«به نام خدا»

آخرین ویرایش: ۲۷ اسفند ۹۳

فصل ۱ : معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول

نوع معادله	صورت معادله	توضیحات
جداشدنی(تفکیک‌پذیر)	$y' = \frac{f(x)}{g(y)},$ یا $M(x)dx + N(y)dy = \cdot$	معادله را به صورت $f(x)dx = g(y)dy$ درآورده و سپس از طرفین آن انتگرال‌گیری می‌کنیم.
قابل تبدیل به جداشدنی	$y' = f(ax + by + c), \quad b \neq \cdot$ $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right), \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' = \cdot$	این دو نوع معادله با تغییر متغیر $\boxed{v = ax + by + k}$ که در آن k عدد حقیقی دلخواهی است، **قابل تبدیل به معادله دیفرانسیل جداشدنی بوده** و در آن داریم: $\boxed{v' = a + by'}$
همگن	$y' = f(x, y)$ یا $M(x, y)dx + N(x, y)dy = \cdot$	در این معادله $f(x, y)$ تابع همگن از درجهٔ صفر و توابع $M(x, y)$ و $N(x, y)$ همگن از درجهٔ یکسانند. منظور از تابع همگن درجهٔ n، تابعی است که برای هر t در آن داریم: $\boxed{f(tx, ty) = t^n f(x, y)}$ با تغییر متغیر $\boxed{y = vx}$ و در نتیجه $\boxed{y' = v'x + v}$ به صورت جداشدنی درمی‌آید.
قابل تبدیل به همگن	$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right), \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' \neq \cdot$	اگر نقطهٔ $(x_\cdot, y_\cdot)$ محل تقاطع دو خط $\begin{cases} ax + by + c = \cdot \\ a'x + b'y + c' = \cdot \end{cases}$ باشد، با تغییر متغیر $\boxed{\begin{cases} y = Y + y_\cdot \\ x = X + x_\cdot \end{cases}}$، **قابل تبدیل به معادله دیفرانسیل همگن** زیر می‌باشد: $\boxed{Y' = \frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right)}$
معادله دیفرانسیل کامل	$M\,dx + N\,dy = \cdot, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$	ابتدا $\boxed{f(x, y) = \int M\,dx + g(y)}$ قرار داده و سپس از تساوی $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = N}$ مقدار $g(y)$ را محاسبه می‌کنیم. و یا ابتدا $\boxed{f(x, y) = \int N\,dy + g(x)}$ قرار داده و سپس از تساوی $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = M}$ مقدار $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم.
خطی مرتبهٔ اول	$y' + p(x)y = q(x)$	تابع $\boxed{u = e^{\int p(x)\,dx}}$، عامل انتگرال‌ساز معادله بوده و جواب آن به صورت زیر است: $y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(\int e^{\int p(x)\,dx} \cdot q(x)dx + c\right)$
معادلهٔ برنولی	$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \neq \cdot, ۱$	با تغییر متغیر $z = y^{۱-n}$ به شکل خطی مرتبهٔ اول زیر درمی‌آید: $\boxed{z' + (۱ - n)p(x)z = (۱ - n)q(x)}$
معادلهٔ کلرو	$y = xy' + f(y')$	با جایگذاری $\boxed{y' = c}$، جواب $\boxed{y = cx + f(c)}$ حاصل می‌شود.
معادلهٔ ریکاتی	$y' = f(x) + g(x)y + h(x)y^۲$	اگر $y_۱(x)$ جواب خاص معادله باشد، با جایگذاری $\boxed{y = y_۱ + \frac{۱}{u}}$ و در نتیجه $\boxed{y' = y_۱' - \frac{u'}{u^۲}}$ به شکل خطی مرتبهٔ اول درمی‌آید.

نکته ۱-۱: جهت محاسبهٔ معادله دیفرانسیل متناظر با دستهٔ منحنی‌های $f(x, y, c) = \cdot$، باید از این دستهٔ منحنی‌ها به گونه‌ای مشتق‌گیری نمود که پارامتر c حذف شود. همچنین جهت محاسبهٔ معادله دیفرانسیل دستهٔ منحنی‌های **متعامد**، پس از مشتق‌گیری به جای y'، مقدار $\frac{-۱}{y'}$ و به جای $\frac{rd\theta}{dr}$، مقدار $\frac{-dr}{rd\theta}$ را جایگذاری می‌کنیم.

