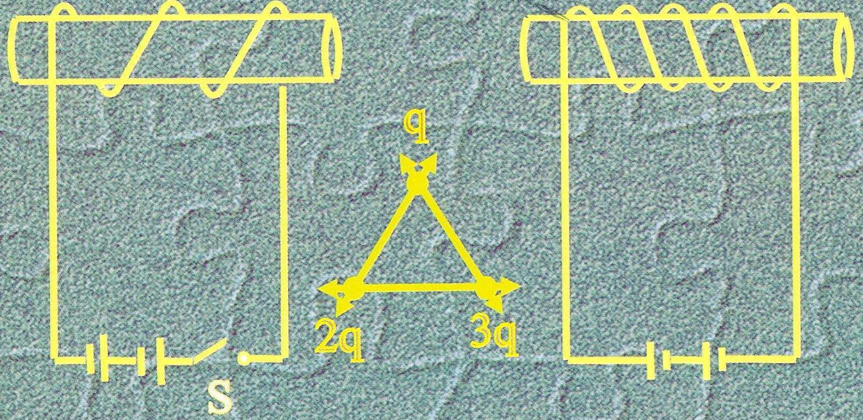
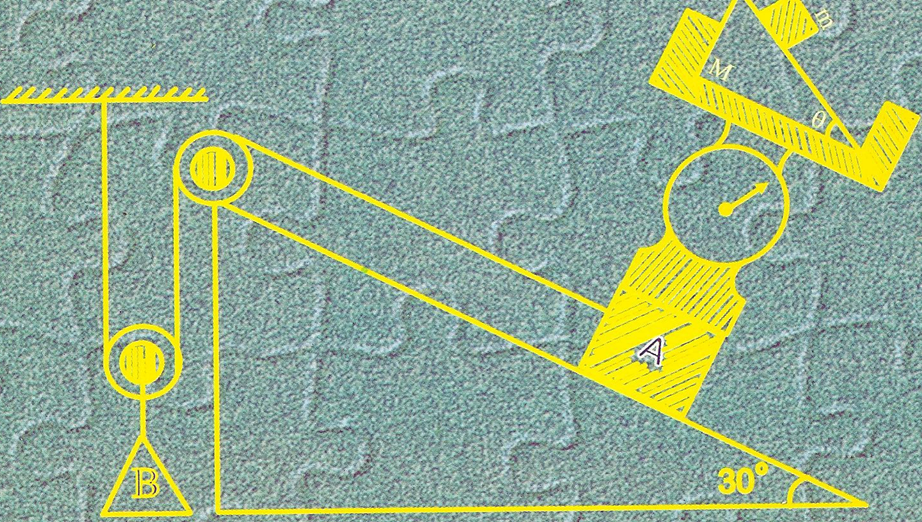
آزمون های تابستانی

المپیاد فیزیک

تابستان ۱۳۷۶ تا ۱۳۷۹





دکتر محمود بهمن آبادی

بسم الله الرحمن الرحيم

آزمون‌های تابستانی

المپیاد فیزیک

با پاسخهای تشریحی

تابستان ۱۳۷۶ تا ۱۳۷۹

مؤلّف: دکتر محمود بهمن آبادی

بهمن‌آبادی، محمود، ۱۳۴۳،
آزمون‌های تابستانی المپیاد فیزیک با پاسخ‌های تشریحی (تابستان ۱۳۷۶ تا ۱۳۷۷) مؤلف محمود بهمن‌آبادی؛ مدیر اجرایی محمد زنگنه ـ تهران: عطیه، ۱۳۸۳.
۲۶۹ ص.: مصور جدول.
۲۰۰۰۰ ریال ISBN 964-91969-0-0
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
۱. المپیادها (فیزیک). ۲. فیزیک ـ مسائل، تمرینها و غیره. ۳. فیزیک ـ مسابقه‌ها. الف. عنوان جوان.
ب. عنوان: آزمون‌های تابستانی المپیاد فیزیک تابستان ۱۳۷۶ تا ۱۳۷۹
۴ آ ۹۴ ب /LB ۳۰۶۰/۲۴ ۳۷۳/۲۳۸۰
کتابخانه ملی ایران ۲۱۹۸ ـ ۸۳

آزمون‌های تابستانی المپیاد فیزیک با پاسخ‌های تشریحی (تابستان ۱۳۷۶ تا ۱۳۷۹)

مؤلف: دکتر محمود بهمن‌آبادی

ناشر: انتشارات عطیه

مدیر اجرایی: محمد زنگنه

چاپ اول: تابستان ۱۳۸۳

شابک: ۹۶۴-۹۱۹۶۹-۰-۰

طراح جلد: محمدحسین لطف زمان

تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه

بها: ۲۵۰۰۰ ریال

فهرست

عنوان **صفحه**

عنوان **صفحه**

عنوان **صفحه**

پیش‌گفتار

خداوند را سپاس می‌گویم که فرصت داد تا در ادامه‌ی پاسخ به پرسشهای آزمون‌های دوره‌های تابستانی المپیاد فیزیک دو دوره‌ی دیگر را بنویسم. کتاب اول مربوط به تابستان ۷۶ و ۷۷ بود که در این کتاب تکرار شده‌اند. این کتاب شامل پرسش‌ها و پاسخ‌های آزمون‌های تابستانی سال‌های ۷۶ تا ۷۹ (چهار دوره) است. مؤلف درصدد است که دوره‌های بعدی را نیز با پاسخ‌های کامل تهیه و در اختیار علاقه‌مندان قرار دهد.

