به نام خدا

ترکیبات

جلسه پنجم

۱۳۸۹/۵/۱۰

سید احسان آزرم سا
seazarmsa@gmail.com

نگین السادات موسوی
mousavi8@gmail.com

سوال: اعداد طبیعی را با دو رنگ آبی و قرمز رنگ می کنیم. نشان دهید زیردنباله ای نامتناهی و صعودی از اعداد وجود دارد، بطوریکه $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$طبیعی مانند

$$2k_1, k_1 + k_2, 2k_2\ , k_2 + k_3, 2k_3, k_3 + k_4, 2k_4\ \cdots$$

تک رنگ باشد.

جا دارد در اینجا اندکی آشنایی با نماد $\{k_i\}_{i=۱}^{\infty}$ داشته باشیم.

برای نمایش دنباله $a_۱, a_۲, a_۳, \dots, a_n$ به اختصار از نماد $\{a_i\}_{i=۱}^{n}$ استفاده می کنند. اگر این دنباله مانند دنباله ذکر شده در صورت سوال نامتناهی باشد، از ∞ به جای n استفاده می شود.

استفاده از این گونه نمادها در جاهای دیگر مانند ضرب و جمع نیز کاربرد دارد.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} p_i = p_1 p_2 \cdots p_n$$

برای آشنایی بیشتر با مسئله، در ابتدا حکم را برای حالت های خاصی از رنگ آمیزی نشان می دهیم.

- **برای حالتی که اعداد زوج، آبی و فرد، قرمز باشند، حکم را ثابت کنید.**

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ⋯

به دنبال دنباله ای با شرایط مذکور می گردیم. ساختار خواسته شده شامل جملاتی زوج است. اما در این مثال، هیچ عدد قرمزی زوج نیست. پس احتمالا باید در اعداد آبی چنین ساختاری را جستجو کنیم. به عنوان مثال می توان اعداد فرد را به عنوان $\{k_i\}_{i=۱}^{\infty}$ در نظر گرفت، در این صورت، دنباله اعداد زوج همان دنباله تک رنگ مورد نظر است.

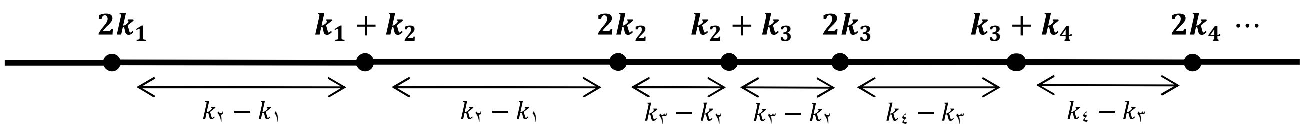
$$(۲ \times ۱) = ۲\,, (۱ + ۳) = ۴, (۲ \times ۳) = ۶, (۳ + ۵) = ۸, (۲ \times ۵) = ۱۰, \cdots$$

به طریق مشابه می توان نشان داد، اگر **از جایی به بعد،** زوج ها تک رنگ باشند (تا قبل از آن اعداد به هر صورت دلخواهی رنگ شده باشند)، دنباله بالا تنها با حذف چند جمله ابتداییش، دوباره می تواند جواب مسئله باشد.

- **برای حالتی که تنها توان های ۲ آبی هستند (تصاعد هندسی $\{2^i\}_{i=1}^{\infty}$)، حکم را نشان دهید.**

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ …

ابتدا به ساختار دنباله ی خواسته شده توجه کنید.



می توان دید که این دنباله را می توان این گونه ساخت. با شروع از یک عدد زوج مانند $۲k_۱$ و پیمودن دو گام مساوی دو عضو بعدی، $k_۱+k_۲$ و $۲k_۲$، را به دست می آوریم. سپس دوباره با انتخاب گامی جدید و دوبار پیمودن آن به دو عضو $k_۲+k_۳$ و $۲k_۳$ می رسیم. با ادامه همین روند اعضای دیگر را به دست می آوریم. حالتی خاص برای این وضعیت زمانی است که تمامی گام ها برابر باشند، در این حالت دنباله ای که به دست می آید، یک تصاعد حسابی است.

ما برای ادامه این مسئله به شدت با ساختار معرفی شده در حکم، سر و کار خواهیم داشت. برای روان تر کردن استدلال ها، اسمی برای معرفی کردن آن ها در نظر می گیریم.