نکته ۱-۲: منحنی $y=\phi(x)$ را **پوش دستهٔ منحنی‌های** $f(x,y,c)=0$ می‌نامیم، هرگاه با هر منحنی از این خانواده در حداقل یک نقطه مماس باشد. منحنی پوش از حذف پارامتر c در دستگاه $\boxed{\begin{cases} f(x,y,c)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial c}(x,y,c)=0 \end{cases}}$ حاصل می‌شود. پوش دسته منحنی‌ها در واقع به نوعی جواب منفرد (غیرعادی) است.

نکتهٔ ۱-۳: اگر معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$، کامل نباشد، در چهار حالت زیر، عامل انتگرال‌ساز $u=u(x,y)$ را داریم:

شرط وجود عامل انتگرال‌ساز	عامل انتگرال‌ساز
$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=p(x)$	$u=e^{\int p(x)\,dx}$
$\frac{1}{-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=q(y)$	$u=e^{\int q(y)\,dy}$
$\frac{1}{Ny-Mx}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=p(z),\quad z=xy$	$u=e^{\int p(z)\,dz}$
$\frac{1}{N-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=q(z),\quad z=x+y$	$u=e^{\int q(z)\,dz}$

نکتهٔ ۱-٤: گاهی اوقات معادله دیفرانسیل غیرکامل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$، دارای عامل انتگرال‌ساز $u=x^m y^n$ بوده که در آن مقادیر مجهول m و n ثابت‌های مناسبی هستند. این حالت معمولا زمانی که توابع M و N گویا و بویژه چندجمله‌ای باشند، رخ می‌دهد.

فصل ۲: معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم

نکته ۲-۱ (روش کاهش مرتبه): هر معادله به صورت $F(x,y',y'')=0$ را **مرتبهٔ دوم فاقد y** می‌نامیم، که با جایگذاری $p=y'$ به صورت معادلهٔ مرتبهٔ اول $\boxed{F\left(x,p,p'=\frac{dp}{dx}\right)=0}$ در می‌آید. همچنین هر معادله به صورت $F(y,y',y'')=0$ را **مرتبهٔ دوم فاقد x** می‌نامیم، که با جایگذاری $p=y'$ به صورت معادلهٔ مرتبهٔ اول $\boxed{F\left(y,p,p\frac{dp}{dy}\right)=0}$ در می‌آید.

نکتهٔ ۲-۲ (جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت همگن $ay''+by'+c=0$):

الف) ابتدا معادلهٔ کمکی(مفسر، شاخصی) $aD^2+bD+c=0$ را حل کرده و ریشه‌های آن یعنی m_1 و m_2 را محاسبه می‌کنیم.

ب) با توجه به علامت $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$، سه حالت و سه جواب عمومی زیر رخ می‌دهد:

Δ	نوع ریشه‌ها	جواب عمومی
$\Delta>0$	معادلهٔ کمکی دو ریشهٔ حقیقی و متمایز m_1 و m_2 دارد.	$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}$
$\Delta=0$	معادلهٔ کمکی ریشهٔ مضاعف $m_1=m_2=m$ دارد.	$y=c_1e^{mx}+c_2x\,e^{mx}=(c_1+c_2x)e^{mx}$
$\Delta<0$	معادلهٔ کمکی دو ریشهٔ مختلط $\alpha\pm i\beta$ دارد.	$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

نکتهٔ ۲-۳: اگر $y_1(x)$ یک جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن $\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=0}$ باشد، با انتخاب $\boxed{y_2(x)=v(x)y_1(x)}$ و جایگذاری آن در معادله می‌توان تابع $y_2(x)$ را محاسبه کرد. در این حالت $\boxed{v=\int\left(\frac{1}{y_1^2}e^{(-\int p(x)dx)}\right)dx}$ و جواب عمومی برابر $\boxed{y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)}$ می‌شود.

