بررسی برخی ویژگی های ریاضی ستاره های مرتبه n اُم

رشد برهان متوسطه۲ (علمی-ترویجی)؛ دوره بیست‌وسوم، شماره ۲ (شماره ۸۰)، زمستان ۱۳۹۲؛ صص ۲۹-۲۶

هادی صفری*

چکیده

هر چند ضلعی شامل تعدادی رأس، تعدادی ضلع و چندین قطر است. در برخی چندضلعی ها، از برخورد قطرها اشکال زیبایی شبیه به اشکالی که به طور عمومی آن ها را به نام ستاره می شناسند تشکیل می گردد که با کمی دقت قابل تشخیص هستند. در این مقاله، به بررسی برخی ویژگی های این اشکال ستاره مانند و چندضلعی های سازنده آن ها پرداخته شده است.

کلیدواژه ها: چندضلعی، ستاره، هندسه مسطحه، آنالیز ترکیبی، ریاضیات محض.

---

*دانش آموز ریاضی-فیزیک مرکز پرورش استعدادهای درخشان و پژوهشگران جوان واحد شهید بهشتی شهرکرد

Email: h.safari.hs[at]gmail.com

Blog: http://hadisafari.blog.ir

مقدمه ها و پیش نیاز ها

مطلب کوتاهی در کتاب ارزشمند *آموزش هنر حل مسئله* [منبع1] (ر.ک. ص.۳۲۶) درباره چندضلعی های ستاره ای، نگارنده را به این چندضلعی ها و ویژگی هایشان علاقه مند کرد. نتیجه بررسی این ویژگی ها، در این مقاله به رشته تحریر در آمده اند.

در ابتدا برخی تعاریف مورد نیاز ذکر خواهد شد.

چندضلعی[1]: «در هندسه، چندضلعی به شکلی دوبعدی در صفحه گفته می‌شود که با مسیری بسته شامل تعداد متناهی خطوط راست محیط شده باشد.» (ویکی‌پدیا، دانشنامه آزاد)

ضلع[2]: «ضلع در هندسه، پاره‌خطی است که دو رأس مجاور را در یک چندضلعی به هم متصل می‌کند. بنابراین در عمل، یک ضلع رابطی برای یک پاره‌خط یک‌بعدی و دو شی صفربعدی است.» (ویکی‌پدیا، دانشنامه آزاد)

قطر[3]: خطی است که دو رأس غیرمجاور از یک چندضلعی یا چندوجهی را به هم متصل می کند. (Wikipedia, the free encyclopedia)

چندضلعی محدب: «یک چند ضلعی کوژ(محدب) یک چند ضلعی است که اگر از هر دو راس آن خطی به هم وصل کنیم، آن خط از داخل چند ضلعی عبور کند؛ [اثبات می شود که] یک چند ضلعی، کوژ است اگر و تنها اگر هیچ یک از زاویه های داخلی آن بیشتر از ۱۸۰ درجه نباشند.» (ویکی‌پدیا، دانشنامه آزاد)

در ادامه، خلاصه مطلبی که درباره چندضلعی های ستاره ای در کتاب *آموزش هنر حل مسئله* آمده است نقل می شود.

ابتدا یک دایره رسم کنید و سپس پنج نقطه روی آن علامت بزنید. این پنج نقطه را به هم متصل کنید. در این حالت یک پنج ضلعی به همراه قطرهای آن به دست می آید. اگر اضلاع و دایره را در نظر نگیرید، یک ستاره پنج پر مشاهده می کنید.

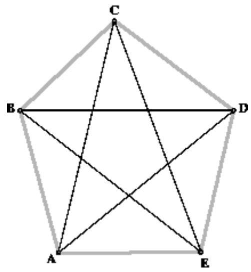
گاهی از این روش اشکالی به دست می آید که حاصل اجتماع چندضلعی های کوچکترند، برای مثال یک ستاره شش پر حاصل اجتماع دو مثلث است.

---

[1] polygon
[2] edge
[3] diagonal

ارائه روشی برای رسم ستاره وار های nپَر

بیایید تا بار دیگر متن کوتاه فوق را با تعمق بیشتری بررسی کنیم. به شکل۱ توجه کنید:



شکل ۱: یک ستاره پنج پر حاصل از قطر های یک پنج ضلعی محدب

اولین نکته ای که توجه فرد را جلب می کند، روش رسم پنج ضلعی است. چرا از دایره برای رسم پنج ضلعی کمک گرفته شده است؟ هدف آن بوده تا پنج ضلعی حاصل، شکلی محدب باشد. قضیه ۱ به بررسی این مسأله می پردازد؛ این مسأله روشی برای رسم یک چندضلعی محدب ارائه می کند.