پرسشهای این آزمون‌ها توسط کمیته‌ی فیزیک باشگاه دانش‌پژوهان جوان و دانش‌پژوهانی که با این کمیته همکاری می‌کنند طرح شده است که در اینجا از همگی آنها تشکر و قدردانی می‌کنم. از آقایان مجید حبیبی برای ویرایش کتاب، ابراهیم بهمن‌آبادی برای تایپ و ترسیم شکل‌های این کتاب و محمدحسین لطف‌زمان برای آماده‌کردن آن نیز تشکر می‌کنم. از تمام کسانی که این کتاب را مطالعه می‌کنند می‌خواهم که اگر ایرادی در آن می‌بینند به باشگاه دانش‌پژوهان جوان انتقال دهند تا در چاپ‌های بعد تصحیح شوند و پیشاپیش از توجه آنها تشکر و قدردانی می‌کنم.

محمود بهمن‌آبادی

بهار ۸۳

درباره‌ی المپیاد

بیش از سی سال است که المپیاد جهانی فیزیک برگزار می‌شود. تیم ایران در سال ۱۳۶۸ برای اولین بار در این المپیاد شرکت کرد و تاکنون پانزده مرتبه در این المپیاد حضور داشته است. از شروع شرکت در این المپیاد، تیم ایران فقط در سال ۱۳۷۲ که المپیاد فیزیک در آمریکا برگزار شد در این مسابقه شرکت نداشت. حداکثر تعداد اعضای هر تیم در المپیاد جهانی فیزیک پنج نفر است که ایران معمولاً هر سال با پنج نفر در آن شرکت می‌کند. نحوه‌ی انتخاب این پنج نفر به صورت زیر است:

معمولاً در بهمن‌ماه هر سال یک امتحان تستی در سراسر کشور برگزار می‌شود که شرکت کنندگان در این آزمون دانش‌آموزان پایه‌ی سوم ریاضی و فیزیک هستند. حدود ۸۰۰ نفر اول برگزیده شده ی این امتحان تستی در امتحان تشریحی اردیبهشت‌ماه سال بعد شرکت می‌کنند که در حدود ۴۰ نفر برتر امتحان تشریحی به عنوان برگزیدگان اردوی تابستانی انتخاب می‌گردند. این برگزیدگان دانش‌پژوه خوانده می‌شوند. در اردوی تابستانی که مدت آن حدود ۱۰ هفته است، با آموزش بعضی از دروس تئوری و تجربی فیزیک مانند مکانیک, الکترومغناطیس, اپتیک، آزمون‌های متعددی در این زمینه‌ها از دانش‌پژوهان گرفته می‌شود. در پایان ۷ نفر برتر دوره انتخاب می‌شوند که این ۷ نفر بدون کنکور وارد دانشگاه می‌گردند. این دانش‌پژوهان می‌توانند هر یک از رشته‌های مهندسی و یا علوم پایه را به عنوان رشته‌ی تحصیلی در دانشگاه انتخاب کنند. پس از دوره‌ی تابستان, آموزش تیم ۷ نفره‌ی فیزیک ادامه پیدا می‌کند. در این دوره نیز ضمن آموزش مباحث مختلف فیزیک، آزمون‌های متعددی از این ۷ نفر گرفته می‌شود و در نهایت ۵ نفر به المپیاد جهانی فیزیک (IPhO) اعزام می‌گردند. لازم به ذکر است که در پایان این دوره این دانش‌پژوهان با بعضی مباحث دروس مکانیک, الکترو مغناطیس, موج, سیالات, حرارت, اپتیک, نسبیت, فیزیک مدرن, الکترونیک, فیزیک هسته‌ای و آزمایشگاه‌های مربوطه آشنا شده‌اند.

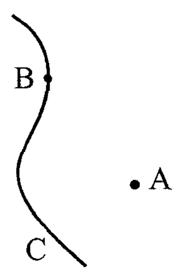
آزمون‌های

دوره‌ی تابستان

سال ۱۳۷۶

آزمون اول

۱) در شکل مقابل خرگوشی مسیر C را طی می‌کند. یک یوزپلنگ که در نقطه‌ی A قـرار دارد بـه طرف خرگوش حرکت می‌کند. اگر یوزپلنگ در هر لحظه در جهتی حرکت کند که خرگوش را ببیند، نشان دهید:



$$\dot{x} = \dot{x}_{\mathrm{B}} - v\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

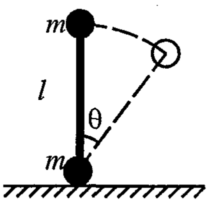
$$\dot{y} = \dot{y}_{\mathrm{B}} - v\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

که در آن v قدر مطلق سرعت یوزپلنگ است. x و y مولفه‌های بردار مکان خرگوش نسبت بـه یوزپلنگ، **R**، و x_{B} و y_{B}مولفه‌های بردار مکان خرگوش نـسبت بـه یـک مبـدا مختـصات ثابـت هستند. با معلوم بودن معادله‌ی حرکت خرگوش می‌توان این معادله دیفرانسیل را حل کرد و مسیر یوزپلنگ را به دست آورد.

۲) در یک حرکت پرتابی، مقدار شتاب ناشی از اصطکاک بین جسم پرتابه و هوا در دو جهت x و y برابر با ثابت a است.

الف) معادله‌ی مسیر، y=f(x)، را در کلی‌ترین حالت ممکن به دست آورید.

ب) تحت سرعت اولیه‌ی بسیار بالا و a ی بسیار کوچک، مقدار برد بیشینه تحت چه زاویه‌ای به دست می‌آید؟



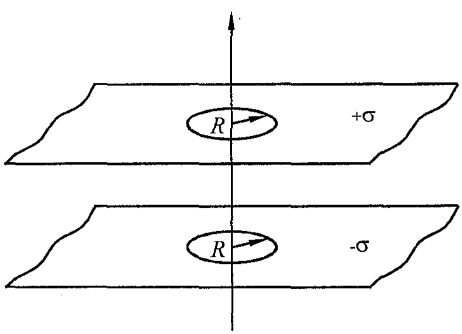
۳) دو جسم با جرم مساوی m توسط یک میله‌ی بدون جرم به طول l به هم متصل شده‌اند و بر روی یک سطح مطابق شکل قرار داده شده و از حالت قائم رها می‌شوند. ضریب اصطکاک استاتیک میان اجسام و سطح برابر با μ است.