نکتهٔ ۲-٤: منظور از **معادلهٔ کشی-اویلر (معادلهٔ همبُعد یا نقص بعد)** مرتبهٔ n-اُم همگن، معادله دیفرانسیل خطی به صورت زیر است:

$$(x-c)^n y^{(n)}+a_{n-1}(x-c)^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x-c)y'+a_0y=0$$

بویژه در حالت مرتبهٔ دوم به صورت $\boxed{(x-c)^2y''+a(x-c)y'+by=0}$ درمی‌آید. این معادله با تغییر متغیر $\boxed{x-c=e^t}$ به صورت خطی با ضرایب ثابت نسبت به متغیر t درمی‌آید. بویژه در حالت مرتبهٔ دوم به صورت زیر درمی‌آید:

$$(D^2+(a-1)D+b)Y(t)=0,\qquad D=\frac{d}{dt}$$

در حالت مراتب بالاتر، با تغییر متغیر $\boxed{x-c=e^t}$ کافی است جایگذاری $\boxed{(x-c)^n y^{(n)}=D(D-1)\cdots(D-n+1)Y(t)}$ انجام شود.

تعریف: منظور از رونسکین(ورونسکی) توابع y_1، y_2، . . . ، y_n که با W و یا $W(y_1,\dots,y_n)$ نشان داده می‌شود، دترمینان زیر است:

$$w(y_۱,\dots,y_n)=\begin{vmatrix} y_۱ & y_۲ & \cdots & y_n \\ y_۱' & y_۲' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_۱^{(n-۱)} & y_۲^{(n-۱)} & \cdots & y_n^{(n-۱)} \end{vmatrix}$$

توابع $y_۱$، $y_۲$، . . . ، y_n مستقل خطی‌اند، اگر و تنها اگر $w\neq ۰$ باشد.

حال به دو روش متداول برای حل معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن اشاره می‌کنیم:
(۱) روش تغییر پارامتر
(۲) روش ضرایب نامعین

نکتهٔ ۲-۵(روش تغییر پارامتر): در این روش ابتدا جواب عمومی معادلهٔ همگن یعنی y_c را محاسبه می‌کنیم.

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مرتبهٔ دوم $\boxed{y''+ay'+by=f(x)}$، اگر $y_c=c_۱y_۱+c_۲y_۲$ و w رونسکین $y_۱$ و $y_۲$ باشد، برابر است با:

$$\boxed{y_p=-y_۱\int\frac{f(x)y_۲}{w}dx+y_۲\int\frac{f(x)y_۱}{w}dx}$$

همچنین جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مرتبهٔ n-اُم $\boxed{a_ny^{(n)}+a_{n-۱}y^{(n-۱)}+\cdots+a_۱y'+a_۰=f(x)}$، اگر $y_c=c_۱y_۱+\cdots+c_ny_n$ و w رونسکین توابع $y_۱$، $y_۲$، . . . ، y_n باشد، برابر است با:

$$\boxed{y_p=\sum_{i=۱}^{n}y_i\int\frac{f(x)w_i}{w}dx}$$

که در آن w_i از جایگذاری بردار ستونی $\begin{pmatrix}۰\\ \vdots\\ ۰\\ ۱\end{pmatrix}$ در ستون i-اُم w حاصل می‌شود. در نهایت جواب معادله برابر $\boxed{y=y_c+y_p}$ است.

نکتهٔ ۲-۶(روش ضرایب نامعین): در این روش ابتدا جواب عمومی معادلهٔ همگن یعنی $\boxed{y_c=c_۱y_۱+\cdots+c_ny_n}$ را محاسبه می‌کنیم. حال جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت مرتبهٔ n-اُم $\boxed{a_ny^{(n)}+a_{n-۱}y^{(n-۱)}+\cdots+a_۱y'+a_۰=f(x)}$، در صورتی که $\boxed{f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x]}$ و نیز $P_m(x)$ و $Q_n(x)$ به ترتیب چندجمله‌ای‌های درجهٔ m و n باشند، برابر است با:

$$\boxed{y_p=x^se^{\alpha x}[P_k(x)\cos\beta x+Q_k(x)\sin\beta x]}$$

که در آن $k=\max\{m,n\}$ و نیز s مرتبهٔ تکرار ریشهٔ $\alpha+\beta i$ در معادلهٔ کمکی معادله است.

نکتهٔ ۲-۷: **معادلات کشی-اویلر ناهمگن** را می‌توان پس از تغییر متغیر $\boxed{x-c=e^t}$ به کمک روش تغییر پارامتر و یا ضرایب نامعین حل نمود.

