)^{۴} \right] \qquad (۱۷)$$

ب) سیالات قانون توانی (Power law)

$$\tau = k\left(\frac{du}{dr}\right)^{n}$$

$$\frac{u}{\bar{u}} = \left(\frac{۳n+۱}{n+۱}\right)\left[۱ - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+۱}{n}} \right] \qquad (۱۸)$$

$$\frac{Q}{\pi R^{۳}} = \frac{n}{۳n+۱}\left(\frac{\tau_w}{k}\right)^{\frac{۱}{n}} \qquad (۱۹)$$

$$\Delta P = ۲k\left(\frac{۳n+۱}{n}\right)^{n} \frac{u^{n} L}{R^{n+۱}} \qquad (۲۰)$$

۵ـ۳ـ تعیین افت اصطکاکی در لوله (معادله دارسی – ویسباخ)

برای جریان سیال تراکم‌ناپذیر، پایا و توسعه یافته :

$$h_f = f\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} \qquad (۲۱)$$

f: ضریب اصطکاک دارسی **L : طول لوله**

d: قطر لوله **V: سرعت متوسط جریان**

ضریب اصطکاک فانینگ

$$C_f = \frac{f}{4} \qquad (۲۲)$$

برای مجراهای غیردایره‌ای:

$$h_f = f\frac{L}{d_h}\frac{V^2}{2g} \qquad (۲۳)$$

d_h قطر هیدرولیکی مربوط به مجرا

۵ـ٤ـ ضریب اصطکاك

۱- جریان آرام:

$$f = \frac{64}{Re} \qquad (۲۴)$$

۲- جریان درهم:

معادله کلبورک:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0/869\ln\left[\frac{\varepsilon/d}{3/7} + \frac{2/523}{Re\sqrt{f}}\right] \qquad (۲۵)$$

(برای کنکور لازم نیست)

توجه: معادله بلازیوس برای لوله‌های صاف ($Re \le 10^5$):

$$f = \frac{0/3164}{Re^{0/25}} \qquad (۲۶)$$

رابطه بین ضریب اصطکاک و تنش برشی روی دیواره:

$$\tau_w = \frac{1}{8}f\rho V^2 \qquad (۲۷)$$

۵ـ۵ـ جریان درهم

زیر لایه لزج:

ضخامت زیر لایه لزج: $\delta' = 5\frac{\nu}{u^*}$ (۲۸)

سرعت برشی با سرعت اصطکاکی : $u^* = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ (۲۹)

لایه میانی:

توزیع سرعت: $\frac{u}{u^*} = 2/5\ln\frac{yu^*}{\nu} + 5/5$ (۳۰)

لایه خارجی:

$$\text{توزیع سرعت}: \frac{u_m - u}{u^*} = ۲/۵ \ln \frac{R}{y} \quad (۳۱)$$

توزیع سرعت در جریان درهم :

$$\frac{u}{u_{max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{۱}{n}} \quad \text{یا} \quad \frac{u}{u_{max}} = \left(۱ - \frac{r}{R}\right)^{\frac{۱}{n}} \quad (۳۲)$$

y فاصله از دیواره لوله: $y = R - r$

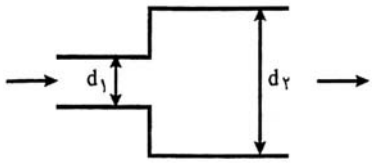
۵ـ۶ـ افت‌های موضعی

$$h_m = k \frac{V^۲}{۲g} \quad (۳۳)$$

۵ـ۶ـ۱ـ طول معادل

$$L_e = \frac{kd}{f} \quad (۳۴)$$

۵ـ۶ـ۲ـ تلفات ناشی از انبساط ناگهانی



$$h_e = k_e \frac{V_۱^۲}{۲g} = \frac{(V_۱ - V_۲)^۲}{۲g} \quad (۳۵)$$

$$k_e = \left(۱ - \frac{A_۱}{A_۲}\right)^۲ = \left[۱ - \left(\frac{d_۱}{d_۲}\right)^۲\right]^۲ \quad (۳۶)$$