الف) معادلات حرکت را برای مختصه‌ی θ بنویسید.

ب) نیروی عکس العمل سطح و نیروی اصطکاک را به صورت تابعی از زاویه به دست آورید.

پ) تحت چه زاویه‌ای جسم پایینی نسبت به سطح خواهد لغزید؟

آزمون دوم



۱) دو صفحه‌ی بینهایت مطابق شکل که به فاصله‌ی l از یکدیگر هستند، چگالی بار سطحی یکنواخت $+\sigma$ و $-\sigma$ را دارند. این دو صفحه دارای دو سوراخ دایره‌ای هم مرکز به شعاع R هستند.

الف) میدان الکتریکی بر روی محور عبور کننده از مراکز سوراخها را به دست آورید.

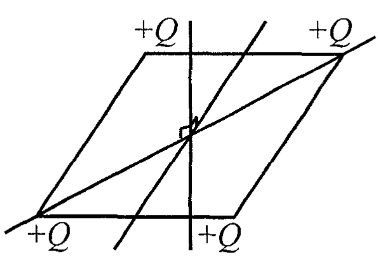
ب) میدان الکتریکی شعاعی را در نقاط دور از صفحه‌ها و نزدیک محور پیدا کنید.

پ) شکل تقریبی میدان الکتریکی را رسم نمایید.

تذکر: مبدا مختصات را وسط دو صفحه و روی محور انتخاب کنید.

۲) تعادل بارها

الف) چهار بار $+Q$ در چهار گوشه‌ی یک مربع قرار دارند. تعادل بار $+q$ را که در مرکز مربع قرار دارد، در راستاهای زیر بررسی کنید. (در کدام یک از راستاها تعادل پایدار و کدام ناپایدار است.)



الف-۱) راستای قطر

الف-۲) راستای عمود بر ضلعها

الف-۳) راستای عمود بر صفحه‌ی مربع

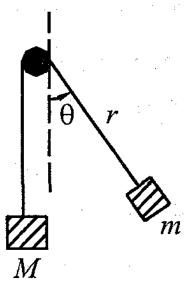
ب) هشت بار $Q+$ در هشت گوشه‌ی یک مکعب قرار دارند. تعادل بار $q+$ را که در مرکز مکعب قرار دارد، در راستاهای زیر بررسی کنید.

ب-۱) راستای قطر

ب-۲) راستای عمود بر وجه‌ها

آزمون سوم

۱) مطابق شکل ماشین آتوودی را در نظر بگیرید که یکی از جرمهای آن کمی از وضعیت قائم دور شده است.



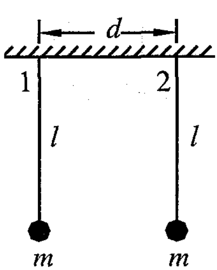
الف) معادلات حرکت را برای مختصات r و θ بنویسید.

ب) معادلات حرکت را با تقریب زاویه‌ی کوچک بازنویسی کنید.

پ) نشان دهید که اگر یک رابطه بین جرمها و دامنه‌ی نوسان زاویه‌ای θ برقرار باشد، در این صورت حرکت مختصه‌ی r صرفا نوسانی است. رابطه‌ی بین فرکانس نوسانی r و θ را به دست آورید.

راهنمایی: تقریب زاویه‌ی کوچک به معنای کوچک بودن سرعت $\dot{r}$ و $\dot{\theta}$ نیز می‌باشد.

۲) دو آونگ کاملا یکسان به طول l و جرم m به فاصله‌ی d از یکدیگر آویزان هستند ($d < 2l$).



اگر بار q را به آونگ اول و بار $-q$ را به آونگ دوم تزریق کنیم:

الف) معادله‌ی حرکت گلوله‌ها را درجهت مماسی بنویسید.

ب) در حالتی که آونگها به اندازه‌ی θ منحرف شده‌اند، انرژی کل را برای سیستم مورد نظر به دست آورید.

پ) آیا معادله‌ی حرکت قسمت (الف) با قانون بقای انرژی سازگار است؟

ت) با استفاده از قانون بقای انرژی، حداقل بار q و $-q$ را که به ترتیب به آونگ اول و دوم داده‌ایم، به دست آورید، به طوری که دو گلوله به جرم m به یکدیگر برخورد کنند. (معادلاتی که به دست می‌آورید، اگر نتوانستید به طریق تحلیلی حل کنید، آنها را به طریق‌های دیگر مثلا گرافیکی و ... حل کنید.)

۳) پدیده‌ی ترمو الکتریک

مدل ساده‌ی الکترون آزاد در فلزات را برای سادگی بیشتر به صورت یک‌بعدی درنظر بگیرید. یعنی فرض کنید که الکترونها بعد از برخورد با اتمها به طور تصادفی به سمت راست یا چپ حرکت می‌کنند. سرعت متوسط الکترونها بعد از برخورد با اتمهای فلز از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

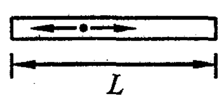
$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2=\frac{1}{2}K_B T$$

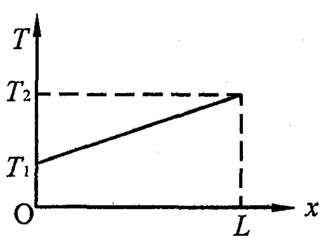
که در این رابطه K_B ثابت بولتزمن نامیده می‌شود. T دما و m جرم الکترون است.

