گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

ریاضی ۲

- فصل ۱

الگو و دنباله

تعدادی از اعداد که به‌صورت یک رشته، پشت سر هم نوشته شده باشند را یک دنباله از اعداد می‌نامند. به عبارت دیگر دنباله تابعی است که دامنه‌ی آن فقط اعداد طبیعی باشد. جمله‌ی n ام دنباله را جمله‌ی عمومی دنباله می‌نامند. مثلاً:

$$a_1=\frac{1}{2}\ ,\ a_2=\frac{2}{3}\ ,a_3=\frac{3}{4},...,\ a_n=\frac{n}{n+1}\ ,...$$

$$a_1=0\ ,\ a_2=\frac{3}{5}\ ,\ a_3=\frac{8}{10}\ ,...,a_n=\frac{n^2-1}{n^2+1},...$$

$$a_1=\frac{\sin 1}{1+\cos 1}\ ,\ a_2=\frac{\sin 2}{1+\cos 2},...,a_n=\frac{\sin n}{1+\cos n},...$$

دنباله حسابی:

اگر هر جمله‌ی دنباله، غیر از جمله‌ی اول، مجموع جمله‌ی قبلی با یک مقدار ثابت باشد، دنباله را دنباله‌ی حسابی می‌نامند. این مقدار ثابت را قدرنسبت می‌نامند.

$$a\ ,\ a+d\ ,\ a+2d\ ,\ a+3d\ ,\ a+4d\ ,\ ...$$

+d +d +d +d +d

$a_n=a+(n-1)d$: جمله‌ی عمومی دنباله

اگر $d>0$ باشد، دنباله صعودی (در حال افزایش) و اگر $d<0$ دنباله نزولی (در حال کاهش) است.

☜ مثال: جمله سوم یک دنباله حسابی برابر ۸ و جمله هفتم آن برابر ۳۲ می‌باشد. جمله‌ی یازدهم کدام است؟

✍حل:

$$\left.\begin{array}{l}a_3=a+2d=8\\ a_7=a+6d=32\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{از هم کم می کنیم}}4d=24\rightarrow\ d=6\rightarrow\ a+2\times6=8\rightarrow\ a=-4$$

$$a_{11}=a+10d=-4+10\times6=56$$

نکته: با داشتن ۲ جمله متفاوت از دنباله حسابی می‌توان قدرنسبت آن را به‌دست آورد:

$$\left.\begin{array}{l}a_n=a+(n-1)d\\ a_m=a+(m-1)d\end{array}\right\}\Rightarrow\ a_m-a_n=(m-n)d\Rightarrow\ d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$$

☜ مثال: شیر آبی در هر دقیقه ۳/۵ لیتر آب وارد حوض می‌کند. اگر این حوض از ابتدا ۲۵ لیتر آب داشته باشد، پس از گذشت چند دقیقه آب حوض ۱۰۲ لیتر می‌شود؟

✍حل:

چون در هر دقیقه مقدار ثابتی آب وارد حوض می‌شود، لذا حجم آب در هر دقیقه، تشکیل دنباله عددی می‌دهد.

حجم آب موجود در دقیقه n ام: $a_n=25+3/5\,n$

$$\Rightarrow\ 102=25+3/5\,n\Rightarrow\ \frac{7}{2}n=77\Rightarrow\ n=22$$

در دقیقهٔ ۲۲ ام این‌گونه می‌شود.

☜ مثال: در یک دنباله حسابی $a_1+a_4+a_7=8$ و $a_4+a_7+a_{10}=2$، قدرنسبت این دنباله کدام است؟

✍حل:

$$\left.\begin{array}{l}a_1+a_4+a_7=8\\ a_4+a_7+a_{10}=2\end{array}\right\}\Rightarrow\ a_{10}-a_1=-6\rightarrow\ (a_1+9d)-a_1=-6\Rightarrow\ d=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}$$

☜ مثال: در دنباله حسابی $2, \frac{7}{4}, ...$ جملات $a_4, a_8, a_{12}, ...$ دنباله حسابی دیگری تشکیل می‌دهند. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

✍حل:

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = \frac{7}{4} \Rightarrow d = a_2 - a_1 = -\frac{1}{4}$$

در دنباله جدید داریم:

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = a_4 = a_1 + 3d \\ t_2 = a_8 = a_1 + 7d \end{array}\right\} \Rightarrow t_2 - t_1 = 4d = 4 \times (-\frac{1}{4}) = -1$$