تخلیه جریان از یک مجرا به داخل مخزن بزرگ: $k_e = ۱$

۵ـ۶ـ۳ـ تلفات ناشی از انقباض ناگهانی

$$h_c = k_c \frac{V_۲^۲}{۲g} \quad (۳۷)$$

۵ـ۶ـ۴ـ زانویی

تغییرات فشار در جهت شعاعی:

$$\frac{dP}{dr} = \rho \frac{V^۲}{r} \Rightarrow P' - P = \rho V^۲ \ln \frac{r'}{r} \quad (۳۸)$$

۵ـ۷ـ معادله انرژی

$$\frac{P_۱}{\gamma} + \alpha_۱ \frac{V_۱^۲}{۲g} + z_۱ = \frac{P_۲}{\gamma} + \alpha_۲ \frac{V_۲^۲}{۲g} + z_۲ + \sum h_f \quad (۳۹)$$

$\sum h_f$: تلفات انرژی $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$: ضرایب تصحیح انرژی

۵ـ۹ـ جریان آرام کاملاً توسعه یافته بین صفحات موازی بزرگ

الف) صفحات ساکن باشند

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} \qquad (۴۰)$$

$$\begin{cases} y = ۰ \ : \quad u = ۰ \\ y = a \ : \quad u = ۰ \end{cases}$$

$$u = \frac{۱}{۲\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)(y^۲ - ay) \qquad (۴۱)$$

$$Q = -\frac{ba^۳}{۱۲\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \qquad (۴۲)$$

$$\overline{u} = -\frac{a^۲}{۱۲\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \qquad (۴۳)$$

$$u_{max} = \frac{۳}{۲}\overline{u} \qquad (۴۴)$$

$$\tau_w = -\frac{a}{۲}\frac{\partial P}{\partial x} \qquad (۴۵)$$

$$f = \frac{۴۸}{Re_a} \quad \left(Re_a = \frac{\rho u a}{\mu}\right) \qquad (۴۶)$$

قطر هیدرولیکی برای دو صفحه موازی که به فاصله a از هم قرار دارند:

$$D_h = ۲a$$

$$f = \frac{۹۶}{Re_{D_h}} \qquad (۴۷)$$

توجه: اگر مبدأ مختصات را روی محور لوله انتخاب شود:

$$u = \frac{۱}{۲\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(y^۲ - \frac{a^۲}{۴}\right) \qquad (۴۸)$$

$$\tau_{yx} = a\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(\frac{y}{a} - \frac{۱}{۲}\right) \qquad (۴۹)$$

ب) صفحه بالایی با سرعت ثابت درحالت حرکت باشد

$$\begin{cases} y = ۰ \ : \quad u = ۰ \\ y = a \ : \quad u = U \end{cases}$$

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)(y^2 - ay) + \frac{Uy}{a} \quad (50)$$

$$\tau_{yx} = a\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(\frac{y}{a} - \frac{1}{2}\right) + \mu\frac{U}{a} \quad (51)$$

$$Q = -\frac{ba^3}{12\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{baU}{2} \quad (52)$$

$$\bar{u} = -\frac{a^2}{12\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{U}{2} \quad (53)$$

نقطه‌ای که در آن سرعت ماکزیمم است:

$$y = \frac{a}{2} - \frac{\mu U}{a\frac{\partial P}{\partial x}} \quad (54)$$

۵ـ۱۰ـ جریان فیلم مایع از روی یك سطح شیب‌دار

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g\cos\beta \quad (55)$$

شرایط مرزی:
$$\begin{cases} x = 0 : & \frac{du_x}{dx} = 0 \\ x = \delta : & u_z = 0 \end{cases}$$

$$u_z = \frac{\rho g\delta^2\cos\beta}{2\mu}\left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] \quad (56)$$

$$x = 0 \Rightarrow u_{z,max} = \frac{\rho g\delta^2\cos\beta}{2\mu} \quad (57)$$

$$\bar{u}_z = \frac{2}{3}u_{z,max} \quad (58)$$

$$u_z = \frac{3}{2}\bar{V}_z\left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] \quad (59)$$