قضیه۱: هر چندضلعی که رئوس آن روی محیط یک دایره قرار گیرند محدب است.

اثبات: فرض کنید تمام رئوس چند ضلعی روی محیط یک دایره باشند. برای هر سه رأس زاویه ABC از چند ضلعی، داریم هر سه نقطه AوBوC روی محیط دایره بوده و بر هم نامنطبق هستند. پس ABC یک زاویه محاطی از دایره است. زاویه محاطی از زاویه ای برابر نصف کمان روبروی خود برخوردار است و دایره نیز کمانی ۳۶۰ درجه ای است. برای این زاویه می توان سه حالت متصور شد:

-ABC>۱۸۰ ← کمان متناظر زاویه > ۳۶۰←تمام دایره > بخشی از دایره←تناقض

-ABC=۱۸۰ ← یک ضلع سه رأس را به هم متصل کرده است. ← تناقض

-ABC<۱۸۰:قابل پذیرش

بنابراین تمام زوایای چندضلعی مورد بحث کوچکتر از ۱۸۰ درجه هستند؛ پس چندضلعی محدب است. ■

به شکل۱ توجه کنید؛ ستاره پنج پر شامل یک پنج ضلعی در وسط و پنج مثلث بر روی اضلاع آن است. در این مقاله *ستاره واری nپر که شامل یک nضلعی در وسط و n مثلث (حاصل از امتداد اضلاع nضلعی) بر روی اضلاع آن است ، یک* ***ستاره از مرتبه nاُم*** *نامیده می شود.* بر این اساس خطوط پر رنگ شکل ۱، یک ستاره مرتبه پنجم را نمایش می دهد. در این مقاله نویسنده نماد قراردادی S_n را برای ستاره مرتبه nاُم تعیین کرده است.

برای اثبات های بعدی، نیاز به قضایا و روابطی داریم که به بررسی برخی از آن ها می پردازیم:

قضیه۲: تعداد قطرهای داخلی یک nضلعی محدب برابر است با n(n-3)/2.

اثبات: یک nضلعی شامل n رأس است. تعداد خطوطی که دو رأس را به یکدیگر متصل می کنند برابر است با C(2,n). از میان این خطوط، n پاره خط ضلع و بقیه قطر هستند. از آن جا که nضلعی محدب است، تمام این قطر ها (که خطوطی هستند که دو نقطه از nضلعی را به هم متصل می کنند) درون شکل قرار دارند. بنابراین تعداد قطر های داخلی nضلعی برابر است با:

$$C_2^n - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)-2n}{2} = \frac{n[(n-1)-2]}{2} = \frac{n(n-3)}{2} \quad \blacksquare$$

قضیه۳: مجموع زوایای یک nضلعی محدب برابر است با 180(n-2) .

اثبات (استقرای ریاضی): پایه استقرا (n=3): مجموع زوایای مثلث برابر است با ۱۸۰ درجه. (در این جا به اثبات این مطلب نمی پردازیم.)

گام استقرا (n>3): هر nضلعی محدب را با رسم یکی از قطر های آن میان دو رأس به فاصله ۱ می توان به یک مثلث (با مجموع زوایای ۱۸۰) و یک n-1ضلعی (با مجموع زوایای 180(2-(n-1))) تبدیل کرد؛ بنابراین مجموع زوایای nضلعی برابر است با:

■ [((n-1)-2)180]+ [180] = (n-2)180

اثبات وجود ستاره هایی از مرتبه n

در هندسه مسطحه اقلیدسی، nضلعی ها حداقل شامل سه ضلع (مثلث) هستند. یک مثلث هیچ گونه قطری ندارد (مطابق قضیه ۲)؛ بنابر این نمی توانیم یک S_3 داشته باشیم. در هر چهار ضلعی، قطر ها همرس هستند پس تشکیل یک چهارضلعی نمی دهند؛ بنابراین S_4 هم نداریم. قضیه۴ بیان می کند که ستاره هایی از مرتبه پنجم یا بیشتر وجود دارند.

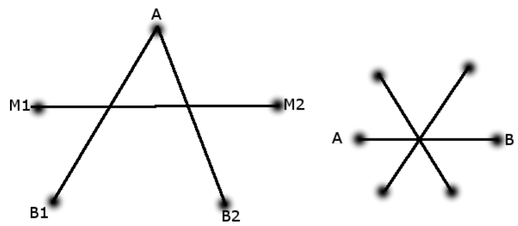
قضیه۴: به ازای هر nضلعی (n≥5) ستاره ای از مرتبه n وجود دارد.