تعریف. یک دنباله

$$2k_1, k_1+k_2, 2k_2\ , k_2+k_3, 2k_3, k_3+k_4, 2k_4\ \cdots$$

از اعداد طبیعی را یک **طلایی** معرفی می کنیم. همچنین همان طور که در بالا گفته شد، اعداد $2k_1, 2k_2, \cdots$ اعداد تعیین کننده ای برای یک ساختار طلایی هستند. بنابراین می توانیم ساختار طلایی فوق را متناظر با دنباله $\{2k_i\}_{i=1}^{\infty}$ دانست. در مقاله هم منظور از طلایی دنباله $\{2k_i\}_{i=1}^{n}$، همین ساختار طلایی متناظر با آن است.

حال به حل مسئله می پردازیم. در پی ساختار طلایی تک رنگی هستیم. تصاعد ها مجموعه هایی ساده از اعداد هستند که به راحتی می توان تمامی اعضای آن را معرفی و شناسایی کرد. دیگر لازم نیست که از اعداد بسیار زیادی برای معرفی این مجموعه استفاده کرد. برای همین تسلط بهتری بر این موجودات داریم و راحت تر می توانیم با آن ها کار کنیم.

کافی است برای حل مسئله تصاعدی از یکی از رنگ ها پیدا کنیم. به وضوح تصاعدی به رنگ آبی نخواهیم داشت. اما تصاعدهایی به رنگ قرمز موجودند. به عنوان مثالی ساده می توان به تصاعد حسابی به شکل $\{3i\}_{i=1}^{\infty}$ (معادل دنباله …,۳,۶,۹,۱۲) توجه کرد. واضح است که هیچ یک از اعضای این دنباله توان طبیعی از ۲ نیستند، پس آبی رنگ نمی باشند. لذا این مورد، نیاز ما را برآورده می سازد.

یکی از نکات مهم در حل سوال، فهم سوال است. منظور از فهمیدن سوال این نیست که چندین و چندبار از روی صورت مسئله بخوانیم یا آن را حفظ کنیم. منظور این است که بر جنبه های مختلف آن مسلط شویم. برای این کار راه های مختلفی وجود دارد. به طور مثال، در مقاله سوم دیدید که با یک مدل سازی خوب، شکل مسئله را از حالت سه بعدی به دو بعدی تبدیل کنیم و این باعث شد که از پیچیدگی فضای مسئله کاسته شود. یا در مقاله چهارم با تبدیل شکل سوال (از حالت کار با مجموع اعداد در یک زیرجدول به حالت کار با تعداد مهره ها در آن زیرجدول)، راحت تر با مسئله برخورد کردیم. همچنین در همان مقاله با بیان حکم در حالت کلی سعی کردیم شهود بهتری نسبت به مسئله پیدا کنیم. پس برای فهم مسئله خوب است که شکل های مختلف مسئله را ببینیم. تعمیم ها یا حالات خاص خوب مسئله را مورد بررسی قرار دهیم تا به کمک این روش ها به ایده ها و نکات کلیدی مسئله دست پیدا کنیم.

- **حکم مسئله برای یک دنباله صعودی نامتناهی است. سعی کنید با همان فرض مسئله حکم را برای یک دنباله متناهی بیان کنید.**

حکم *برای حالت دنباله متناهی*: برای هر عدد n طبیعی نشان دهید دنباله ی تک رنگی به شکل

$$2k_1, k_1 + k_2, 2k_2\ , k_2 + k_3, 2k_3, \cdots, k_{n-1} + k_n, 2k_n$$

وجود دارد.

این ها در واقع ساختارهای طلایی متناهی هستند که از دنباله های متناهی ناشی می شوند. پس این حکم بیان می کند که برای هر عدد طبیعی n یک ساختار طلایی تک رنگ با $2n - 1$ عضو وجود دارد.

واضح است که حکم برای حالت $n = 1$ یعنی وجود عدد زوج تکرنگ! برقرار است. برای $n = 2$ حکم معادل است با وجود دو عدد زوج همرنگ که میانگینشان نیز همرنگ آن ها باشد. یا معادلا باید نشان داد اعداد طبیعی را نمی توان به دو مجموعه افراز کرد به طوریکه میانگین هر دو عدد زوج از یک مجموعه در مجموعه دیگر باشد.

