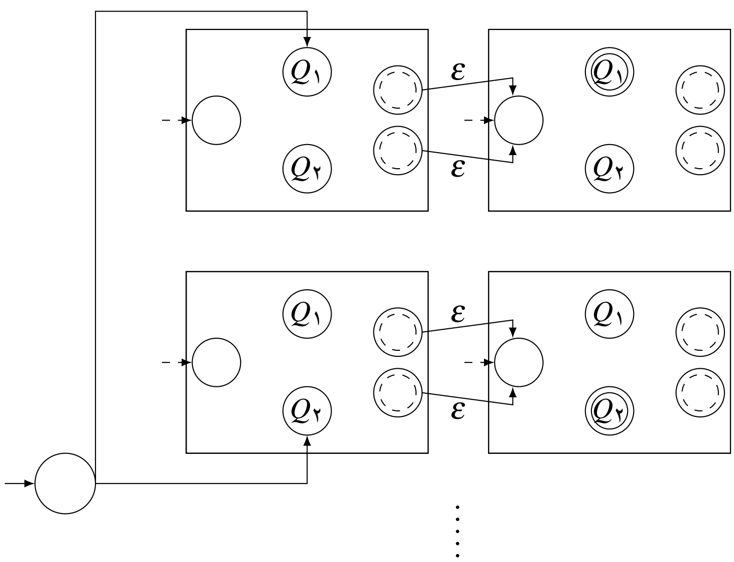
پاسخ‌های تمرین‌های ترکیبیات

جلسه‌ی پنجم و ششم و هفتم ـ نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

۱. از آن‌جایی که L منظم است، پس یک DFA مانند D دارد. یک کلمه در L در نظر بگیرید و فرض کنید در جایی از یک $state$ مانند Q عبور کند. اگر ما از Q شروع کرده و همان مسیر را تا یک $state$ اکسپت برویم و سپس از ابتدا شروع کرده و مسیر را تا Q برویم، یک کلمه از L' ساخته‌ایم. حال برای ساختن NFA برای L' به ازای هر $state$ از D مانند Q، دو نمونه از D در نظر می‌گیریم. $state$ آغاز را، Q در نمونه‌ی یکم در نظر می‌گیریم. به ازای هر $state$ اکسپت در D، یک یال از $state$ متناظر آن در نمونه‌ی یکم به $state$ آغاز D در نمونه‌ی دوم با نماد ε می‌کشیم. در انتها وضعیت اکسپت را، وضعیت Q در نمونه‌ی دوم می‌گذاریم.

حال تمام این نمونه‌های دوتایی را در نظر گرفته و با اضافه کردن یک $state$ آغاز به مجموعه و وصل کردن آن با یال ε به $state$ آغاز تمام نمونه‌های دوتایی، کار را پایان می‌دهیم. شکل کلی به صورت زیر است. هر یک از مستطیل‌ها، یک نمونه از D هستند. $state$ های نقطه‌چین‌دار، $state$ های اکسپت در D هستند که لزومن اکنون اکسپت نیستند. یال‌های نقطه‌چین دار نیز، مشخص‌کننده وضعیت آغاز در D هستند که لزومن اکنون وضعیت آغاز نیستند.



۲. آ) می‌توانید با روش گفته شده در کلاس، عبارت منظم را از روی $GNFA$ به دست آورید؛ امّا با کمی دقت در می‌یابیم که تنها با در نظر گرفتن دو $state$ سمت چپ NFA، این ماشین تمام کلماتی را تولید می‌کند که به ۱ ختم می‌شوند و هم‌چنین تمام کلمات تولیدی این NFA به ۱ ختم می‌شوند. پس پاسخ برابر Σ^*1 است.

ب) فرض کنید S_n نمایشی شبه منظم برای L_n باشد. نمایش زیر، یک نمایش شبه منظم برای $L_{n+۱}$ است:

$$\left((S_n)^* a_n\right) \cap \left(\left(a_۰ \cup a_۱ \cup \ldots \cup a_{n-۲}\right)^* a_{n-۱} \left(a_۰ \cup a_۱ \cup \ldots \cup a_{n-۲}\right)^* a_{n-۱} a_n\right)$$

اگر T_n سایز S_n باشد، ما نمایشی ساختیم که طول آن از رابطه‌ی $T_{n+۱} = T_n + O(n)$ به دست می‌آید. پس $T_n \in O(n^۲)$ خواهد بود.

توجه: در نمایش بالا برای سادگی نمایش در اجتماع، پرانتزها به درستی گذاشته نشده است. البته اگر به درستی نیز گذاشته شوند، تعداد کاراکترهای جدید $O(n)$ خواهد بود.