فصل ۳: حل معادله دیفرانسیل به روش سری‌ها

هر سری به صورت $\sum_{n=۰}^{\infty}a_n(x-x_۰)^n$ را سری توانی به مرکز $x_۰$ می‌نامیم. سری $f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_۰)}{n!}(x-x_۰)^n$ را بسط تیلور $f(x)$ حول $x_۰$ می‌نامیم.
اگر در این سری تیلور، $x_۰=۰$ باشد، آن را بسط مکلورن تابع $f(x)$ می‌نامیم. در زیر به بسط مکلورن برخی توابع اشاره شده است:

$e^x=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \lvert x\rvert<\infty$	$\sinh x=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!},\quad \lvert x\rvert<\infty$	$\cosh x=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۲n}}{(۲n)!},\quad \lvert x\rvert<\infty$
$\frac{۱}{۱-x}=\sum_{n=۰}^{\infty}x^n,\quad \lvert x\rvert<۱$	$\sin x=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^nx^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!},\quad \lvert x\rvert<\infty$	$\cos x=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^nx^{۲n}}{(۲n)!},\quad \lvert x\rvert<\infty$

اگر سری تیلور $f(x)$ حول $x_۰$ یعنی $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_۰)}{n!}(x-x_۰)^n$، در یک همسایگی از $x_۰$ مانند $(x_۰-R,x_۰+R)$ موجود و به $f(x)$ همگرا باشد، تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x_۰$ تحلیلی می‌نامیم. نقطهٔ $x_۰$ را نقطهٔ معمولی(عادی) معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n-اُم زیر می‌نامیم، اگر ضرایب $f_i(x)$ و $g(x)$ در $x_۰$ تحلیلی باشند:

$$y^{(n)}+f_{n-۱}(x)y^{(n-۱)}+\cdots+f_۱(x)y'+f_۰(x)y=۰$$

نقطه‌ای که معمولی نباشد، منفرد(غیرعادی، تکین) نامیده می‌شود.

نکتهٔ ۳-۱(جواب سری معادلات دیفرانسیل در نقاط عادی): هر معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبهٔ n-اُم، حول نقطهٔ عادی x_0 دارای جوابی به صورت سری توانی $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ است، که در آن باید ضرایب a_n را به صورت زیر محاسبه نمود:

الف) اگر $x_0 \neq 0$ است، با استفاده از تغییر متغیر $t=x-x_0$ سری را به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ درآورده و معادله را برحسب متغیر t بازنویسی کنید.

ب) مشتقات سری توانی را تا مرتبهٔ n-اُم محاسبه نموده و در معادله دیفرانسیل خطی داده شده قرار دهید:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\,,\qquad y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}\,,\qquad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}\,,\qquad \cdots$$

پ) با بازی با اندیس سری‌های توانی در معادله دیفرانسیل، توان‌های $t=(x-x_0)$ در همهٔ سری‌ها را یکسان کنید.

ت) از بالاترین اندیس پایین سری‌های توانی فاکتورگیری نموده و معادله را بر حسب توان‌های مختلف $t=(x-x_0)$ مرتب نمایید.

ث) در صورت وجود توابعی به غیر از چندجمله‌ای در طرف راست معادله سری توانی آن را نوشته و سپس بر اساس تساوی ضرایب توان‌های مختلف $t=(x-x_0)$ در طرفین معادله به مجموعه‌ای از معادلات، بویژه یک معادلهٔ بازگشتی می‌رسید.

ج) به کمک معادله بازگشتی به دست آمده در قسمت قبلی، ضرایب a_n را بر حسب ضرایبی با کمترین اندیس، همچون a_0 و a_1، محاسبه کنید.

تعاریف: اگر x_0 نقطهٔ منفرد(تکین، غیرعادی) معادله دیفرانسیل خطی همگن $y''+p(x)y'+q(x)=0$ باشد و توابع $(x-x_0)p(x)$ و $(x-x_0)^2q(x)$ در آن تحلیلی باشند، x_0 را نقطهٔ منفرد منظّم نامیده و در غیر این صورت آن را منفرد غیرمنظّم می‌نامیم.

هر سری به صورت $y=(x-x_0)^s\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ را که در آن s عددی حقیقی و یا مختلط است، سری فروبنیوس می‌نامند.