اضافه و کم کردن شرط های مسئله، تغییر حکم و ایجاد مسئله ای جدید یا ذکر تعابیر دیگری برای مسئله، گاهی ممکن است به یافتن ایده حل مسئله منجر شود. پس خوب است برای تسلط بیشتر بر سوال، از این چنین حرکاتی استفاده شود.

آشنایی مختصر با "برهان خلف"

برهان خلف یکی از قدرتمندترین ابزارهای ریاضی و به خصوص در ترکیبیات است. روش برهان خلف به این طریق است که از روی فرض کردن نادرستی حکم، فرضی به محیط مسئله اضافه می شود. حال اگر این فرض با بقیه فرض های موجود در مسئله سازگار نباشد و تناقضی در این بین به وجود بیاید، اثبات می شود که فرض ما نادرست بوده و در نتیجه حکم لزوما باید درست باشد. از نظر منطقی، وقتی نشان دهیم رخ دادن نقیض حکم مسئله محال است، پس خود گزاره مسئله برقرار خواهد بود.

همان طور که در مقاله پیش دیدید، یک فرض خلف می تواند در پیش بردن مسئله بسیار کارساز باشد. از برهان خلف در مواقعی استفاده می شود که درست نبودن حکم شرطی قوی روی مسئله ایجاد کند. به طور مثال در مقاله ی پیشین، نادرستی حکم معادل این بود که هر زیرجدول $n \times n$ می تواند حداکثر تعداد معینی علامت داشته باشد. در نتیجه با فرض خلف، شرطی روی هر زیرجدول یافتیم که کمک زیادی به حل سوال کرد. اما در مقاله اول، فرض خلف مبنی بر این که کسری مثل $\frac{m}{n}$ $(m < n)$ دست یافتنی نیست، هیچ کمکی به حل مسئله نخواهد کرد. زیرا هیچ شرط کارایی را روی مسئله ایجاد نکرده است. در آینده سعی خواهد شد موضوع **برهان خلف** به صورتی دقیق تر بررسی شود.

در استفاده از برهان خلف باید توجه کرد که فرض خلف دقیقا معادل نادرستی حکم باشد.

- **فرض کنید حکم مسئله نادرست باشد. فرض خلف را به صورت مناسب بیان کنید.**

همان طور که از صورت این قسمت می توان حدس زد، به چند صورت می توان فرض خلف را بیان کرد. مثلا می توان گفت که به ازای هر دنباله صعودی نامتناهی مانند $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ مجموعه اعداد

$$2k_1, k_1 + k_2, 2k_2, k_2 + k_3, 2k_3, \cdots$$

نمی تواند تک رنگ باشد.

همان طور که از ظاهرش بر می آید، این بیان غیر قابل استفاده و بررسی می نماید. پس باید بیان کاراتری را ارائه داد. در قسمت های قبل ساختار های طلایی متناهی را معرفی کردیم. حکم می گوید که ساختار طلایی نامتناهی وجود ندارد که تمام اعضای آن تک رنگ باشد. همان طور که در قبل گفته شد، می توان یک طلایی نامتناهی را به عنوان امتداد ابدی یک طلایی متناهی معرفی کرد. یعنی ابتدا یک عدد زوج مانند $2k_1$ مثلا از رنگ آبی موجود است. سپس عددی زوج آبی مانند $2k_2$ می یابیم که از $2k_1$ بزرگتر باشد و $k_1 + k_2$ آبی باشد. سپس یک عدد زوج آبی مانند $2k_3$ می یابیم که از $2k_2$ بزرگتر باشد و $k_2 + k_3$ آبی باشد. به همین ترتیب یکی یکی $2k_i$ ها را اضافه می کنیم. حال اگر بتوان این روند را تا ابد ادامه داد که حکم ثابت می شود. اما اگر نشود چه اتفاقی می افتد. در واقع فرض خلف می کنیم که هیچ دنباله ای را نمی توان بدین شکل تا بی نهایت ادامه داد و از هیچ رنگی طلایی نامتناهی وجود ندارد.

در این صورت حتما تا جایی مانند $2k_n$ این کار را می توان انجام داد. اما دیگر نمی توان آن را گسترش داد. یعنی دیگر $2k_{n+1}$ آبی بزرگتر از $2k_n$ پیدا نمی شود که $k_n + k_{n+1}$ هم آبی باشد.