☜ مثال: بین ۲ عدد ۵ و ۴۰۵ سه جمله درج کرده‌ایم. اگر این ۵ جمله تشکیل دنباله حسابی دهند، قدرنسبت دنباله چقدر است؟

✍حل:

$$\underbrace{5}_{a}, \underbrace{\quad}_{a+d}, \underbrace{\quad}_{a+2d}, \underbrace{\quad}_{a+3d}, \underbrace{405}_{a+4d}$$

$$a + 4d = 405 \rightarrow 5 + 4d = 405 \rightarrow d = 100$$

☜ مثال: اگر در یک دنباله حسابی $a_3 = 7$ ، $a_{16} = 46$ و $a_{11} = 31$ باشد، a_8 کدام است؟

✍حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = a_1 + 2d \\ a_{16} = a_1 + 15d \end{array}\right\} \Rightarrow a_3 + a_{16} = 2a_1 + 17d$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} = a_1 + 10d \\ a_8 = a_1 + 7d \end{array}\right\} \Rightarrow a_{11} + a_8 = 2a_1 + 17d \Rightarrow a_{11} + a_8 = a_3 + a_{16} \Rightarrow a_8 = 7 + 46 - 31 = 22$$

✍ نکته: اگر در دنباله حسابی، $m + n = p + q$ باشد، آنگاه $a_m + a_n = a_p + a_q$

$$\left.\begin{array}{l} a_m + a_n = a_1 + (m-1)d + a_1 + (n-1)d \\ a_p + a_q = a_1 + (p-1)d + a_1 + (q-1)d \end{array}\right\} \Rightarrow m + n = p + q$$

$$\Rightarrow a_m + a_n = 2a_1 + (m+n-2)d = 2a_1 + (p+q-2)d = a_p + a_q$$

حل مثال فوق با این نکته:

$$a_3 + a_{16} = a_{11} + a_8 \Rightarrow 7 + 46 = 31 + a_8 \rightarrow a_8 = 22$$

✍ نکته: اگر سه عدد a، b و c تشکیل دنباله عددی دهند، آن‌گاه داریم: $b = \frac{a+c}{2}$

☜ مثال: اگر $1+2x$ ،$2+x$ و $1-x$ تشکیل دنباله‌ی عددی دهند، x کدام است؟

✍حل:

$$2 + x = \frac{1 - x + 1 + 2x}{2} = \frac{2 + x}{2} \Rightarrow 4 + 2x = 2 + x \Rightarrow x = -2$$

☜ مثال: اگر زاویه‌های مثلثی را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم، یک دنباله‌ی حسابی تشکیل می‌شود، نشان دهید که یکی از زاویه‌های این مثلث $60°$ است.

✍حل:

اگر زاویه‌ها را x، y و z بنامیم، داریم:

$$y = \frac{x+z}{2} \Rightarrow x + z = 2y$$

از طرفی در مثلث $x + y + z = 180°$ است. پس:

$$y + (x + z) = y + 2y = 180° \Rightarrow y = 60°$$

دنباله هندسی:

دنباله‌ای که هر جمله‌ی آن غیراز جمله‌ی اول، حاصل‌ضرب جمله‌ی قبلی در یک عدد ثابت باشد را دنباله هندسی می‌نامند. این عدد ثابت، قدرنسبت نامیده می‌شود.

$$a , aq , aq^{2} , aq^{3} , \dots , \underbrace{aq^{n-1}}_{t_n}$$

* برای $q \geq 1$ دنباله صعودی و برای $0 \leq q \leq 1$ دنباله نزولی است. $q < 0$ دنباله را نوسانی می‌کند. $(a > 0)$

$$2 , 6 , 18 , 54 , \dots$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

برای $a < 0$، احکام فوق بالعکس می‌باشند.