سیمی مستقیم به طول L و سطح مقطع A درنظر بگیرید. این سیم از فلزی به رسانندگی σ ساخته شده که n الکترون آزاد در واحد حجم با طول پویش آزاد میانگین l دارد. فرض کنید دما در طول سیم به طور خطی از مقدار T_1 تا T_2 ($T_2>T_1$) تغییر کند.

الف) با درنظرگرفتن یک سطح مقطع دلخواه از سیم، نشان دهید جریانی در سیم به وجود می‌آید.

ب) به دلیل اینکه سیم در مدار قرار ندارد نمی‌تواند در آن جریان دائمی وجود داشته باشد، در نتیجه در شرایط پایا یک میدان الکتریکی در طول سیم ایجاد می‌شود که باعث قطع جریان می‌گردد. شدت این میدان الکتریکی را حساب کنید.

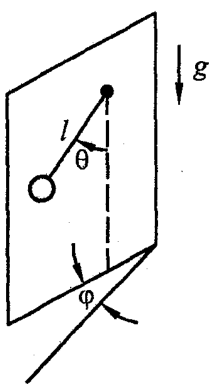




پ) اختلاف پتانسیل دوسر سیم در این حالت چقدر است؟

ت) در حالت پایا چه مقدار انرژی گرمائی در واحد زمان از هر مقطع سیم می‌گذرد؟

آزمون چهارم



۱) یک آونگ کروی، مطابق شکل در نظر بگیرید که θ و ϕ می‌توانند با زمان تحت تاثیر گرانش تغییر کنند ولی طول آونگ، l ،ثابت بوده و جرم آونگ نقطه‌ای است.(θ نمی‌تواند منفی باشد.)

الف) ابتدا فرض می‌کنیم که آونگ در صفحه‌ی $\varphi = 0$ مقید است. اگر در ابتدای حرکت $\dot{\theta} = 0$ و $\theta = \theta_0$ باشد، $\dot{\theta}$ را برحسب θ به دست آورده و نمودار آن را به طور شماتیک رسم کنید (نمودار ۱).

از اینجا به بعد، آونگ لزوما به صفحه‌ی $\varphi = 0$ مقید نیست. (فرض کنید $\dot{\theta} > 0$ باشد.) اگر در ابتدای حرکت $\dot{\theta} = 0$، $\dot{\varphi} = \omega_0$، $\theta = \theta_0$ و $\varphi = 0$ باشد:

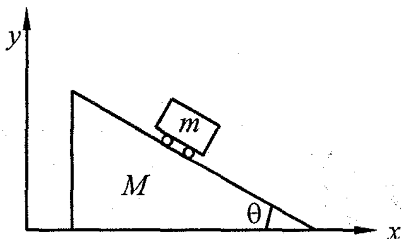
ب) $\dot{\varphi}$ را برحسب θ به دست آورده، نموار $\dot{\varphi}$ را برحسب θ رسم کنید (نمودار ۲).

پ) $\dot{\theta}$ را برحسب θ به دست آورده، نمودار $\dot{\theta}$ را برحسب θ به‌طور شماتیک رسم‌کنید (نمودار ۳).

ت) با توجه به نمودار ۳ استدلال کنید که تغییرات θ و در نتیجه $\dot{\varphi}$ تناوبی است.

ث) در این حالت فرض کنید ω_0 کوچک است. محدوده‌ی تغییرات θ را تا اولین مرتبه‌ی تقریب بیابید.

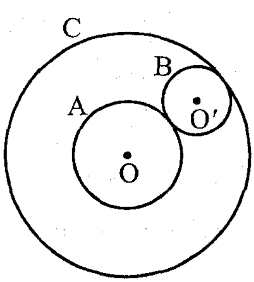
راهنمایی: به نمودارهای (۱) و (۳) دقت کنید.



۲) جسمی به جرم m روی سطح شیبداری به جـرم M که با افق زاویه‌ی θ می‌سازد درنظـر بگیریـد. سـطح شیبدار می‌تواند بدون اصطکاک در راستای افـق روی سطح زمین حرکت کند. اصطکاکی بین جسم مزبور و سطح شیبدار وجود نـدارد. در انتهـای جـسم m یـک سوراخ ایجاد شده است و محتوای داخل آن که شـن است با آهنگ $\alpha = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ از این سیستم خارج شده و روی سطح شیبدار می‌ریزد. (از ارتفاع سقوط شن‌ها صرف‌نظر کنید.) شن‌ها پس از برخورد به سطح شیبدار بـه واسـطه‌ی اصـطکاک زیـاد بـه سطح شیبدار می‌چسبند.

الف) معادلات حرکت را برای مؤلفه‌های x و y جسم و سطح شیبدار به دست آورید. (معـادلات را تا آنجایی که می‌توانید ساده کنید.)

ب) در صورتی که سرعت نسبی بین جسم و سطح شیبدار بزرگ باشد ومقدار جـرم شـن خـارج شده کم باشد به طوری که بتوان از تغییر جرم در تقریب اول صرف‌نظـر کـرد، در مـورد کیفیـت حرکت از روی معادلات بحث کنید.

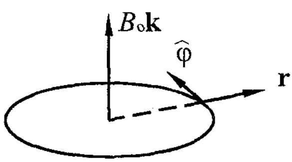


۳) در شکل استوانه‌ی B می‌تواند بین استوانه‌ی ثابت C و استوانه‌ی A حرکت کند. A نیز می‌تواند آزادانه حول محورش بگردد. شعاع استوانه‌های A و B به ترتیب برابر a و b ، گشتاور لختی آنها به ترتیب برابر I_A و I_B و جرم استوانه‌ی B برابر با m می‌باشد. در ابتدا دستگاه در حال سکون است. گشتاور ثابت τ را برای مدت t_0 در جهت پادساعتگرد به استوانه‌ی A اعمال می‌کنیم. سرعت نهایی استوانه‌های A و B چقدر است؟

فرض کنید حرکت استوانه‌ها غلتش کامل است.