دنباله تک عضوی $2k_n$ را هم نمی توان گسترش داد. چون اگر $2a$ عدد زوج آبی باشد که $a + k_n$ هم آبی باشد، آن موقع دنباله $\{k_i\}_{i=1}^{n}$ هم قابل گسترش بود. پس مشکل گسترش ناپذیری این دنباله تنها به k_n مربوط می شود. ما این گونه اعداد مشکل ساز را اعداد **ادامه ناپذیر** می نامیم.

- **اعداد ادامه ناپذیر چه خواصی دارند.**

در این قسمت می خواهیم خواصی از اعداد ادامه ناپذیر را پیدا کنیم. سپس با یک جمع بندی مناسب از نتایج، مسئله را حل کنیم. سعی کنید نتایج زیر را ثابت کنید:

۱. از هر رنگ حداقل یک عدد ادامه ناپذیر وجود دارد.
۲. بی نهایت عدد ادامه ناپذیر قرمز مانند $2R_1, 2R_2, \cdots$ وجود دارند. به همین ترتیب بی نهایت عدد ادامه ناپذیر آبی مانند $2B_1, 2B_2, \cdots$ وجود دارند.
۳. اگر $2R$ یک عدد ادامه ناپذیر قرمز باشد، به ازای هر عدد قرمز زوج مثل $2x$ که $(x > R)$، اعداد $x + R$ و $4x - 2R$ آبی هستند. حکمی مشابه، برای اعداد ادامه ناپذیر آبی برقرار است.
۴. اگر $2R$ یک عدد ادامه ناپذیر قرمز باشد، به ازای هر عدد قرمز مانند x که $(x > 2R)$، عدد $2(x - R)$ آبی است.

- **با توجه به نتایج به دست آمده مسئله را حل کنید.**

پیشتر، با مزایای تصاعدها آشنا شدیم. گفتیم که تصاعدها به دلیل ساختار ساده ای که دارند، مورد توجه هستند. پس در حل مسئله به پیدا کردن تصاعدی تک رنگ اشتیاق داریم (با این که ممکن است در تمامی حالات این کار امکان پذیر نباشد). برای این منظور، اول از نتایجی استفاده می کنیم که کمک بیشتری در این جهت بتوانند بکنند.

در این جا دو راه حل از مسئله را بیان می کنیم. در خیلی از مواقع راه حل یکتا برای مسئله وجود ندارد و طرز تفکر های مختلف به راه حل های مختلف می انجامند.

راه اول

با توجه به نتیجه چهارمی که در بالا بیان شد، اگر x قرمز و y آبی و $x > 2R_1$ و $y > 2B_1$، آن گاه

$$x - R_1 \neq y - B_1$$

پس اگر $x > 2B_1 > 2R_1$ ، آن گاه $x + (B_1 - R_1)$ عددی قرمز خواهد بود. زیرا اگر آبی باشد، آن گاه طبق نتیجه ۴، $2[(x + B_1 - R_1) - B_1]$ قرمز خواهد بود. همچنین طبق همان نتیجه ۴، $2(x - R_1)$ آبی خواهد بود که این تناقض است. به همین ترتیب $x + 2(B_1 - R_1)$ نیز قرمز خواهد بود. زیرا $x + (B_1 - R_1)$ عددی قرمز است و در شرط هایی که بیان شد، صدق می کند ($x + (B_1 - R_1) > x > 2B_1 > 2R_1$). پس با استدلالی مشابه می توان گفت که $x + 2(B_1 - R_1)$ قرمز است. به همین ترتیب می توان نتیجه گرفت، تصاعد $x + k(B_1 - R_1)$ تک رنگ قرمز است. در نتیجه این تصاعد یک طلایی نامتناهی است که همگی اعضای آن قرمز هستند. اما فرض کرده بودیم که طلایی نامتناهی تک رنگ وجود ندارد. پس با فرض خلفمان به **تناقض** رسیدیم و محال است که هیچ طلایی نامتناهی تک رنگی وجود نداشته باشد. پس چنین ساختار طلایی حتما وجود دارد.

توجه کنید که به هیچ وجه ثابت نکردیم که یک تصاعد تک رنگ وجود دارد.

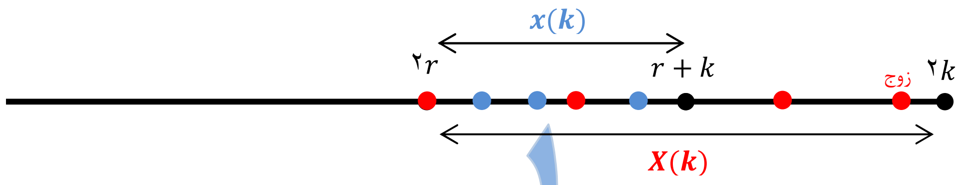
راه دوم

با درنظر داشتن نتایج فوق به حل مسئله می پردازیم.