نکتهٔ ۳-۲(جواب سری معادلات دیفرانسیل در نقاط منفرد منظّم): هر معادله دیفرانسیل خطی همگن $y''+p(x)y'+q(x)=0$، حول نقطهٔ منفرد منظّم x_0 دارای جوابی به صورت سری فروبنیوس $y=(x-x_0)^s\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ است، که در آن باید ضرایب a_n را به صورت زیر محاسبه نمود:

الف) ابتدا پس از بررسی منفرد منظّم بودن نقطهٔ x_0، حدود زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$p_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x)\,,\qquad q_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2q(x)$$

ب) معادله دارای معادلهٔ شاخص $\boxed{s^2+(p_0-1)s+q_0=0}$ بوده، که پس از تشکیل آن باید ریشه‌های آن موسوم به توان‌های شاخص s_1 و s_2 را محاسبه نمود.

پ) با توجه به توان‌های شاخص s_1 و s_2 و تفاضل آنها سه حالت زیر رخ می‌دهد:

۱. **اگر s_1-s_2 عددی غیرصحیح و ناصفر باشد**، معادله دیفرانسیل دارای دو جواب مستقل به صورت زیر است:

$$y_1(x)=(x-x_0)^{s_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\,,\qquad y_2(x)=(x-x_0)^{s_1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$$

۲. **اگر s_1-s_2 عدد صحیح مثبتی باشد**، معادله دیفرانسیل دارای دو جواب مستقل به صورت زیر است:

$$y_1(x)=(x-x_0)^{s_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\,,\qquad y_2(x)=K\,y_1(x)\ln(x-x_0)+\,(x-x_0)^{s_1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$$

۳. **اگر s_1-s_2 صفر شود، یعنی $s_1=s_2=s$ ریشهٔ مضاعف باشد**، معادله دیفرانسیل دارای دو جواب مستقل به صورت زیر است:

$$y_1(x)=(x-x_0)^{s}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\,,\qquad y_2(x)=\,y_1(x)\ln(x-x_0)+\,(x-x_0)^{s}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$$

در تمامی این حالات، ضرایب a_n، b_n و یا K از جایگذاری این جواب‌ها در معادله دیفرانسیل محاسبه می‌شوند.

تعریف: **تابع گاما** را برای $x > ۰$ به صورت $\Gamma(x) = \int_۰^\infty t^{x-۱}e^{-t}dt$ تعریف نموده، که دارای ویژگی‌های زیر است:

$\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right) = \sqrt{\pi}$	$\Gamma(۱) = ۱$	$\Gamma(n+۱) = n!$	$\Gamma(x+۱) = x\Gamma(x)$

معادله دیفرانسیل $x^۲y'' + xy' + (x^۲ - \alpha^۲)y = ۰$ را معادلهٔ بِسِل مرتبهٔ α می‌نامیم. این معادله دارای جوابی به صورت زیر است:

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^m \left(\frac{x}{۲}\right)^{۲m+\alpha}}{m!\,\Gamma(m+\alpha+۱)}$$

که تابع بِسِل نوع اول مرتبهٔ α می‌نامند. اگر α عدد مثبت ناصحیحی باشد، تابع $\boxed{Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}}$ نیز جوابی از معادلهٔ بِسِل است. اما اگر α عددی صحیح باشد، تابع زیر موسوم به تابع بِسِل نوع دوم مرتبهٔ n جوابی از معادلهٔ بِسِل است:

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha\to n} Y_\alpha(x), \qquad n = ۰,۱,۲,\ldots$$

نکتهٔ ۳-۳(جواب معادلهٔ بِسِل مرتبهٔ α): اگر α عدد ناصحیحی باشد، جواب عمومی معادلهٔ بسِل به صورت زیر در می‌آید:

$$y(x) = c_۱J_\alpha(x) + c_۲J_{-\alpha}(x)$$

و اگر $\alpha = n$ عددی صحیح باشد، جواب عمومی معادلهٔ بسِل به صورت زیر در می‌آید:

$$y(x) = c_۱J_n(x) + c_۲Y_n(x)$$

نکتهٔ ۳-۴ (ویژگی‌های تابع بِسِل نوع اول $(J_\alpha(x)$): اگر α عددی حقیقی مثبت و $n = ۰,۱,۲,\ldots$ باشد، داریم:

۱. اگر $x_۱$ و $x_۲$ دو صفر $J_n(x)$ باشند، در بازهٔ $x_۱ < x < x_۲$ صفری از $J_{n-۱}(x)$ و $J_{n+۱}(x)$ وجود دارد.