☜ مثال: در یک دنباله هندسی حاصل‌ضرب جمله چهارم و هشتم برابر ۸ است. جمله ششم این دنباله کدام است؟

✍حل:

$$aq^{3} \times aq^{7} = 8 \to a^{2}q^{10} = 8 \to aq^{5} = \pm 2\sqrt{2} \to t_6 = aq^{5} = \pm 2\sqrt{2}$$

☜ مثال: اگر جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

✍حل:

$$\underbrace{(a+3d)}_{a_0}\underbrace{(a+5d)}_{a_0 q}\underbrace{(a+11d)}_{a_0 q^{2}}$$

$$a_0 \times a_0 q^{2} = (a_0 q)^{2} \to (a+5d)^{2} = (a+3d)(a+11d) \to \cancel{a^{2}} + 25d^{2} + 10ad = \cancel{a^{2}} + 14ad + 33d^{2} \to 8d^{2} + 4ad = 0$$

$$4d(2d+a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ -2d = a \Rightarrow q = \dfrac{a+5d}{a+3d} = \dfrac{3d}{d} = 3 \end{cases}$$

☜ مثال: وقتی می‌گویند در یک کشور نرخ رشد سالیانه جمعیت ۳ درصد است، یعنی جمعیت آن کشور در هر سال به میزان ۳ درصد جمعیت سال قبل افزایش می‌یابد. اگر کشوری با نرخ رشد سالیانه ۳ درصد هم اکنون ۵۰ میلیون جمعیت داشته باشد. جمعیت این کشور ۵ سال بعد چقدر خواهد بود؟

✍حل:

جمعیت سال دوم: $50 + \frac{3}{100} \times 50 = \frac{103}{100} \times 50$

جمعیت سال سوم: $\frac{103}{100} \times 50 + \frac{3}{100} \times (\frac{103}{100} \times 50) = (\frac{103}{100})^{2} \times 50$

$\vdots$

جمعیت سال n ام: $(\frac{103}{100})^{n-1} \times 50$

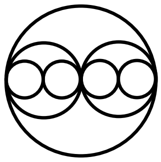
پس جمعیت سال ۵ ام برابر است با:

$$(\frac{103}{100})^{4} \times 50 = 56/275441$$

یعنی جمعیت سال ۵ ام، ٥٦ میلیون و ٢٧٥ هزار و ٤٤١ نفر خواهد بود.

مثال: اگر دوایری را مانند شکل مقابل درون هم محاط کنیم، مساحت دایره‌ای که در مرحله‌ی n ام محاط می‌شود، چقدر است؟

حل:



مساحت دایره‌ی اول: $S_۱ = \pi R^۲$

مساحت دایره‌ی دوم: $S_۲ = \pi(\frac{R}{۲})^۲ = \frac{\pi R^۲}{۴}$

مساحت دایره‌ی سوم: $S_۳ = \pi(\frac{R}{۴})^۲ = \frac{\pi R^۲}{۱۶}$

$\vdots$

مساحت دایره‌ی n ام: $S_n = \frac{\pi R^۲}{۴^{n-۱}}$

مساحت‌ها تشکیل دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{۱}{۴}$ می‌دهد.

مثال: در یک دنباله هندسی حاصل‌ضرب ۷ جمله‌ی اول $(۱۲۸)^۲$ است. جمله چهارم دنباله کدام است؟

حل:

$$a.aq.aq^۲.aq^۳.aq^۴.aq^۵.aq^۶ = (۱۲۸)^۲ = (۲^۷)^۲$$

$$a^۷.(q^{۱+۲+۳+۴+۵+۶}) = ۲^{۱۴} \rightarrow a^۷(q^{\frac{۶(۶+۱)}{۲}}) = ۲^{۱۴} \rightarrow a^۷(q^۳)^۷ = ۲^{۱۴} \rightarrow aq^۳ = ۲^۲ = ۴ = t_۴$$

مثال: بین ۲ عدد ۴۰۵ و ۵ سه جمله درج کرده‌ایم. اگر این ۵ جمله تشکیل دنباله هندسی دهند، قدرنسبت دنباله چقدر است؟

حل:

$$\underbrace{۵}_{a}, \underbrace{\quad}_{aq}, \underbrace{\quad}_{aq^۲}, \underbrace{\quad}_{aq^۳}, \underbrace{۴۰۵}_{aq^۴}$$

$$\left.\begin{matrix} aq^۴ = ۴۰۵ \\ a = ۵ \end{matrix}\right\} \Rightarrow q^۴ = \frac{۴۰۵}{۵} = ۸۱ \rightarrow q^۴ = ۸۱ \rightarrow q = \pm ۳ \Rightarrow \begin{cases} ۵, ۱۵, ۴۵, ۱۳۵, ۴۰۵ \\ ۵, -۱۵, ۴۵, -۱۳۵, ۴۰۵ \end{cases}$$

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی اگر $a_۳ = ۳$، $a_۶ = ۲۴$ و $a_{۱۱} = ۷۶۸$، $a_۸$ کدام است؟