اثبات: مطابق لم۱، در شرایط مفروض قطر هایی که دو سرشان به فاصله ۱رأس هستند، تشکیل یک nضلعی در وسط می دهند. لم۲ بیان می کند که nمثلث مورد نظر ما هم وجود خواهند داشت. از این دو مسأله حکم اثبات می شود.■

لم۱: به ازای هر nضلعی (n≥5)، قطر هایی که دو سرشان به فاصله ۱رأس هستند، تشکیل یک nضلعی در وسط می دهند.

اثبات: تنها قطر هایی برای رسم nضلعی کوچکتر و بعد ستاره مرتبه n مورد استفاده قرار می گیرند که بین دو سر آن ها، تنها یک رأس فاصله باشد. در این صورت به هر رأس، دقیقاً دو قطر مفروض متصل می گردد (یکی رو به جلو و دیگر رو به عقب). در این صورت برای رأسی مثل A، رأس هایی مانند B_1 و B_2 برای سر دیگر قطر ها و دو رأس مثل M_1 و M_2 برای فاصله میان دو سر هر قطر نیازمندیم، پس nضلعی باید حداقل ۵ رأس داشته باشد (n≥5). عکس قضیه بدیهی است.

همچنین حداکثر تعداد قطرهای مفروض همرس در هر نقطه درون چندضلعی برابر ۲ است: اگر این تعداد بیشتر از ۳ باشد، می توانیم فقط سه تا از آن ها را در نظر بگیریم.



شکل ۲: مربوط به اثبات لم های ۱ و ۲

برهان خلف: فرض کنید سه قطر مفروض در یک نقطه درون چندضلعی همرس هستند. در این صورت مطابق شکل ۲ بین دو سر قطر AB حداقل ۲ رأس قرار دارد و از آن جا که ۲>۱؛ به تناقض برخورد نموده ایم (فرض کرده بودیم بین هر دو قطر مفروض، دقیقاً ۱رأس فاصله باشد)، بنابراین فرض خلف باطل است و حکم اثبات می شود.■

لم۲: در شرایط مفروض لم ۱، هر سه قطری مانند AB_1،AB_2 و M_1M_2 (این نقاط همان نقاط لم ۱ هستند.) مثلثی می سازند که ضلعی دارد که قطر nضلعی نیست. (بدیهی است که در این صورت این ضلع یکی از اضلاع nضلعی کوچکتر خواهد بود.)

اثبات: با رسم M_1M_2، برای A سه حالت زیر متصور خواهد بود: (در عبارات زیر فرض کرده ایم B_1B_2 پایین تر از M_1M_2 قرار دارند.)

-A پایین M_1M_2 قرار دارد: بنابراین M_1M_2 که پاره خطی میان دو نقطه از چندضلعی محدب است، از خارج چندضلعی محدب می گذرد. (تناقض)

-A روی M_1M_2 قرار دارد: پس قطر M_1M_2 سه رأس را به یکدیگر متصل کرده است. (تناقض)

-A بالای M_1M_2 قرار دارد: پس مثلث مورد نظر ما تشکیل می شود. (اثبات حکم)

توجه کنید که در این اثبات فرض شده است چند ضلعی حداقل پنج رأس دارد. ■

تعداد ستاره ها حاصل از قطر های یک n ضلعی

اگر تعداد ستاره های یکٔ nضلعی را با f(n) و تعداد ستاره های مرتبه kاُم یکٔ nضلعی را با f(k,n) نشان دهیم، آن گاه:

$$f(n) = \sum_{i=5}^{n} f(i,n)$$

قضیه۵: f(k,n)=C(k,n)

اثبات (استقرای ریاضی): اگر k>n آنگاه همان طور که انتظار داشتیم: f(k,n)=C(k,n)=0 ؛ وگرنه:

پایه استقرا (n=k): با توجه به این که برای رسم هر S_k دقیقاً به k رأس نیاز داریم، بدیهی است که f(n,n)=1 و از طرفی می دانیم C(n,n)=1، پس داریم f(n,n)=C(n,n).