۲. تابع بِسِل $J_۰(x)$ برای هر بازه‌ای به طول π، یک صفر دارد.

۳. توابع بِسِل $J_n(x)$ در بازهٔ $(۰,\infty)$ بینهایت صفر مثبت حقیقی دارند. این توابع فقط صفرهای حقیقی داشته و نخستین صفر آنها بزرگتر از n است.

$\frac{d}{dx}\left(x^{-\alpha}J_\alpha(x)\right) = -x^{-\alpha}J_{\alpha+۱}(x)$	$\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha}J_\alpha(x)\right) = x^{\alpha}J_{\alpha-۱}(x)$	$J_{-n}(x) = (-۱)^nJ_n(x)$

فصل ٤: دستگاه معادلات دیفرانسیل

نکته ۴-۱: اگر بتوان یکی از معادلات دستگاه معادلات دیفرانسیل را مستقل از سایر معادلات حل نمود، این معادلهٔ مستقل را حل و جواب آن را در سایر معادلات قرار می‌دهیم.

نکتهٔ ٤-۲ (حل دستگاه دو معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول با ضرایب ثابت): دستگاه $\begin{cases} ۱ \\ ۲ \end{cases}$ شامل دو معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول با ضرایب ثابت را در نظر بگیرید:

۱. ابتدا از یکی از معادلات مشتقگیری نموده و معادلهٔ دوم را در آن قرار می‌دهیم. مثلاً دستگاهی به صورت $\begin{cases} ۱' + ۲ \\ ۱ \end{cases}$ و یا $\begin{cases} ۲ \\ ۲' + ۱ \end{cases}$ تشکیل می‌دهیم.

۲. حال ابتدا با ترکیب دو معادلهٔ حاصل به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم بر حسب یک متغیر رسیده و آن را حل می‌کنیم. مثلاً معادلهٔ مرتبهٔ دوم $۱ + ۲ + ۱'$ و یا $۲ + ۱ + ۲'$ را حل می‌کنیم.

۳. حال جواب این معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم را در معادله‌ای که از آن مشتق‌گیری نموده‌ایم قرار داده، تا جواب نهایی حاصل شود.

نکتهٔ ٤-۳(حل دستگاه معادلات به روش عملگرها): فرض کنید $D = \frac{d}{dt}$، عملگر مشتق‌گیری باشد، در این صورت

۱. ابتدا معادلات دستگاه را بر حسب این عملگر بازنویسی می‌کنیم.

۲. به روش حذفی گاوس دستگاه حاصل را ساده نموده و حل می‌کنیم.

لازم به ذکر است که اگر $W(D)$ دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل باشد، آنگاه تعداد پارامترها در جواب عمومی دستگاه برابر با بیشترین توان D در $W(D)$ است، مشروط بر اینکه $W(D) \neq ۰$ باشد.

فصل ۵: تبدیل لاپلاس

تعاریف: اگر تابع $f(x)$ در بازهٔ $[۰,\infty)$ تعریف شده و s عدد حقیقی نامنفی باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ را با $F(s)$ و یا $\mathcal{L}\{f(x)\}$ نمایش داده و به صورت انتگرال زیر(در صورت وجود) تعریف می‌کنیم:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \int_۰^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(x)$ باشد، آنگاه تابع $f(x)$ را تبدیل معکوس (وارون) لاپلاس تابع $F(s)$ نامیده و آن را با $\mathcal{L}^{-۱}\{F(s)\}$ نشان می‌دهیم.

اگر c عدد حقیقی نامنفی باشد، تابع $u_c(x) = \begin{cases} ۰, & ۰ \leq x < c \\ ۱, & x \geq c \end{cases}$ را تابع پله‌ای واحد و یا تابع هِوی‌ساید می‌نامیم. در برخی منابع تابع پله‌ای واحد را به صورت $u(x) = h(x) = \begin{cases} ۰, & x < ۰ \\ ۱, & x \geq ۰ \end{cases}$ تعریف نموده و به کمک آن تساوی $u_c(x) = u(x-c)$ را داریم.