۵ـ۱۱ـ مجاری غیردایره‌ای

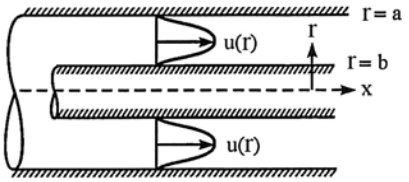
شعاع هیدرولیکی

$$R_h = \frac{A}{p} = \frac{\text{مساحت سطح مقطع}}{\text{محیط خیس‌شده}} \quad (60)$$

$$D_h = 4\frac{A}{p} = 4R_h \quad (61)$$

$$h_f = f\frac{L}{D_h}\frac{V^2}{2g} \qquad (۶۲)$$

۵ـ۱۲ـ جریان از بین دو لوله هم‌محور



$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=\frac{dP}{dx} \qquad (۶۳)$$

$$\begin{cases} r=a \;:\; u=0 \\ r=b \;:\; u=0 \end{cases}$$

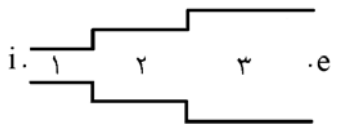
$$u(r) = -\frac{1}{4\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)\left[a^2 - r^2 + \frac{a^2-b^2}{\ln(b/a)}\ln\frac{a}{r}\right] \qquad (۶۴)$$

$$r_{u_{max}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{2\ln(a/b)}} \qquad (۶۵)$$

$$D_h = 2(a-b) \qquad (۶۶)$$

۵ـ۱۴ـ سیستم‌های چندلوله‌ای

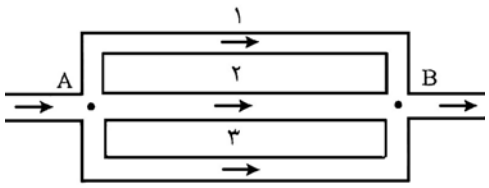
اتصال سری



$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \cdots = Q_n \qquad (۶۷)$$

$$h_{f_{ie}} = h_{f_1} + h_{f_2} + h_{f_3} + \cdots + h_{f_n} \qquad (۶۸)$$

اتصال موازی



$$h_{f_1} = h_{f_2} = h_{f_3} = \cdots = h_{f_n} = \frac{P_i}{\gamma} + z_i - \left(\frac{P_e}{\gamma} + z_e\right) \qquad (۶۹)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_n \qquad (۷۰)$$

نسبت دبی‌ها در دو لوله موازی ۱ و ۲:

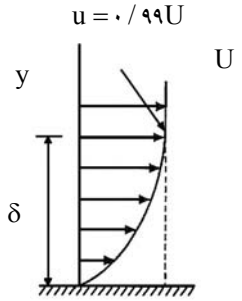
$$\frac{Q_1}{Q_1} = \sqrt{\frac{f_2}{f_1}\times\frac{L_2}{L_1}\times\frac{d_1^5}{d_2^5}}$$

فصل ۶

جریان‌های خارجی

۶ـ۱ـ مفاهیم لایه مرزی

$y=\delta:\quad u=۰/۹۹U$



ضخامت جابه‌جایی:

$$\delta^* = \int_{۰}^{\infty}\left(۱-\frac{u}{U}\right)dy \approx \int_{۰}^{\delta}\left(۱-\frac{u}{U}\right)dy \qquad (۱)$$

ضخامت مومنتم:

$$\theta = \int_{۰}^{\infty}\frac{u}{U}\left(۱-\frac{u}{U}\right)dy \approx \int_{۰}^{\delta}\frac{u}{U}\left(۱-\frac{u}{U}\right)dy \qquad (۲)$$

۶ـ۲ـ معادلات لایه مرزی

معادله پیوستگی : $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=۰$ (۳)

معادله اندازه حرکت در جهت x : $u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{۱}{\rho}\frac{dP}{dx}+v\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}$ (۴)

معادله اندازه حرکت در جهت x : $\frac{\partial P}{\partial y}=۰$

۶ـ۳ـ معادلات لایه مرزی در جریان روی صفحه تخت

الف) جریان آرام

معادله پیوستگی : $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=۰$ (۵)

معادله اندازه حرکت در جهت x : $u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (۶)

شرایط مرزی:

$$y=0 \;:\; u=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$y=\delta \;:\; u=U,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0$$