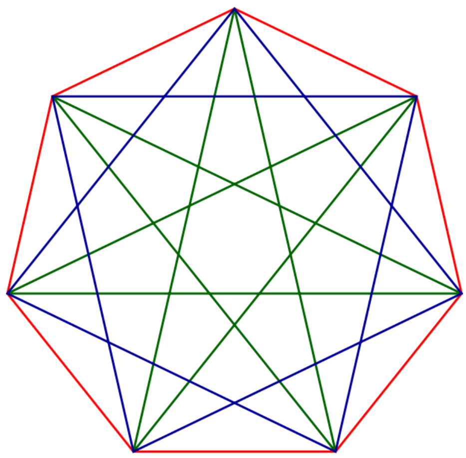
گام استقرا (n>k): با انتخاب k رأس به یک kضلعی محدب می رسیم که مطابق اثبات پایه، تنها یک ستاره از مرتبه n در آن وجود دارد. برای انتخاب این n-k رأس، C(n-k,n)=C(k,n) حالت وجود دراد، پس حکم با استقرای ریاضی ثابت شد. ■

با توجه به فرمول فوق، قضیه۵ و آن که $\sum_{i=0}^{n} C_i^n = 2^n$، داریم:

$$f(n) = \sum_{i=5}^{n} f(i,n) = \sum_{i=5}^{n} C_i^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n - \sum_{i=0}^{4} C_i^n = 2^n - \sum_{i=0}^{4} C_i^n$$

پس ثابت کردیم تعداد ستاره های حاصل از برخورد قطر های یک nضلعی برابر $2^n - \sum_{i=0}^{4} C_i^n$ است. ■

برای مثال به شکل۳ توجه کنید: این شکل تمام ستاره های حاصل از برخورد قطر های یک هفت ضلعی را نشان می دهد. در این شکل ستاره مرتبه هفتم و ستاره های مرتبه ششم نشان داده شده اند.

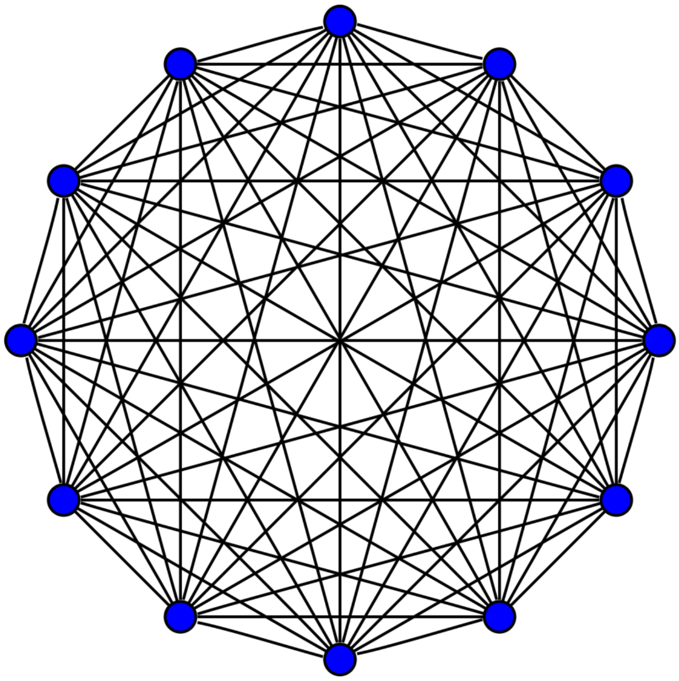


شکل ۳: نمایش تصویری f(۷)

حالا به محاسبه f(۷) می پردازیم:

$$f(7) = 2^7 - \sum_{i=0}^{4} C_i^7 = 29$$

به عنوان نمونه ای دیگر، می توانید تعداد ستاره های حاصل از برخورد قطرها در یک دوازده ضلعی منتظم (شکل ۴) را با کمک همین رابطه بشمارید.



شکل ۴: دوازده ضلعی منتظم و نمایش f(۱۲)

مجموع زوایای داخلی یک ستاره از مرتبه n

مطابق تعریف، هر S_n شامل یک nضلعی و n مثلث است؛ بنابر این مجموع زوایای داخلی S_n برابر مجموع زوایای nضلعی محدب و n برابر مجموع زوایای مثلث است. در این صورت و با توجه به قضیه۳، مجموع زوایای داخلی ستاره از مرتبه n بر حسب درجه برابر است با:

$$(n-2)180+180n=180(n-2+n)=(n-1)360 \blacksquare$$

به عنوان نمونه مجموع زوایای داخلی یک S_5 (شکل۱) بر حسب درجه برابر است با: ***(5-1)360=1440***

بررسی امکان رسم ستاره ای از مرتبه n بدون برداشتن مداد از روی کاغذ

با بررسی چند حالت خاص کار را آغاز می کنیم. با آزمایش می توانید متوجه می شویم S_5 و S_7را می توان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد اما درباره S_6 و S_8این کار امکانپذیر نیست. این مسأله این حدس را به ذهن می رساند که این عمل درباره S_n ممکن است اگر و فقط اگر n عددی فرد باشد. حالا باید این نتیجه استقرایی را با کمک استدلال استنتاجی اثبات نماییم. توجه کنید که چون nعددی طبیعی است، یا فرد است یا زوج.