دو عدد ادامه ناپذیر $۲r$ قرمز رنگ و $۲b$ آبی رنگ را در نظر بگیرید. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $r > b$.

$X(k)$ را تعداد قرمز های زوج بازه $[۲r, ۲k]$ و $x(k)$ را تعداد آبی های بین $[۲r, r+k]$ در نظر بگیرید با استفاده از نتیجه ۳، برای هر عضو $X(k)$ ، مثل ۲α، $r+\alpha$ آبی است. پس $x(k) \geq X(k)$.

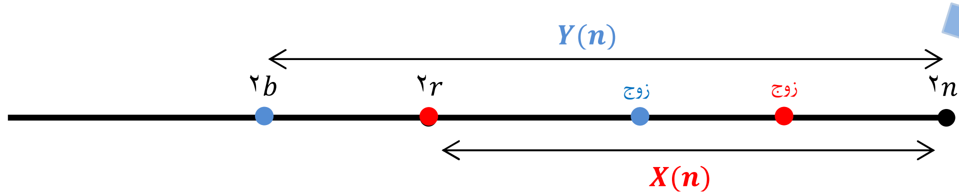
همچنین می توان گفت که $X(k)$، تعداد اعداد آبی در بازه $[۲r, k+r]$ مانند α است که $۲(\alpha - r)$ قرمز باشد. در ادامه از این تعبیر جدید استفاده خواهیم کرد.



مشابها برای b اگر $Y(k)$ (برای k دلخواه و بزرگتر از b) را تعداد آبی های زوج بازه $[۲b, ۲k]$ و $y(k)$ را تعداد قرمزهای $[۲b, k+b]$ بگیریم. داریم: $y(k) \geq Y(k)$.

برای عدد دلخواه n ، با توجه به نوع تعریف $X(n)$ و $Y(n)$، $X(n) + Y(n)$ حداکثر برابر تعداد اعداد زوج بین $۲n$ و $۲r$ است. همچنین این مقدار لااقل برابر تعداد اعداد زوج بین $۲n$ و $۲b$ می باشد.

$$n - r \leq X(n) + Y(n) \leq n - b$$



از طرفی می دانیم $x(n)$ تعداد اعداد آبی رنگ $[۲r, n+r]$ و $y(n)$ تعداد اعداد قرمز $[۲b, n+b]$ است. بنابراین مجموع این دو عدد کمتر از تعداد اعداد $[۲b, n+b]$ است.

$$x(n) + y(n) \leq n + r - ۲b$$

با استفاده از نامساوی های فوق به دست می آید:

$$[x(n) - X(n)] + [y(n) - Y(n)] = x(n) + y(n) - [X(n) + Y(n)] \leq (n + r - b) - (n - r) = ۲(r - b)$$

با توجه به نامنفی بودن $x(n)-X(n)$ و $y(n)-Y(n)$ ، $۲(r-b)$ کرانی برای هر یک از این دو نیز می باشد. حال به این نکته توجه کنید که برای بازه $[۲r,n+r]$، $x(n)$ تعداد کل اعداد آبی و $X(n)$ همان طور که گفتیم، تعداد اعدادی مانند α است که $n+r\geq\alpha>r$ است با شرط این که $۲\alpha-۲r$ قرمز باشد، بنابراین $x(n)-X(n)$ برابر تعداد اعداد آبی رنگی از این بازه مانند s است که برای آن ها عدد $۲s-۲r$ آبی است. می توان دید که مقدار $x(n)-X(n)$ بر حسب n صعودی است.

حال با توجه به این که $x(n)-X(n)$ برای هر n، دارای کرانی مستقل از n است، نتیجه می گیریم، $x(n)-X(n)$ از یک جا به بعد، ثابت است و در کل تعداد متناهی عدد با این ویژگی وجود دارند که خودشان و دوبرابرشان منهای $۲r$، آبی باشد.