حل:

$$\left.\begin{matrix} a_۳ = aq^۲ = ۳ \\ a_۶ = aq^۵ = ۲۴ \\ a_{۱۱} = aq^{۱۰} = ۷۶۸ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_۳a_{۱۱} = aq^۲ \times aq^{۱۰} = ۳ \times ۷۶۸ = a^۲q^{۱۲} = aq^۵ \times (aq^۷) \rightarrow a_۸ = aq^۷ = \frac{a^۲q^{۱۲}}{aq^۵} = \frac{۳ \times ۷۶۸}{۲۴} = ۹۶$$

نکته: اگر $m + n = p + q$، آنگاه $a_m a_n = a_p a_q$

حل مثال قبل با این نکته:

$$a_۳ \times a_{۱۱} = a_۶ \times a_۸ \rightarrow ۳ \times ۷۶۸ = ۲۴ a_۸ \rightarrow a_۸ = ۹۶$$

نکته: اگر a، b و c سه جمله متوالی دنباله‌ی هندسی باشند، $b^۲ = ac$ و اگر a، b و c سه جمله متوالی دنباله‌ی حسابی باشند $۲b = a + c$

مثال: در دنباله‌ی زیر x را به‌گونه‌ای تعیین کنید تا دنباله، دنباله‌ی هندسی باشد.

حل:

$$۱ - x, x, ۱ + x$$

$$x^۲ = (۱ - x)(۱ + x) = ۱ - x^۲ \Rightarrow ۲x^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

☜ مثال: اگر سه عدد مثبت x، y و z جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، $\log x$، $\log y$ و $\log z$ جملات چگونه دنباله‌ای می‌باشند؟

✍حل:

$y^{2} = xz \rightarrow \log y^{2} = \log xz \rightarrow 2\log y = \log x + \log z \Rightarrow$ دنباله حسابی است

نزدیک شدن جملات دنباله به یک عدد:

اگر جملات دنباله‌ای را از یک عدد معین کم کنیم و جملات حاصل به صفر نزدیک شوند، گوییم جملات آن دنباله به آن عدد نزدیک می‌شوند.

مثلاً در تقسیم ۱ بر ۳، خارج قسمت‌ها از ۱ رقم تا n رقم، دنباله‌ی زیر را تشکیل می‌دهند.

۰/۳,۰/۳۳,۰/۳۳۳,...

$\frac{1}{3} - 0/3 = \frac{1}{30}$

$\frac{1}{3} - 0/33 = \frac{1}{300}$

$\frac{1}{3} - 0/333 = \frac{1}{3000}$

هر چقدر این کار را ادامه دهیم، جملات دنباله به $\frac{1}{3}$ نزدیک‌تر می‌شوند.

☜ مثال: هر یک از دنباله‌های زیر به چه عددی نزدیک می‌شود؟

الف) ۰/۹,۰/۹۹,۰/۹۹۹,...

این دنباله به ۱ نزدیک می‌شود.

ب) ۰/۴,۰/۴۴,۰/۴۴۴,...

این دنباله حاصل ضرب جملات دنباله فوق در $\frac{4}{9}$ است، لذا جملات آن نیز به $1\times\frac{4}{9}$ نزدیک می‌شود.

ج) ۱/۱۹ , ۱/۱۹۹,...

این دنباله به ۱/۲ نزدیک می‌شود.

دنباله‌ی تقریبات اعشاری:

برای هر عدد حقیقی مثبت x می‌توان دنباله‌ای از اعداد اعشاری ساخت که جملات آن به x نزدیک می‌شوند. جمله‌ی n ام این دنباله یک عدد اعشاری با n رقم اعشار است و هر جمله آن با اضافه شدن یک رقم اعشار به جمله‌ی قبلی به‌دست می‌آید. این دنباله را دنباله‌ی تقریبات اعشاری x می‌نامند. و جمله‌ی n ام آن را تقریب اعشاری x با n رقم اعشار می‌نامند.

☜ مثال: دنباله‌ی تقریبات اعشاری $\frac{11}{6}$ را به‌دست آورید.

✍حل:

اگر قسمتی از محور اعداد را که بین ۱ و ۲ واقع است، به ده قسمت تقسیم کنیم، داریم: $1/8 < \frac{11}{6} < 1/9$

اگر با بزرگ‌نمایی فاصله بین نقاط متناظر، فاصله‌ها را مجدداً به ده قسمت تقسیم کنیم داریم: $1/83 < \frac{11}{6} < 1/84$

به همین ترتیب با تقسیم مجدد فاصله‌ها به ده قسمت داریم: $1/833 < \frac{11}{6} < 1/834$

لذا دنباله تقریبات اعشاری $\frac{11}{6}$ عبارت است از: ۱/۸ , ۱/۸۳ , ۱/۸۳۳ , ۱/۸۳۳۳ , ...