٦ـ٤ـ حل بلازیوس

الف) جریان آرام

$$\delta=\frac{5x}{\sqrt{Re_x}} \quad (۷)$$

$$C_f=\frac{0/664}{\sqrt{Re_x}} \quad (۸)$$

$$\frac{\theta}{\delta}=0/133 \quad و \quad \frac{\delta^*}{\delta}=0/344$$

ب) جریان درهم

$$\delta=\frac{0/37x}{Re_x^{\frac{1}{5}}} \quad (۹)$$

$$C_f=\frac{0/074}{Re_x^{\frac{1}{5}}} \quad (۱۰)$$

٦ـ٥ـ روش انتگرالی ون کارمن برای حل معادلات لایه مرزی

در حالتی که فشار ثابت باشد:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u(U-u)\,dy=\frac{\tau_w}{\rho} \quad (۱۱)$$

که در آن: $\tau_w=\mu\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}$

٦ـ٦ـ نیروهای پسا (دراگ) و برآ (لیفت)

$$F_D=C_D\frac{\rho U^2}{2}A \quad (۱۲)$$

$$F_L=C_L\frac{\rho U^2}{2}A \quad (۱۳)$$

U: سرعت جریان آزاد ρ: چگالی سیال

C_D: ضریب دراگ C_L: ضریب لیفت

٦ـ٦ـ١ـ نیروی دراگ

$$F_{D,P}=\int_A P\,dA=C_{D,P}\frac{\rho U^2}{2}A \quad (۱۴)$$

$$F_{D,F} = \int_A \tau_w dA = C_{D,F} \frac{\rho U^2}{2} A \quad (15)$$

$F_{D,P}$: دراگ فشاری یا شکلی و $F_{D,F}$: دراگ اصطکاکی یا پوسته‌ای

برای صفحه تخت :

$$C_D = \frac{1/33}{\sqrt{Re_L}} \quad \text{: جریان آرام} \quad (16)$$

$$C_D = \frac{0/074}{Re_L^{\frac{1}{5}}} \quad \text{: جریان درهم} \quad (17)$$

٦ـ٦ـ٢ـ نیروی لیفت

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{\rho U^2}{2} A} \quad \text{: ضریب لیفت} \quad (18)$$

٦ـ٧ـ جدایش

در نقطه جدایش:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0$$

٦ـ٨ـ قانون استوکس

$$F_D = 3\pi D\mu U \quad \text{: نیروی دراگ} \quad (19)$$

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad \text{: ضریب دراگ} \quad (20)$$

سرعت حد

$$U_t = \frac{gD_s^2}{18\mu}(\rho_s - \rho_f) \quad \text{یا} \quad U_t = \frac{2}{9}\frac{ga_s^2}{\mu}(\rho_s - \rho_f) \quad (21)$$

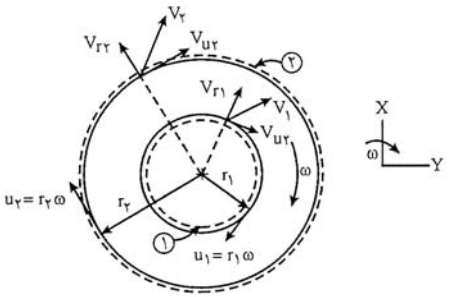
a_s: شعاع کره

فصل ۷

توربوماشین‌ها

(توجه: از فرمول های (۱) تا (۱۰) در کنکور کارشناسی ارشد سوال مطرح نمی شود)

۷ـ۱ ـ معادله اویلر برای توربوماشین‌ها



معادله اویلر:

$$T_{\text{محور}} = \dot{m}(r_2 V_{u_2} - r_1 V_{u_1}) \quad (1)$$

T : گشتاور V_{u_1} و V_{u_2} : مؤلفه‌های مماسی سرعت مطلق سیال گذرنده از سطح کنترل

توان توربوماشین:

$$\dot{W}_m = \omega T_{\text{محور}} = \omega\dot{m}(r_2 V_{u_2} - r_1 V_{u_1}) \quad (2)$$

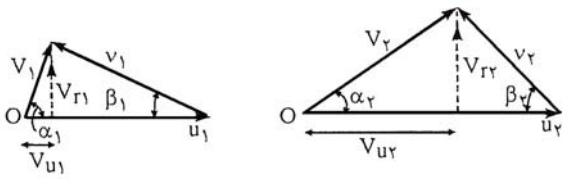
$$\dot{W}_m = \dot{m}(u_2 V_{u_2} - u_1 V_{u_1}) \quad (3)$$

u : سرعت مماسی روتور در شعاع r

هد توربوماشین در حالت جریان پایا و یکنواخت:

$$H = \frac{\dot{W}_m}{\dot{m}g} = \frac{1}{g}(u_2 V_{u_2} - u_1 V_{u_1}) \quad (4)$$