آزمون پنجم

۱)حلقه‌ی فلزی نرم



فلزی نرم در اختیار داریم که مقاومت ویژه‌ی ρ دارد. آن را به صورت سیم دایره‌ای شکل درمی‌آوریم. در این صورت شعاع دایره می‌تواند کوچک و بزرگ شود، اما حجم کل ثابت می‌ماند. اگر فلز در تمام مدت آزمایش ما شکل دایره‌ای خود را حفظ کند و میدان یکنواخت $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathrm{k}}$، عمود بر صفحه‌ی شامل سیم باشد:

الف) مطلوب است محاسبه‌ی مقاومت و جریان حلقه هنگامی که r و $\dot{r}$ معلوم باشند.

ب) حال فرض کنید حلقه خاصیت کشسانی (فنری) دارد و ثابت فنری آن k است. اگر طول آزاد حلقه $2\pi r_0$ باشد، مطلوب است معادله‌ی دیفرانسیل برای تغییرات r نسبت به زمان.

پ) به ازای شرایط خاصی معادله‌ای که در بخش (ب) به دست آوردید جوابی به صورت $r = \mathrm{A} + \mathrm{D}e^{-\alpha t}$ دارد که α یک عدد حقیقی است. این شرایط را به دست آورید.

۲)شبکه، مثلث و ستاره

الف) شبکه‌ای از مقاومت‌ها را درنظر بگیرید که N سیم از آن بیرون می‌آیند. اگر پتانسیل هر یک از سیم‌های خروجی را به ترتیب V_1 تا V_{N} بنامیم، ثابت کنید جریانی که از هر سیم خارج می‌شود (I_{i} که i شماره‌ی سر می‌باشد.) از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

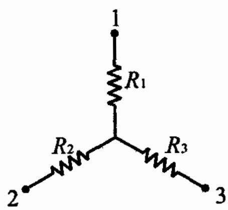
$$I_{\mathrm{i}} = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{M}_{\mathrm{ij}} V_{\mathrm{j}}$$

که در آن M_{ij}ها مقادیر ثابتی هستند.

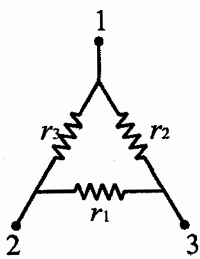
راهنمایی: از اصل برهم نهی استفاده کنید.

ب) مقاومت R دارای دوسر 1 و 2 است، M_{ij}ها را برای آن بیابید.

پ) M_{ij}ها را برای سیستم(ستاره) زیر بیابید.

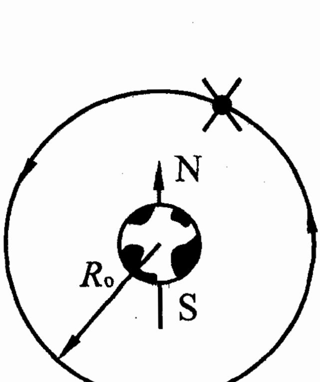


ت) M_{ij}ها را برای سیستم(مثلث) زیر پیدا کنید.



ث) r_1 ، r_2،و r_3 را برحسب R_1 ، R_2،و R_3 طوری بیابید که ستاره و مثلث معادل شوند، یعنی M_{ij}ها برای هر دو یکی گردند.

۳) ماهواره‌ی عجیب و غریب!



ماهواره‌ای مطابق شکل روی یک مدار دایره‌ای به دور زمین می‌چرخد، به طوری که محور شمال و جنوب زمین در صفحه‌ی مدار آن قرار دارد. (در این مسئله فرض می‌کنیم که شمال و جنوب مغناطیسی و جغرافیایی یکسان‌اند.) برای تامین گرمای مورد نیاز ماهواره، پیچه‌ای با سطح مقطع A و N دور سیم با مقاومت بر واحد طول λ در آن تعبیه شده است و انتظار می‌رود که جریان القایی به خاطر تغییر شار مغناطیسی گذرنده از پیچه باعث گرم‌شدن

ماهواره شود. جرم ماهواره را m بگیرید.

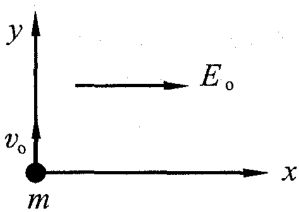
الف) با فرض اینکه حداقل توان متوسط لازم برای گرم‌کردن ماهواره P باشد، حداقل N را بیابید. فاصله‌ی ماهواره از زمین را R_0 و گشتاور مغناطیسی زمین را μ بگیرید.

ب) شعاع مدار ماهواره را برحسب زمان و شعاع اولیه بیابید.

چند نکته:

- نیروی گرانش به صورت $\mathbf{F} = G\dfrac{Mm}{R^2}\mathbf{R}$ و از نوع جاذبه می‌باشد. (M جرم زمین است.)
- فرض کنید که سرعت زاویه‌ای در هر دور تقریبا ثابت بوده و مدار نیز دایره‌ای می‌ماند.
- فرض کنید که همواره محور پیچه به طرف مرکز زمین باشد.
- پیچه دایره‌ای است.

آزمون نهائی



۱) ذره‌ای به جرم m و بار q روی یک سطح افقی با ضریب اصطکاک μ قرار دارد. میدان الکتریکی ثابت E_0 درجهت مثبت محور x را درنظر بگیرید، به طوری که $E_0 = \frac{\mu mg}{q}$ باشد. ذره با سرعت اولیه‌ی v_0 درجهت مثبت محور y که در صفحه‌ی افقی است پرتاب می‌شود.

