



مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان
 دبیرستان استعدادهای درخشان شهید آژهای یک اصفهان (دوره اول)
 دبیرستان استعدادهای درخشان فرزنانگان امین دواصفهان (دوره اول)

هفدهمین کارسوق بزرگ ریاضیات (دوره مهرگان)

آزمون مرحله اول - نوبت دوم

جمعه ۶ اسفند ماه ۱۳۹۵

پاسخ سوال اول:

در ابتدا دقت کنید که در ردیف a عمودی باید سال طراحی جدول قرار بگیرد که چون بین ۱۹۰۰ تا ۱۹۸۰ است حتما دو رقم اولش ۱ و ۹ هستند. حال دقت کنید نوشته شده b عمودی باید با e افقی برابر باشد. یکانشان که مشترکند پس دهگانشان فقط باید با هم برابر باشد و دهگان e افقی ۹ است پس دهگان b عمودی هم باید ۹ باشد. پس به جدول زیر میرسیم:

۱	۹		
۹	x		

حال اگر به تو ضیحات d عمودی دقت کنید متوجه می شوید عدد d عمودی باید به صورت زیر باشد:

$$D = (\overline{9x} + 10) * 10 * 9 = (90 + x + 10) * 90 = (100 + x) * 90 = 9000 + 90x$$

از آنچه در بالا آمد دو نکته برداست می شود یکی اینکه این عدد D مضرب ۱۰ است و به صفر ختم می شود و یکی اینکه از ۹۰۰۰ بزرگتر است و با ۹ شروع می شود. پس به جدول زیر می رسمیم:

۱	۹		۹
۹	x		۷
			۰

حال دقت کنید C عمودی از f افقی ۲۰ تا بیشتر است پس یکنانش برابر و دهگانش دو عدد بیشتر است. یعنی جدول به صورت زیر می باشد:

۱	۹	y + 2	۹
۹	x	y	۷
			۰

حال جمع سن (یعنی $\overline{y\bar{y}}$) با سال تولد (یعنی $\overline{19(y+2)9}$) باید سال طراحی بشود که از ۱۹۸۰ کمتر است پس:

$$\overline{19(y+2)9} + \overline{y\bar{y}} < 1980 \Rightarrow y + 2 + y < 8 \Rightarrow y < 3$$

پس قاتل هنگام طراحی جدول یا ۰ یا ۱۱ یا ۲۲ سال سن داشته ۰ و ۱۱ که ممکن نیستند پس وی ۲۲ ساله بوده از طرفی اگر معادلات قبلی را هم در نظر بگیریم به جدول زیر میرسیم:

۱	۹	۴	۹
۹	۳	۲	۲
۷			۷
۱			۰

حال i افقی قطعا از f افقی یعنی ۲۲ کمتر است و طبق فرض از ۱۵ بیشتر است پس تنها گزینه برای دهگانش ۱ است. پس دهگان h عمودی هم یا ۱ و یا ۲ است ولی چون g افقی باید فرد باشد ۱ است. پس دهگان h عمودی و i عمودی یکی هستند ولی یکی ۹ واحد از دیگری بزرگتر است که تنها گزینه های ممکن ۱۰ و ۱۹ می باشند پس به جدول زیر میرسیم:

۱	۹	۴	۹
۹	۳	۲	۲
۷	۱	۱	۷
۱	۹	۰	۰

پاسخ سوال دوم:

از آنجایی که $3E\%10 = 7$ نتیجه می گیریم $E = 9$ در نتیجه داریم $AB + AC + AD = 199$ و اگر مجموع $B + C + D$ باقی مانده بر ۱۰ نداشته باشد $3A$ هیچ گاه نمی تواند بیش از ۱۹ بشود و مجموع $B + C + D$ حداکثر ۲۷ است در نتیجه تنها مقدار برای $B + C + D = 19$ است، در نتیجه داریم $3A + 1 = 19$ پس $A = 6$ است. مجموع این مقادیر برابر است با:

$$A + B + C + D + E = 6 + 19 + 9 = 34$$

پاسخ سوال سوم:

به $1 \times 2 \times \dots \times 1999 \times 2000$ طریق می توان کفش ها و جوراب ها را بدون در نظر گرفتن شرط لازم در یک ردیف چید. چون به ازای هر چینشی که نسبت به جایگاه یک کفش و جوراب معتبر است یک چینش نامعتبر وجود دارد (جای کفش و جوراب را برعکس کنید) و برعکس در نتیجه در نیمی از چینش ها جوراب مربوط به یک کفش خاص زودتر از آن در چینش آمده است در نتیجه به ازای کلیه کفش ها هر حالت معتبر را 2^{1000} بار برابر بیشتر شمرده ایم. در نتیجه تعداد کل چینش های معتبر برابر است با:

$$\frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 1999 \times 2000}{2^{1000}}$$

پاسخ سوال چهارم:

ادعا می کنیم بیش از ۳۰ نفر در میان مهمانان وجود ندارند که دست کم با یک نفر دست داده باشند. فرض کنید خلف آن صادق باشد، یعنی در میان مهمانان حداقل ۳۱ نفر هستند که هر کدام دست کم یک بار دست داده یک گروه ۳۱ نفره را به صورت زیر در نظر بگیرید. یکی از نفراتی که دست داده و کسانی که به او دست داده اند را یکی یکی به گروه اضافه کن تا جایی که تعداد اعضای گروه بیش از ۳۱ نشود. اگر همه ی آن ها اضافه شده بودند یک نفر جدید که دست کم یکبار دست داده و عضو گروه نیست را به گروه اضافه کن و همین رویه اضافه کردن افرادی که با آن دست داده اند را ادامه بده... در پایان یک گروه ۳۱ نفره ساخته می شود که هر عضو آن دست کم با یک نفر دیگر در آن گروه دست داده است که با فرض وجود دست کم یک فرد در هر گروه ۳۱ نفره که به هیچ کس دست نداده است در تناقض است.

پاسخ سوال پنجم:

$$ab + ac * bc = 11$$

$$ab * bc + ac = 14$$

$$(ab + ac)(bc + 1) = 25$$

می دانیم تنها روش تجزیه ۲۵ به اعداد بزرگتر از یک به صورت 5×5 است در نتیجه $bc = 4$