مثلث‌های سرعت اویلر و روابط مربوطه



خروجی ورودی

V : سرعت مطلق سیال

v : سرعت نسبی سیال نسبت به پره

u : سرعت محیطی پره

V_u : مؤلفه مماسی سرعت مطلق سیال

V_r : مؤلفه سرعت مطلق سیال در امتداد عمود بر V_u

α : زاویه V با u

β : زاویه v با $-u$

b : عرض پره

$$V_{u_1} = u_1 - V_{r_1}\cot\beta_1 \quad , \quad V_{u_2} = u_1 - V_{r_2}\cot\beta_2 \tag{۵}$$

$$Q = 2\pi r_1 b_1 V_{r_1} = 2\pi r_2 b_2 V_{r_2} \tag{۶}$$

$$\tan\alpha_1 = \frac{V_{r_1}}{V_{u_1}} \quad , \quad \tan\alpha_2 = \frac{V_{r_2}}{V_{u_2}} \tag{۷}$$

$$\frac{gH}{u_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}\left(1 - \frac{V_{r_1}}{u_1}\cot\beta_1\right) - \left(1 - \frac{V_{r_2}}{u_2}\cot\beta_2\right) \tag{۸}$$

شرایط طراحی برای پمپ: $\alpha_1 = 90^\circ$ و در نتیجه: $V_{r_1} = V_1$ و $V_{u_1} = 0$

$$\left|\frac{Hg}{u_2^2}\right| = 1 - \frac{V_{r_2}}{u_2}\cot\beta_2 \tag{۹}$$

شرایط طراحی برای توربین: $\alpha_2 = 90^\circ$ و در نتیجه: $V_{r_2} = V_2$ و $V_{u_2} = 0$

$$\left|\frac{Hg}{u_1^2}\right| = 1 - \frac{V_{r_1}}{u_1}\cot\beta_1 \tag{۱۰}$$

رابطه بین H و Q برای یک پمپ:

$$H = \frac{u_2^2}{g} - \frac{u_2 Q\cot\beta_2}{2\pi r_2 b_2 g}$$

۷ـ۲ـ راندمان توربوماشین‌ها

$$\text{توان هیدرولیکی} : P_f = \dot{m}\frac{\Delta P}{\rho} = \dot{m}gH = \rho gQH = \gamma QH \tag{۱۱}$$

$$\text{توان مکانیکی} : P_m = T\omega \tag{۱۲}$$

راندمان پمپ:

$$\eta_P = \frac{P_f}{P_m} = \frac{\gamma QH_P}{\omega T} \tag{۱۳}$$

راندمان توربین:

$$\eta_T = \frac{P_m}{P_f} = \frac{\omega T}{\gamma QH_T} \tag{۱۴}$$

۷ـ۳ـ آنالیز ابعادی و تشابه در توربوماشین‌ها

چهار گروه بی‌بعد حاصل شده عبارتند از:

$$R = \frac{\rho N D^2}{\mu} \qquad \text{عدد رینولدز} \qquad (۱۵)$$

$$C_P = \frac{P}{\rho N^3 D^5} \qquad \text{ضریب توان} \qquad (۱۶)$$

$$C_Q = \frac{Q}{N D^3} \qquad \text{ضریب دبی} \qquad (۱۷)$$

$$C_H = \frac{gH}{N^2 D^2} \qquad \text{ضریب هد} \qquad (۱۸)$$

با ترکیب گروه‌های بی‌بعد فوق:

$$\frac{C_H C_Q}{C_P} = \frac{\gamma Q H}{P} = \eta_P \qquad (۱۹)$$

$$\frac{C_P}{C_H C_Q} = \frac{P}{\gamma Q H} = \eta_T \qquad (۲۰)$$

هرگاه دو پمپ ۱ و ۲ دارای تشابه هندسی باشند :

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{N_2}{N_1}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 \qquad (۲۱)$$

$$\frac{H_2}{H_1} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 \qquad (۲۲)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^3\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^5 \qquad (۲۳)$$

تغییرات راندمان را با اندازه:

$$\frac{1-\eta_2}{1-\eta_1} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{\frac{1}{4}} \qquad (۲۴)$$