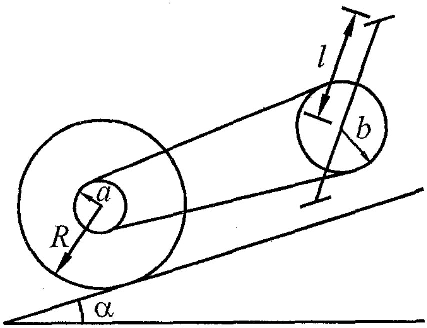
الف) مسیر ذره را به طور کیفی روی صفحه‌ی xy رسم کنید و دلایل توجیهی برای رسم آن منحنی را توضیح دید.

ب) مؤلفه‌های x و y ی شتاب و مؤلفه‌ی مماسی شتاب را برحسب اطلاعات داده شده‌ی فوق و زاویه‌ی θ (زاویه‌ای که سرعت لحظه‌ای ذره با جهت مثبت محور x می‌سازد) بنویسید.

پ) اندازه‌ی سرعت ذره، v، را برحسب θ به دست آورید. مقدار آن در زمانهای بزرگ چقدر است؟

ت) حداکثر مقدار مؤلفه‌ی y ی بردار مکان ذره، L، را به دست آورید. برای محاسبه، اتحاد زیر می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

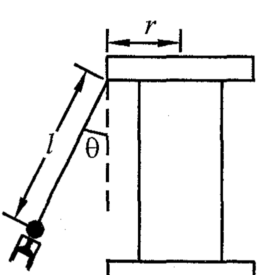
$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$



۲) دوچرخه‌سواری به جرم M سوار بر دوچرخه‌ای به جرم m است. می‌خواهیم ماکزیمم شیبی را بیابیم که دوچرخه‌سوار می‌تواند با یک سرعت متوسط از آن بالا رود. فرض کنید که دوچرخه‌سوار برای وارد آوردن بیشترین نیرو بر روی رکاب، از روی زمین بلند می‌شود و تمام وزن خود را بر روی پایی که در ارتفاع بالاتر است می‌اندازد و بعد از آنکه این پا به پایین‌ترین نقطه رسید وزن را بر پای دیگر منتقل می‌کند. با توجه به مشخصات هندسی دوچرخه که در شکل نشان داده شده، ماکزیمم شیبی را بیابید که دوچرخه‌سوار می‌تواند به مدت طولانی از آن بالا رود. از اتلاف انرژی صرف‌نظر کنید.

۳) دوچرخه‌سواری با سرعت ثابت v روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کند. جرم کل دوچرخه و دوچرخه‌سوار برابر M ، جرم هر چرخ m و شعاع هر کدام r است. در حالتی که دوچرخه در وضعیت قائم قرار دارد، فاصله‌ی مرکز جرم کل تا زمین برابر h است. مرکز جرم از هر دو محور چرخ به یک اندازه است. فاصله‌ی بین دو محور $2l$ است. دوچرخه‌سوار باید دوچرخه را چقدر نسبت به وضعیت قائم کج کند تا بتواند تعادل آن را در حین حرکت حفظ کند؟

راهنمائی: فرض کنید $R>>l$ است.



۴) چرخ‌وفلکی مطابق شکل دارای $N=10$ تاب است. (در شکل تنها یکی از تابها نشان داده شده است.) هر تاب از یک سیم بلند که از یک طرف به چرخ گردنده لولا شده و از سوی دیگر به صندلی متصل است تشکیل شده، به طوری که فاصله‌ی لولا تا مرکز جرم صندلی به علاوه‌ی کودک سوار برآن، $l=7\,\mathrm{m}$ می‌باشد.

شعاع چرخ گردنده، $r=1\mathrm{m}$، جرم تخمینی بچه‌هایی که سوار چرخ‌وفلک می‌شوند به علاوه‌ی جرم صندلی حدودا $m=35\,\mathrm{kg}$ بوده و وزن سیم‌ها قابل صرف‌نظر است. گشتاور لختی چرخ گردنده $I_{\mathrm{w}}=1000\,\mathrm{kg.m^2}$ است که هنگام چرخش گشتاور اصطکاکی $\tau_{\mathrm{f}}=400\,\mathrm{N.m}$ به آن وارد می‌شود. کافی است که چهار بند اول را به صورت

پارامتری پاسخ دهید و به دو بند آخر جواب عددی دهید.

الف) گشتاور لختی کل سیستم برحسب θ چقدر است؟

ب) اگر چرخ‌وفلک هر T ثانیه یک دور بزند، رابطه‌ای بین θ و T بیابید.

پ) حال تا تقریب اول نسبت به $\frac{r}{l}$، θ را برحسب T بیابید.

ت) با توجه به قسمتهای قبل انرژی کل چرخ‌وفلک را برحسب T بیابید.

فرض کنید در ابتدا چرخ‌وفلک آهسته می‌چرخد ولی کم‌کم سریع‌تر می‌شود، به طوری که پس از $M = 7$ دور، T به $4.5\,\text{sec}$ می‌رسد که تا زمان $t = 150\,\text{sec}$ ثابت مانده، سپس موتور خاموش می‌شود و در نهایت چرخ‌وفلک به علت اصطکاک اندک‌اندک می‌ایستد.

ث)از ابتدا تا انتهای حرکت، چرخ‌وفلک چند دور می‌زند؟

ج) در صورتی که اداره‌ی برق برای هر کیلووات ساعت، 700 تومان از صاحب چرخ‌وفلک بگیرد و بازده‌ی موتور چرخ‌وفلک $e = \%60$ باشد و صاحب چرخ‌وفلک بخواهد 5 برابر پولی را که به اداره‌ی برق می‌دهد از بچه‌ها بگیرد باید از هر نفر چقدر پول بگیرد؟

۵) دو بار خطی با چگالی‌های λ و $-\lambda$ به ترتیب در $(x = a, y = 0)$ و $(x = -a, y = 0)$ قرار دارند. (خطها موازی محور z اند.)