کانولوشِن یا پیچش دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را با نماد $(f*g)(x)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f*g)(x) = \int_۰^x f(x-t)g(t)dt = \int_۰^x g(x-t)f(t)dt$$

با فرض آنکه $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$، $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$، n عددی طبیعی، c و α اعداد حقیقی نامنفی و $c_۱$ و $c_۲$ ثابت‌هایی حقیقی باشند، روابط زیر را داریم:

$\mathcal{L}\{c_۱ f(x) + c_۲ g(x)\} = c_۱\mathcal{L}\{f(x)\} + c_۲\mathcal{L}\{g(x)\}$	$\mathcal{L}\{x^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+۱}}, \quad s > ۰$	$\mathcal{L}\{x^\alpha\} = \dfrac{\Gamma(\alpha+۱)}{s^{\alpha+۱}}, \quad s > ۰$
$\mathcal{L}^{-۱}\{c_۱ F(s) + c_۲ G(s)\} = c_۱\mathcal{L}^{-۱}\{F(s)\} + c_۲\mathcal{L}^{-۱}\{G(s)\}$	$\mathcal{L}\{\sin\alpha x\} = \dfrac{\alpha}{s^۲+\alpha^۲}, \quad \|s\| < \alpha$	$\mathcal{L}\{\sinh\alpha x\} = \dfrac{\alpha}{s^۲-\alpha^۲}, \|s\| > \alpha$
$\mathcal{L}\{e^{\alpha x} f(x)\} = F(s-\alpha), \quad s > \alpha$	$\mathcal{L}\{\cos\alpha x\} = \dfrac{s}{s^۲+\alpha^۲}, \|s\| < \alpha$	$\mathcal{L}\left\{x^{-\frac{۱}{۲}}\right\} = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}}, \quad s > ۰$
$\mathcal{L}\{u_c(x) f(x-c)\} = e^{-cs}F(s), \quad s > ۰$	$\mathcal{L}\{\cosh\alpha x\} = \dfrac{s}{s^۲-\alpha^۲}, \|s\| > \alpha$	$\mathcal{L}\{f*g\} = F(s)G(s)$
$\mathcal{L}\{y^{(n)}\} = s^n\mathcal{L}\{y\} - s^{n-۱}y(۰) - \cdots - y^{(n-۱)}(۰)$	$\mathcal{L}\{y''\} = s^۲\mathcal{L}\{y\} - sy(۰) - y'(۰)$	$\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(۰)$
$\mathcal{L}\{f(cx)\} = \dfrac{۱}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right)$ $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(x)}{x}\right\} = \int_s^\infty F(t)dt$	$\mathcal{L}\left\{\int_۰^x f(t)dt\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$	$\mathcal{L}\{x^n f(x)\} = (-۱)^n \dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$

نکته ۵-۱: جهت محاسبهٔ تبدیل لاپلاس توابع چندضابطه‌ای همچون $f(x) = \begin{cases} f_۰(x), & ۰ \leq x < c_۰ \\ f_۱(x), & c_۰ \leq x \leq c_۱ \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x), & x \geq c_n \end{cases}$، از تابع پله‌ای واحد به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = \big(۱ - u_{c_۰}(x)\big)f_۰(x) + \big(u_{c_۰}(x) - u_{c_۱}(x)\big)f_۱(x) + \big(u_{c_۱}(x) - u_{c_۲}(x)\big)f_۲(x) + \cdots + u_{c_n}(x)f_n(x)$$

$$= f_۰(x) + \big(f_۱(x) - f_۰(x)\big)u_{c_۰}(x) + \big(f_۲(x) - f_۱(x)\big)u_{c_۱}(x) + u_{c_n}(x)f_n(x)$$

نکتهٔ ۵-۲: جهت محاسبهٔ تبدیل معکوس توابع می‌توان از تکنیک‌های انتگرال‌گیری، بویژه روش تجزیهٔ کسرها استفاده نمود.

نکتهٔ ۵-۳(حل معادلات دیفرانسیل خطی با شرایط اولیه به‌کمک تبدیل لاپلاس):

۱. ابتدا با فرض آنکه $\mathcal{L}\{y(x)\} = Y(s)$ است، از معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

۲. با جایگذاری شرایط اوّلیه، مقدار تابع $Y(s)$ را محاسبه می‌کنیم.

۳. از آنجا که $\boxed{y(x) = \mathcal{L}^{-۱}\{Y(s)\}}$ است، با محاسبهٔ تبدیل معکوس لاپلاس تابع $Y(s)$، جواب معادله حاصل می‌شود.