۷ـ٤ـ کاویتاسیون

$$\sigma = \frac{P - P_v}{\rho V^2 / 2} \qquad (۲۵)$$

P : فشار مطلق در نقطه مربوطه P_v : فشار بخار مایع ρ : چگالی مایع V : سرعت مرجع

۷ـ٦ـ هد خالص مکش مثبت (NPSH)

$$NPSH = \frac{P_i}{\gamma} + \frac{V_i^2}{2g} - \frac{P_v}{\gamma} \qquad (۲۶)$$

اگر بخش ورودی پمپ در ارتفاع z_i و بالاتر از منبعی با سطح آزاد در فشار P_a باشد

$$NPSH_A = \frac{P_a - P_v}{\gamma} - z_i - h_L \quad (۲۷)$$

h_L: تلفات حاصل بین منبع ورودی پمپ است.

برای دو پمپ دارای تشابه هندسی:

$$\frac{NPSH_۲}{NPSH_۱} = \frac{H_۲}{H_۱} = \left(\frac{N_۲}{N_۱}\right)^۲ \left(\frac{D_۲}{D_۱}\right)^۲ \quad (۲۸)$$

۷ـ۵ـ اتصال موازی و سری پمپ‌ها

الف) اتصال موازی:

$$h_t = h_۱ = h_۲ \quad (۲۹)$$

$$Q_t = Q_۱ + Q_۲ \quad (۳۰)$$

ب) اتصال سری:

$$h_t = h_۱ + h_۲ \quad (۳۱)$$

$$Q_t = Q_۱ + Q_۲ \quad (۳۲)$$

۷ـ۶ـ سرعت ویژه

$$N_s = \frac{NQ^{\frac{۱}{۲}}}{H^{\frac{۳}{۴}}} \quad (۳۳)$$

فصل ۸

جریان‌های تراکم‌پذیر

۸ـ۱ ـ مقدمه

سرعت صوت:

$$C^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = k\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T \quad (۱)$$

k : نسبت گرماهای ویژه سیال.

برای گاز ایده‌آل:

$$C = \sqrt{kRT} \quad (۲)$$

☼ **نکته:** سرعت انتقال صوت در: گازها< مایعات < جامدات

براساس ضریب کشسانی حجمی:

$$C = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}} \quad (۳)$$

عدد ماخ:

$$M = \frac{V}{C} \quad (۴)$$

V : سرعت واقعی سیال یا سرعت یک جسم در سیال ساکن

C : سرعت صوت در همان سیال

۸ـ۲ ـ فرایند ایزنتروپیک

۸ـ۲ـ۱ ـ مقدمه

اگر سیال گاز ایده‌آل باشد :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (۵)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{k-1} \quad (۶)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{k} \quad (۷)$$

۸ـ۲ـ۲ـ اثر تغییر سطح مقطع در جریان‌های ایزنتروپیك یك‌بعدی

$$\frac{dA}{A}=\frac{dV}{V}(M^{۲}-۱) \qquad (۸)$$

$$\frac{dP}{\rho V^{۲}}(۱-M^{۲})=\frac{dA}{A} \qquad (۹)$$

$$\frac{dT}{T}=\frac{(k-۱)M^{۲}}{۱-M^{۲}}\frac{dA}{A} \qquad (۱۰)$$

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{M^{۲}}{۱-M^{۲}}\frac{dA}{A} \qquad (۱۱)$$

۸ـ۲ـ۳ـ خواص سکون

$$h+\frac{V^{۲}}{۲}=h_{۰} \qquad (۱۲)$$

برای گاز ایده‌آل:

$$T_{۰}=T+\frac{V^{۲}}{۲C_{p}} \qquad (۱۳)$$

۸ـ۲ـ٤ـ روابط مربوط به جریان ایزنتروپیك گاز ایده‌آل

$$\frac{T_{۰}}{T}=۱+\left(\frac{k-۱}{۲}\right)M^{۲} \qquad (۱۴)$$

$$\frac{P_{۰}}{P}=\left[۱+\left(\frac{k-۱}{۲}\right)M^{۲}\right]^{\frac{k}{k-۱}} \qquad (۱۵)$$

$$\frac{\rho_{۰}}{\rho}=\left[۱+\left(\frac{k-۱}{۲}\right)M^{۲}\right]^{\frac{۱}{k-۱}} \qquad (۱۶)$$