☜ مثال: اگر x عددی باشد که در نامعادلات زیر صدق کند، چهار جملهٔ اول دنباله تقریبات اعشاری آن را بنویسید.

$$2x+1<8/1316 \qquad 4-x<0/4343$$

✍حل:

$$3/5657<x<3/5658$$

$3/5657$, $3/565$, $3/56$, $3/5$: چهار جملهٔ اول دنباله

دقت کنید که فقط ٤ جمله از این دنباله را می‌توانیم به قطعیت بیان کنیم.

☜ مثال: اگر در دنباله تقریبات اعشاری $\sqrt{2}$، جملهٔ پنجم برابر ۱/٤۱٤۲۱ باشد، دنبالهٔ تقریبات اعشاری عدد $10\sqrt{2}$ را تا چند رقم اعشار می‌توانیم بنویسیم؟

✍حل:

$$1/41421<\sqrt{2}<1/41422 \Rightarrow 14/1421<10\sqrt{2}<14/1422$$

پس $10\sqrt{2}$ را تا ٤ رقم اعشار می‌توانیم بنویسیم.

ریشه‌گیری اعداد حقیقی:

عدد حقیقی b را یک ریشهٔ kام عدد حقیقی a نامیم هرگاه: $b^k=a$

اگر k زوج باشد، فقط اعداد نامنفی ریشهٔ kام دارند و اگر b یک ریشهٔ kام عدد نامنفی a باشد، آن‌گاه $-b$ نیز یک ریشهٔ kام عدد نامنفی a است، زیرا: $(-b)^k=(b)^k=a$ ریشهٔ kام عدد a را با $\sqrt[k]{a}$ نمایش می‌دهند.

دامنه تعریف $\sqrt[k]{a}$: k زوج $a\geq 0$ ، k فرد $a\in\mathbb{R}$

عبارت $\sqrt[k]{a}$ در حالتی که k زوج و a منفی است، معنا ندارد و تعریف نشده است.

خواص ریشه:

۱) $\sqrt[k]{a^k}=\begin{cases} a & \text{فرد } k \\ |a| & \text{زوج } k \end{cases}$

۲) $(\sqrt[k]{a})^k=a$

به شرط آن‌که عبارات تعریف شده باشند:

۳) $\sqrt[k]{ab}=\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}$

٤) $\sqrt[k]{a^m}=(\sqrt[k]{a})^m$

البته در حالتی‌که $a<0$ و m و k زوج باشند، عبارت سمت راست لازم است با قدرمطلق بیان شود:

$$\sqrt[k]{a^m}=(\sqrt[k]{|a|})^m$$

۵) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$

توان‌رسانی با اعداد گویا:

برای یک عدد حقیقی مثبت a و عدد گویای $r=\frac{p}{n}$ که p عددی صحیح و n یک عدد طبیعی است، a^r که توان r ام a نام دارد به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$a^r=a^{\frac{p}{n}}=\sqrt[n]{a^p}$$

مثلاً: $\sqrt[10]{8}=\sqrt[10]{2^3}=2^{\frac{3}{10}}=(2^2)^{\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}}=(\sqrt{2})^{\frac{3}{5}}$

نکته: اگر p یک عدد صحیح و n یک عدد طبیعی باشد، برای یک عدد طبیعی k داریم:

$$\frac{p}{n}=\frac{kp}{kn}$$

لذا: $a^{\frac{p}{n}}=a^{\frac{kp}{kn}}\quad (a>0)$

قوانین توان‌رسانی توان‌های صحیح برای توان‌های گویا نیز برقرار است.

اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و r و s دو عدد گویا باشند، داریم:

$$a^{r+s}=a^r a^s$$

$$(a^r)^s=a^{rs}$$

$$(ab)^r=a^r b^r$$

$$a^{-r}=\frac{1}{a^r}$$

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

نکته:

$$\begin{cases}0<a<1\Rightarrow a^n<a\\ a>1\Rightarrow a^n>a\end{cases}$$

نکته:

درصورت تعریف شدن عبارات، داریم:

$$a\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a^m b}$$

چون

$$a\sqrt[m]{b}=ab^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{m}{m}}b^{\frac{1}{m}}$$

$$=(a^m b)^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{a^m b}$$

توان‌رسانی با توان اعداد حقیقی:

توان bام a را با a^b نشان می‌دهند. توجه داشته باشید که در توان‌رسانی، پایه همواره عددی مثبت است ولی نما هر عددی می‌تواند باشد.