ابتدا رئوس nضلعی را از ۰ تا $n-1$ نامگذاری می کنیم. قطر های مورد نظر، قطرهایی هستند که فاصله بین دو سر آن ها دقیقاً یک رأس است. می توانیم رئوس nضلعی را رئوس گراف جهت دار G و قطر های مورد نظر را یال های جهت دار G فرض کنیم (از ۰ تا $n-1$). یال (قطر) e_n از رأس v_n به رأس v_i به طوری که $i=n+2$(به پیمانه n) متصل است. نامگذاری رئوس را از نقطه آغاز حرکت شروع می کنیم.

با توجه به آن که از v_0 حرکت آغاز شده است و گام حرکت نیز ۲ است، در اولین مرحله تمام رئوس دارای شماره زوج به اصطلاح *دیده می شوند*. اگر n فرد باشد، از آخرین رأس مرحله اول ($n-1$) به رأس شماره ۱ می رویم و در این مرحله (مرحله دوم) تمام رأس های فرد (تمام رأس های مانده) را می بینیم و به این ترتیب تمام یال ها (قطر ها) بدون برداشتن مداد از روی کاغذ رسم شدند. اما اگر n عددی زوج باشد، از آخرین رأس مرحله اول ($n-2$) به رأس شماره ۰ می رسیم که قبلاً آن را دیده بودیم. در این جا مجبوریم با برداشتن مداد از روی کاغذ به رأس شماره ۱ (یا هر رأس فرد (مانده) دیگری) رفته و مرحله دوم را از آن جا آغاز کنیم تا تمام رأس های فرد (مانده) در این مرحله دیده شوند و تمام یال ها (قطر ها) نیز رسم گردند. ■

به زبان نظریه گراف، اگر شکل را گرافی ساده فرض کنیم، به هر رأس دو یال (ضلع) وصل شده است، بنابراین دزجه هر رأس زوج (۲) است. از طرف دیگر اگر n فرد باشد، گراف حاصل گرافی همبند است، بنابراین گرافی اویلری بوده، امکان رسم آن بدون برداشتن قلم از روی صفحه وجود دارد، اما اگر n زوج باشد، ستاره مرتبه n گرافی ناهمبند است (بین دو رأس متوالی هیچ مسیری وجود ندارد.) بنابراین نمی تواند گرافی اویلری باشد و رسم آن بدون برداشتن از روی کاغذ ممکن نیست. (توجه کنید که نقاط برخورد خطوط در وسط ستاره رأس به حساب نمی آید، بنابراین ستاره مرتبه پنجم گرافی از مرتبه پنج است.)

نتیجه گیری

نگارنده ابتدا ستاره از مرتبه n (S_n) را به صورت ستاره واری nپر که شامل یک nضلعی در وسط و n مثلث بر روی اضلاع آن است تعریف کرده و سپس به بررسی برخی ویژگی های S_n پرداخت. ابتدا ثابت شد S_n اگر و فقط اگر [۴] $n>5$ وجود دارد. در مراحل بعد اثبات گردید تعداد ستاره های حاصل از برخورد قطرهای یک nضلعی محدب برابر $2^n - \sum_{i=0}^{4} C_i^n$ است. در ادامه ثابت شد که مجموع زوایای داخلی یک S_n (در صورت وجود شکل) برابر $360(n-1)$ است و در انتها اثبات گردید اگر و فقط اگر n فرد باشد، می توان S_n را بدون برداشتن مداد از روی کاغذ رسم کرد.

لازم به ذکر است در این مقاله تنها به بررسی برخی ویژگی های هندسی و ریاضیاتی ستاره های nپَر پرداخته شد و درباره مبانی فلسفی، تاریخی و دین شناسی این اشکال ستاره گونه بحثی انجام نشد.

منابع

۱. تابش، یحیی، جواد حاجی بابایی و آرش رستگار؛ *آموزش هنر حل مسئله: (ریاضیات تکمیلی)* ؛ اداره کل چاپ و توزیع کتاب های درسی، تهران: ۱۳۸۷.

۲. ویکی پدیا: دانشنامه آزاد.

3. Wikipedia: the free encyclopedia.

[۴] عبارت اگر و فقط اگر به معنای عبارت دو شرطی است.