الف) نشان دهید که خم‌های هم‌پتانسیل (در صفحه‌ی $z = 0$) دایره‌اند. شعاع و محل مرکز هر دایره را برحسب $B = \dfrac{1+e^{\frac{4\pi\epsilon_0\phi}{\lambda}}}{e^{\frac{4\pi\epsilon_0\phi}{\lambda}}-1}$ به دست آورید.

- φ پتانسیل دایره است.
- پتانسیل بی‌نهایت را صفر بگیرید.

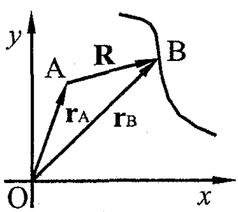
ب) دو استوانه‌ی موازی به شعاع‌های r_1 و r_2 درنظر بگیرید که فاصله‌ی محورهایشان از یکدیگر r است. اختلاف پتانسیل این دو سطح، $\varphi_1 - \varphi_2 = V$ می‌باشد. دو بار خطی با چگالی‌های λ و $-\lambda$ درنظر بگیرید که چنین سطوح هم‌پتانسیلی ایجاد کنند. اگر فاصله‌ی دو بار از یکدیگر $2a$ باشد، مقدار a را برحسب r_1، r_2 و r بیابید.

پ) B_1 و B_2 (معرفی شده در بند الف) را به دست آورید و ظرفیت واحد طول خازنی را که از این دو استوانه ساخته می‌شود محاسبه کنید.

ت) نتیجه‌ی بالا را در حالتهای حدی $r = 0$ و $r \to r_1 + r_2$ به دست آورید.

پاسخ آزمون‌های
دوره‌ی تابستان
سال ۱۳۷۶

پاسخ آزمون اول



۱) بردار مکان یوزپلنگ با $\mathbf{r}_A$ ، بردار مکان خرگوش با $\mathbf{r}_B$ و بردار مکان نسبی آنها را با $\mathbf{R}$ نشان می‌دهیم. مطابق شکل برای رابطه‌ی بین مکانها داریم:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{R}$$

بنابراین رابطه‌ی بین سرعتها عبارت است از:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{V} \qquad (1)$$

که در آن $\mathbf{v}_B$ سرعت خرگوش در دستگاه ثابت xoy، $\mathbf{v}_A$ سرعت یوزپلنگ در دستگاه ثابت xoy و $\mathbf{V}$ سرعت خرگوش نسبت به یوزپلنگ است. چون سرعت یوزپلنگ همواره به طرف خرگوش است، بنابراین $\mathbf{v}_A$ در راستای $\mathbf{R}$ می‌باشد. اگر v قدرمطلق سرعت یوزپلنگ باشد، داریم:

$$\mathbf{v}_A = v\frac{\mathbf{R}}{R} = v\frac{x\hat{\mathrm{i}} + y\hat{\mathrm{j}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (2)$$

همچنین $\mathbf{v}_B$ و $\mathbf{V}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{v}_B = \dot{x}_B\hat{\mathrm{i}} + \dot{y}_B\hat{\mathrm{j}} \qquad (3)$$

$$\mathbf{V} = \dot{x}\hat{\mathrm{i}} + \dot{y}\hat{\mathrm{j}} \qquad (4)$$

با گذاشتن روابط (2),(3)و (4) در رابطه‌ی (1) داریم:

$$\dot{x} = \dot{x}_B - v\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\dot{y} = \dot{y}_B - v\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

که جوابهای مورد نظر هستند.

۲)

الف)شتاب ناشی از نیروی اصطکاک همواره مخالف جهت سرعت جسم است. بنابراین در موقع بالارفتن جسم، این شتاب به سمت پایین (هم‌جهت با g) و در موقع پایین‌آمدن به سمت بالا (مخالف جهت g) است. بنابراین حرکت جسم در جهت x و در جهت y به صورت زیر خواهد بود:

$$x = -\frac{1}{2}at^2 + v_{ox}t \qquad (1)$$

$$y\,(\text{بالارفتن}) = -\frac{1}{2}(g+a)t^2 + v_{oy}t \qquad (2)$$

$$y\,(\text{پایین‌رفتن}) = -\frac{1}{2}(g-a)t^2 + H \qquad (3)$$

که در آن $H = \frac{v_{oy}^2}{2(g+a)}$، ارتفاع اوج جسم است. زمان اوج جسم نیز برابر $t_1 = \frac{v_{oy}}{g+a}$ است.

بنابراین اگر t را بر حسب x و v_{ox} از معادله‌ی (1) به دست آورده و در معادلات (2) و (3) قرار دهیم، تابع $y = \mathrm{f}(x)$ به دست می‌آید. از معادله‌ی (1) داریم:

$$at^2 - 2v_{ox}t + 2x = 0$$

$$t = \frac{v_{ox} \pm \sqrt{v_{ox}^2 - 2ax}}{a}$$

روشن است که در رابطه‌ی اخیر علامت منفی قابل قبول می‌باشد. بنابراین معادلات (2) و (3) به صورت زیر درمی‌آیند:

$$y\,(\text{بالارفتن}) = -\frac{1}{2}(g+a)\left[\frac{v_{ox} - \sqrt{v_{ox}^2 - 2ax}}{a}\right]^2 + v_{oy}\left[\frac{v_{ox} - \sqrt{v_{ox}^2 - 2ax}}{a}\right] \quad ; \quad t \le \frac{v_{oy}}{g+a}$$

$$y\,(\text{پایین‌رفتن}) = -\frac{1}{2}(g-a)\left[\frac{v_{ox} - \sqrt{v_{ox}^2 - 2ax}}{a}\right]^2 + \frac{v_{oy}^2}{2(g+a)} \quad ; \quad \frac{v_{ox}}{a} \ge t \ge \frac{v_{oy}}{g+a}$$