قوانین توان‌رسانی به توان اعداد گویا برای توان‌رسانی به توان اعداد حقیقی هم برقرارند.

اگر a و c اعداد حقیقی مثبت باشند و b و d اعداد حقیقی دلخواه باشند:

$$a^{b+d}=a^b a^d \qquad a^{b-d}=\frac{a^b}{a^d}$$

$$(a^b)^d=a^{bd}$$

$$(ac)^b=a^b c^b \qquad (\frac{a}{c})^b=\frac{a^b}{c^b}$$

☜ مثال: حاصل عبارات زیر را حساب کنید.

الف) $\sqrt[3]{2\sqrt[5]{2\sqrt{2}}}=$

$\sqrt[3]{\sqrt[5]{2^5\times 2\sqrt{2}}}=\sqrt[15]{2^6\sqrt{2}}=\sqrt[15]{\sqrt{2^{13}}}=\sqrt[30]{2^{13}}$

ب) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{\sqrt{2}+1}\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}=$

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{\sqrt{2}+1}\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{\sqrt{2}+1}\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\sqrt{2}+1}=(3-2)^{\sqrt{2}+1}=1^{\sqrt{2}+1}=1$

ج) $\sqrt{32}-2\sqrt{18}+3\sqrt{72}-\sqrt{8}=$

$4\sqrt{2}-2\times3\sqrt{2}+3\times3\times2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=4\sqrt{2}-6\sqrt{2}+18\sqrt{2}-2\sqrt{2}=14\sqrt{2}$

د) $(\sqrt{15}^{(2-\sqrt{2})})^{(2+\sqrt{2})}=(\sqrt{15})^{4-2}=\sqrt{15}^{2}=15$

ط) $\sqrt[3]{-4\sqrt{8}}=\sqrt[3]{-2^2\times2^{\frac{3}{2}}}=-\sqrt[3]{2^{\frac{7}{2}}}=-(2^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}}=-2^{\frac{7}{6}}=-\sqrt[6]{2^7}$

ظ) $\sqrt{\sqrt{2}+1}\times\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}$

$=\sqrt{\sqrt{2}+1}\times\sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{\sqrt{2}+1}\times\sqrt{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2-1}=1$

ن) $(\frac{1}{4})^{\sqrt{3}-2}\times2^{(2\sqrt{3}+4)}$

$(2^{-2})^{\sqrt{3}-2}\times2^{2\sqrt{3}+4}=2^{-2\sqrt{3}+4}\times2^{2\sqrt{3}+4}=2^{4+4}=2^{8}=256$

و) $(3\sqrt[10]{32}+\sqrt[6]{128}-\sqrt{18})^{42}=$

$(3\sqrt[10]{2^5}+\sqrt[6]{2^7}-\sqrt{18})^{42}=(3\sqrt{2}+2\sqrt[6]{2}-3\sqrt{2})^{42}=(2^{\frac{7}{6}})^{42}=2^{\frac{7}{6}\times42}=2^{7\times7}=2^{49}$

☜ مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$x^{\sqrt{2}}=2$

✍حل:

دو طرف را به توان $\sqrt{2}$ می‌رسانیم:

$(x^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}}\Rightarrow x^2=2^{\sqrt{2}}\Rightarrow x=(2^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ یا $\sqrt{2^{\sqrt{2}}}$

☜ مثال: اگر $a=3^{\sqrt{8}}$ و $b=9^{\sqrt{2}-1}$، بین a و b چه رابطه‌ی برقرار است؟

✍حل:

$a=3^{2\sqrt{2}}$ $\quad b=3^{2(\sqrt{2}-1)}=3^{2\sqrt{2}-2}=3^{2\sqrt{2}}\times3^{-2}=\frac{3^{2\sqrt{2}}}{3^2}=\frac{3^{2\sqrt{2}}}{9}\Rightarrow 3^{2\sqrt{2}-2}=\frac{3^{2\sqrt{2}}}{9}$

$\Rightarrow b=\frac{a}{9}\Rightarrow a=9b$