۳. آ) فرض کنید این زبان منظم باشد. پس طبق لم پامپینگ، عدد p با شرایط لم وجود دارد. کلمه‌ی $۰^{p^۲}$ را در نظر بگیرید. طبق لم باید این کلمه بتواند به صورت xyz با شرایط لم نوشته شود. کلمه‌ی $xy^۲z$ باید عضو زبان باشد و از طرفی طول آن از $p^۲$ بیش‌تر و از $(p+۱)^۲$ کم‌تر است، زیرا $|y| > ۰$ و $|xy| \leq p$. پس این کلمه عضو زبان نیست؛ زیرا طول آن نمی‌تواند مربع کامل باشد.تناقض حاصل، حکم را ثابت می‌کند.

ب) فرض کنید این زبان منظم باشد. پس طبق لم پامپینگ، عدد p با شرایط لم وجود دارد. کلمه‌ی $a^p b^{p+p!} c^{p+p!}$ را در نظر بگیرید. این کلمه در زبان است و طبق لم باید این کلمه بتواند به صورت xyz با شرایط لم نوشته شود. فرض کنید $|y| = k$ باشد. کلمه‌ی $xy^{\frac{p!}{k}+۱}z$ باید عضو زبان باشد و از آن‌جایی که y فقط شامل حرف a است (زیرا $|xy| \leq p$)، این کلمه برابر با $a^{p+p!} b^{p+p!} c^{p+p!}$ است. پس این کلمه عضو زبان نیست و تناقض حاصل، حکم را ثابت می‌کند.

پ) فرض کنید این زبان منظم باشد. پس طبق لم پامپینگ، عدد p با شرایط لم وجود دارد. یک کلمه به طول حداقل p در این زبان در نظر بگیرید و فرض کنید طول آن برابر q باشد. طبق لم باید این کلمه بتواند به صورت xyz با شرایط لم نوشته شود. فرض کنید $|y| = k$ باشد. $k > ۰$ است؛ پس k در نمایش مبنای ۳ خود، دست کم یک رقم ناصفر دارد که طبق تعریف برابر ۱ است. سمت راست‌ترین رقم ۱ در نمایش دودویی k را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن این رقم، دست کم یکی از دو عدد $q+k, q+۲k$ کانتور نیستند؛ در حالی که طبق لم هر دو باید عدد کانتور باشند. تناقض حاصل، حکم را ثابت می‌کند.

۴. آ) گرامر زیر به وضوح زبان خواسته شده را می‌سازد. D برای کلماتی است که تعداد حروف در دو طرف #

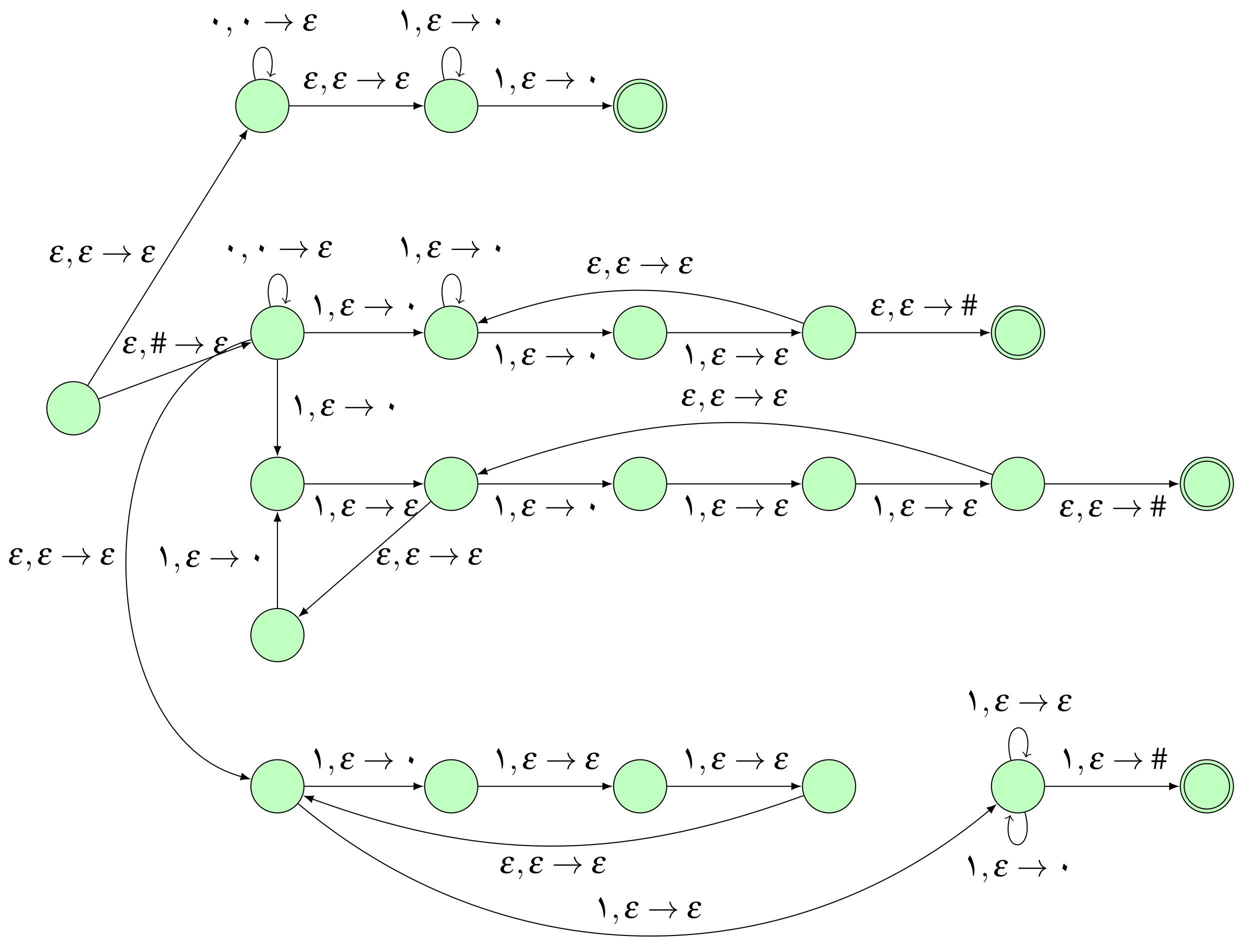
یک‌سان نیست.