روابط بین خواص بحرانی (خواص سیال در گلوگاه که $M=۱$ است) و خواص سکون :

$$\frac{T^{*}}{T_{۰}}=\frac{۲}{k+۱} \qquad (۱۷)$$

$$\frac{P^{*}}{P_{۰}}=\left(\frac{۲}{k+۱}\right)^{\frac{k}{k-۱}} \qquad (۱۸)$$

$$\frac{\rho^{*}}{\rho_{۰}}=\left(\frac{۲}{k+۱}\right)^{\frac{۱}{k-۱}} \qquad (۱۹)$$

۸ـ۳ـ حالت خفگی

$$\dot{m}_{max}\propto\frac{P_{۰}A^{*}}{\sqrt{T_{۰}}}$$

۸ـ٤ـ جریان آدیاباتیك همراه با اصطكاك در یك كانال با مقطع یكنواخت

خاصیت	جریان مادون صوت	جریان مافوق صوت
سرعت V	افزایش می‌یابد	كاهش می‌یابد
عدد ماخ M	افزایش می‌یابد	كاهش می‌یابد
فشار P	كاهش می‌یابد	افزایش می‌یابد
دما T	كاهش می‌یابد	افزایش می‌یابد
چگالی ρ	كاهش می‌یابد	افزایش می‌یابد
آنتالپی سكون h_0	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند
آنتروپی s	افزایش می‌یابد	افزایش می‌یابد

۸ـ٥ـ جریان همدما همراه با اصطكاك

$$\frac{f}{D}L_{max} = \frac{1-kM^2}{kM^2} + \ln(kM^2) \qquad (20)$$

خاصیت	$M < 1/\sqrt{k}$	$M > 1/\sqrt{k}$
فشار P	كاهش می‌یابد	افزایش می‌یابد
چگالی ρ	كاهش می‌یابد	افزایش می‌یابد
سرعت V	افزایش می‌یابد	كاهش می‌یابد
عدد ماخ M	افزایش می‌یابد	كاهش می‌یابد
دمای سكون T_0	افزایش می‌یابد	كاهش می‌یابد
فشار سكون P_0	كاهش می‌یابد	اگر $M < \sqrt{2}/(k+1)$ باشد افزایش می‌یابد اگر $M > \sqrt{2}/(k+1)$ باشد كاهش می‌یابد

فصل ۹

جریان در بسترهای پرشده

۹ـ۱ـ تعاریف

ضریب تخلخل (ε):

$$\varepsilon = \frac{V_e}{V_t} \quad (۱)$$

سطح ویژه (a_p):

برای پرکن‌های کروی:

$$a_p = \frac{۶(۱-\varepsilon)}{d_p} \quad (۲)$$

d_p: قطر پرکن

شعاع هیدرولیکی:

$$r_H = \frac{\varepsilon}{a} \quad (۳)$$

برای پرکن‌های کروی:

$$r_H = \frac{\varepsilon}{۶(۱-\varepsilon)} d_p \quad (۴)$$

سرعت ظاهری و سرعت واقعی سیال:

$$\text{سرعت ظاهری}: V_s = \frac{Q}{A} \quad (۵)$$

$$\text{سرعت واقعی}: V_b = \frac{V_s}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon A} \quad (۶)$$

A: سطح مقطع برج خالی

Q: دبی حجمی سیال در بستر خالی

ضریب شکل:

$$a = \frac{۶(۱-\varepsilon)}{\phi_s d_p} \quad (۷)$$

برای کره: $\phi_s = ۱$

۹ـ۲ـ رابطه افت فشار با سرعت

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{۱۵۰\mu(۱-\varepsilon)^{۲} V}{\varepsilon^{۳} d_p^{۲}} \quad \text{: جریان آرام سیال} \qquad (۸)$$

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{۱/۷۵(۱-\varepsilon)\rho V^{۲}}{\varepsilon^{۳} d_p} \quad \text{: جریان درهم سیال} \qquad (۹)$$

در بستر سیال شده:

$$\frac{\Delta P}{L_{mf}} = (۱-\varepsilon_{mf})(\rho_p - \rho) g \qquad (۱۰)$$

ε_{mf}: تخلخل در شروع سیال شدن

L: طول بستر در شروع سیال شدن