بزرگترین عدد با این ویژگی را در نظر بگیرید، این عدد را M بنامید. برای اعداد آبی بزرگتر از M مانند t، $۲t-۲r$ لزوما قرمز خواهد بود. از طرفی می دانیم که اگر عدد قرمزی مانند u بزرگتر از $۲r$ باشد حتما $۲u-۲r$ آبی خواهد بود. (چون در غیر این صورت r ادامه پذیر بوده است.). بنابراین به ازای n به اندازه کافی بزرگ، عدد $۲n-۲r$ رنگی مخالف رنگ n خواهد داشت.

مشابها $y(n)-Y(n)$ تعداد اعداد قرمز رنگی مانند v از بازه $[b+n,۲b]$ است با این شرط که $۲v-۲b$ آبی می باشد و می توان نتیجه گرفت از جایی به بعد به ازای هر n، رنگ $۲n-۲b$ مخالف n می باشد. (بزرگترین عدد که خودش و دوبرابر منهای آن $۲b$، قرمز باشد را M' بنامید.)

با توجه به گزاره های مذکور نتیجه می گیریم به ازای n های بزرگ ($n>\max{(M,M')}$) اعداد $۲n-۲r$ و $۲n-۲b$ یکرنگ می باشند. چون $(۲n-۲b)-(۲n-۲r)=۲(r-b)$ مستقل از n است نتیجه می گیریم از جایی به بعد، هر دو عدد با این اختلاف، یکرنگ می باشند. بنابراین با شروع از عددی به اندازه کافی بزرگ مانند l (l را می توان برابر $۲n-۲b$ گرفت که n یکی از این اعداد بزرگی است که بالا معرفی شد) و ساختن دنباله ای به شکل

$$l \quad l+۲(r-b) \quad l+۴(r-b) \quad l+۶(r-b) \quad l+۸(r-b) \ \cdots$$

دنباله ای تکرنگ از اعداد به دست می آید.

قبلا نشان دادیم که هر تصاعد حسابی تک رنگ شرط مسئله را ارضا می کند بنابراین در صورت برقراری فرض های اولیه (فرض مسئله به همراه فرض خلف)، طلایی تک رنگی وجود خواهد داشت که با فرض ما (نبود چنین ساختار طلایی) در تناقض است. پس لزوما یک دنباله طلایی تک رنگ وجود دارد.

- ✓ برهان خلف یکی از قوی ترین ابزار حل مسئله است. در مسائلی که درست نبودن حکم شرط بسیار قوی روی مسئله ایجاد می کند، می تواند ایده ای کارساز باشد.
- ✓ یک فرد ماهر در ترکیبیات کسی نیست که بتواند در زمان کمتری مسئله را حل کند. ماهر کسی است که بتواند نتایج بیشتر و دقیق تری را پیدا کند و از آن ها به طرز مناسبی در جهت رسیدن به حل، استفاده کند. به همین منظور خوب است که در هنگام حل مسئله تنبلی را کنار گذاشته و تا وقتی که ایده مشخصی برای حل مسئله نداریم، با بررسی جوانب مسئله و نتیجه گیری ها، به ایده حل مسئله دست پیدا کنیم.
- ✓ یکی از راهکارها برای بررسی جوانب مسئله، بررسی حکم است. بررسی حکم بدان معنا است که حکم مسئله را برای حالات محدودتر بیان و بررسی کنیم یا تعمیمی برای آن حدس بزنیم یا برای حالاتی خاص و مثال ها درستی حکم را بررسی کنیم.
- ✓ در مسائل، برخی مفاهیم کلیدی و تعیین کننده هستند. مثلا در این مقاله **ادامه ناپذیری** یکی از مفاهیم کلیدی بود که با بررسی دقیق آن، به حل مسئله دست پیدا کردیم. خوب است که در هنگام حل مسائل، برای مفاهیم کلیدی اسمی مناسب انتخاب کنیم که راحت تر بتوانیم روی آن ها تمرکز کنیم و همچنین راه حلی روان تر ارائه دهیم (از راهکارهای جلوگیری از پریدن الکی نمره).
- ✓ در همه مسائل با یک ساختار متناهی و قابل تسلط سر و کار نداریم. برخی از مسائل مانند مسائل دنباله های نامتناهی دارای ساختارهایی نامتناهی هستند. راهکار های مختلفی برای رویارویی با این پدیده وجود دارد که با یکی از آن ها در این مقاله آشنا شدید. در این مقاله یک ساختار نامتناهی را به عنوان امتداد نامحدود یک ساختار متناهی معرفی کردیم.