$$
\begin{aligned}
S &\to ۰S۰|۱S۱|A|D\\
A &\to ۰B۱|۱B۰\\
B &\to CBC|\#\\
C &\to ۰|۱\\
D &\to CDC|E\#|\#E\\
E &\to CE|C
\end{aligned}
$$

ب) گرامر زیر، زبان خواسته شده را می‌سازد. A برای کلماتی است که تعداد حرف‌های در دو طرف # برابر نیست. B برای کلماتی است که یا تعداد حروف دو طرف # برابر نباشد و یا یک رقم ۰ در سمت چپ # باشد که رقم متناظر آن در سمت راست برابر ۱ باشد. C نیز برای کار مشابه B با جابه‌جایی ۰ و ۱ است. برای فهم بیش‌تر، روند ساختن کلمات در این متغیرها رو به شکل شماتیک روی کاغذ بنویسید.

$$
\begin{aligned}
S &\to A|B۱E|C۰E\\
A &\to DAD|DE\#|\#DE\\
B &\to DBD|۰E\#\\
C &\to DCD|۱E\#\\
D &\to ۰|۱\\
E &\to DE|\varepsilon
\end{aligned}
$$

۵. در PDA زیر، شاخه‌ی بالا رشته‌های با خاصیت $m < n$، شاخه‌ی دوم رشته‌های با خاصیت $n < m < ۲n$، شاخه‌ی سوم رشته‌های با خاصیت $۲n < m < ۳n$ و شاخه‌ی چهارم رشته‌های با خاصیت $m > ۳n$ را می‌سازد.



۶. آ) نادرست است. یک زبان نامنظم دل‌خواه در نظر بگیرید. طبق قضیه‌ی گفته شده در کلاس، مکمل آن نیز باید نامنظم باشد. اجتماع این دو زبان، زبان Σ^* را می‌سازد که منظم است.

ب) نادرست است، فرض کنید یک زبان شامل تمام رشته‌های $a^ib^jc^k$ باشد که $i = j$ و زبانی دیگر شامل تمام رشته‌های $a^ib^jc^k$ باشد که $j = k$. هر دو زبان مستقل از متن هستند، اما اشتراک آن‌ها کلماتی به صورت $a^nb^nc^n$ می‌سازد که این زبان، مستقل از متن نیست (مستقل از متن نبودن این زبان جزء مطالب تدریس شده نیست).

پ) درست است. یک PDA بسازید و به ازای هر زوج مرتب از رئوس ماشین‌های دو زبان (یکی PDA و یکی NFA)، یک رأس بگذارید. اگر در NFA از P به Q یال a و در PDA از P' به Q' یال $a, \alpha \to \beta$ وجود داشت، یال $a, \alpha \to \beta$ را در PDA حاصل از (P, P') به (Q, Q') می‌کشیم. عملن در PDA حاصل، هر

کلمه به طور هم‌زمان در هر دو ماشین اولیه در حال پیمایش است. $state$ آغازین را $(start_{NFA}, start_{PDA})$ گذاشته و $state$ هایی را اکسپت می‌کنیم که رئوس متناظر آن‌ها در هر دو ماشین، ACC باشد.

ت) درست است. گرامر زبان L را در نظر بگیرید و به ازای هر قانون، رشته‌ی سمت راست قانون را وارون کنید. گرامر حاصل L' را می‌سازد.