

تمرینات ترکیبیات

- تمرین‌های شماره ۴ و ۷ تحویلی هستند.
- ۱۴ مرداد قبل از شروع کلاس ترکیبیات، تمرینات تحویلی این سری توسط سپهر دادخواه^۱ جمع می‌شود.
- در صورتی که به پاسخ درست یک سوال نرسیدید، همان حاصل تلاش‌تان و نتایجی که به دست آورده‌اید را بنویسید؛ اما هرگز تقلب نکنید. هرگونه تقلب باعث افتادن در درس و (احتمالاً) محرومیت از مدال می‌شود. هم‌چنین این نکته را مد نظر داشته باشید که تمرینات با ارفاق تصحیح می‌شوند.

احتمال

۱. سه نفر با هم به نوبت بازی می‌کنند. هر کس در نوبت خود یک تاس می‌اندازد. اولین کسی که تاس‌ش برابر ۶ آمد می‌برد. به چه احتمالی نفر دوم می‌برد؟
۲. یک تاس با ۲۰ وجه (با اعداد ۱, ۲, ..., ۲۰) و سه تاس عادی (با ۶ وجه) داریم. این تاس‌ها را می‌اندازیم. به چه احتمالی عدد روی تاس ۲۰- وجهی از مجموع اعداد تاس‌های عادی بیش‌تر است؟
۳. مرتب یک عدد تصادفی از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4\}$ انتخاب می‌کنیم. کار وقتی تمام می‌شود که مجموع دو عدد آخر انتخاب شده، عددی اول شود. به چه احتمالی آخرین عدد انتخاب شده برابر ۱ است؟
۴. یک مسابقه‌ی یک-نفره با ۱۳۹۴ مرحله در حال برگزاری است. در هر مرحله به شرکت‌کننده یک توپ داده می‌شود که قرمز یا آبی (به طور تصادفی) است؛ سپس شرکت‌کننده باید تصمیم بگیرد که توپ را نگه دارد یا دور بیندازد (توجه کنید این تصمیم را در همان مرحله، قبل از دیدن توپ‌های بعدی می‌بیند). در انتها اگر شرکت‌کننده r توپ قرمز و b توپ آبی داشته باشد؛ در صورتی می‌برد که $3r - 2b = 1$ باشد. به‌ترین استراتژی ممکن برای شرکت‌کننده، به چه احتمالی او را برنده می‌کند؟
۵. در ابتدا عدد ۱۲۱ را داریم. در هر مرحله رقم وسط با یکی از دو رقم کناری (به طور تصادفی) جابه‌جا می‌شود. به چه احتمالی پس از ۱۰ مرحله، رقم وسط برابر ۲ است؟

^۱نماینده‌ی کلاس

تمرینات ترکیبیات

۶. 2^7 نفر با شماره‌های $1, 2, \dots, 2^7$ به ترتیب دور یک دایره هستند. یک بازی در 7 راند برگزار می‌شود. در هر راند، یکی از افراد دور دایره به طور تصادفی انتخاب می‌شود؛ سپس افراد با شروع از او در جهت ساعت‌گرد دوتا دوتا جفت می‌شوند و با هم می‌اندازند و هر کس به احتمال $\frac{1}{4}$ می‌برد. به این ترتیب نیمی از افراد در هر راند می‌بازند و از دایره خارج می‌شوند. ابوالفضل و سلطان افراد شماره 1 و 64 هستند. به چه احتمالی این دو نفر در فینال با هم روبه‌رو می‌شوند؟

۷. در ابتدا عدد 2015 را داریم. در هر مرحله اگر عدد n را داشته باشیم، عدد ما به احتمال برابر به یکی از اعداد $1, 2, \dots, n-1$ تبدیل می‌شود. وقتی به عدد 0 برسیم، کار تمام می‌شود. به چه احتمالی تمام اعداد $1, 10, 100, 1000$ در طی مراحل دیده خواهند شد؟

موفق باشید

— اسدی