$t \le \dfrac{v_{oy}}{g+a}$ بـه معنـای $x \le -\dfrac{1}{2}a\left(\dfrac{v_{oy}}{g+a}\right)^2 + v_{ox}\left(\dfrac{v_{oy}}{g+a}\right)$ اسـت. همچنـین $t = \dfrac{v_{ox}}{a}$ زمانی است که سرعت جسم در راستای افقی صفر شود. در ضـمن زمـان پـایین آمـدن جسم از نقطه‌ی اوج به سطح زمین $(y=0)$ برابر با $t_2 = \dfrac{v_{oy}}{\sqrt{g^2-a^2}}$ مـی‌باشـد. در اینجـا فـرض شـده که $t_1 + t_2 < \dfrac{v_{ox}}{a}$ است. یعنی قبل از رسیدن به زمین، جسم در راستای افقی متوقف نمی‌شود.

ب) برای به دست آوردن برد، در معادله‌ی (1) به جای t مقدار $t_1 + t_2$ را قرار می‌دهیم. داریم:

$$R = -\frac{1}{2}a\left(\frac{v_{oy}}{g+a} + \frac{v_{oy}}{\sqrt{g^2-a^2}}\right)^2 + v_{ox}\left(\frac{v_{oy}}{g+a} + \frac{v_{oy}}{\sqrt{g^2-a^2}}\right)$$

با فرض $a \ll g$:

$$\frac{1}{g+a} \approx \frac{1}{g}\left(1-\frac{a}{g}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g^2-a^2}} \approx \frac{1}{g}$$

همچنین $v_{ox} = v_o \cos\alpha$ و $v_{oy} = v_o \sin\alpha$ است. بنابراین R می‌شود:

$$R = -\frac{1}{2}a{v_{oy}}^2\left[\frac{1}{g}\left(1-\frac{a}{g}\right)+\frac{1}{g}\right]^2 + v_{ox}v_{oy}\left[\frac{1}{g}\left(1-\frac{a}{g}\right)+\frac{1}{g}\right]$$

$$R = -\frac{1}{2}a\frac{{v_o}^2\sin^2\alpha}{g^2}\left(2-\frac{a}{g}\right)^2 + \frac{{v_o}^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\left(2-\frac{a}{g}\right)$$

برای به دست‌آوردن برد ماکزیمم، مشتق R برحسب α را مساوی صفر قـرار داده و مقـدار α را تعیین می‌کنیم.

$$\frac{dR}{d\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{a}{g^2}{v_o}^2\sin 2\alpha\left(2-\frac{a}{g}\right)^2 + \frac{{v_o}^2\cos 2\alpha}{g}\left(2-\frac{a}{g}\right) = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2g}{a\left(2-\frac{a}{g}\right)}$$

با شرط $a \ll g$ داریم:

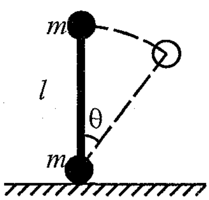
$$\mathrm{tg}\,2\alpha \approx \left(\frac{g}{a}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha_{\max} \approx \frac{1}{2}\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{g}{a}+\frac{1}{2}\right)$$

روشن است که به ازای $a = 0$، مقدار $\alpha_{\max} = 45^\circ$ به دست می‌آید که قابل انتظار می‌باشد.

۳)

الف) اگر جسم پایینی حرکت نکند، می‌توانیم با استفاده از بقائ انرژی جسم بـالایی، معادلـه‌ی حرکت برای مختصه‌ی θ را به دست آوریم.



شکل (1)

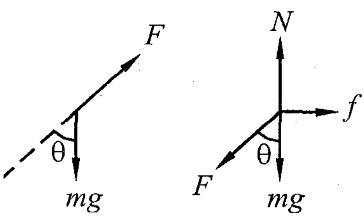
$$E(0) = E(\theta)$$

$$mgl = mgl\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}(1-\cos\theta) \qquad (1)$$

که این یک معادله‌ی دیفرانسیلی برحسب θ است.

ب) نمودار جسم آزاد برای گلوله‌ی بالا و پایین، در حالی که امتداد میله با راستای قـائم زاویـه‌ی θ مـی‌سـازد، بـه صورت شکل (2) است.



شکل (2)

معادلات حرکت گلوله‌ها تـا وقتـی کـه گلولـه‌ی پـایین حرکت نکرده است عبارتند از:

گلوله‌ی بالا : $mg\cos\theta - F = ml\dot{\theta}^2 \qquad (2)$

گلوله‌ی پایین : $\begin{cases} F\sin\theta - f = 0 & (3) \\ N - mg - F\cos\theta = 0 & (4) \end{cases}$

با قرار دادن مقدار $\dot{\theta}^2$ از معادله‌ی (1) در معادله‌ی (2)، نیروی F به دست می‌آید.

$$F = mg(3\cos\theta - 2)$$

با قراردادن مقدار F در معادلات (3) و (4)، نیروی اصطکاک f و نیروی عکس‌العمل N را به دست می‌آوریم:

$f = F\sin\theta = mg\sin\theta\,(3\cos\theta - 2)$

$N = mg[1 + (3\cos\theta - 2)\cos\theta]$

پ)شروع لغزش موقعی است که نیروی اصطکاک به حداکثر مقدار خود یعنی $f = \mu N$ رسیده باشد. در این حالت داریم:

$$mg\sin\theta\,(3\cos\theta - 2) = \mu mg\left[1 + (3\cos\theta - 2)\cos\theta\right]$$

$$\sqrt{1-\cos^2\theta}\,(3\cos\theta - 2) = \mu\left[3\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1\right]$$

$$\left(1-\cos^2\theta\right)\left(9\cos^2\theta + 4 - 12\cos\theta\right) = \mu^2\left[9\cos^4\theta + 4\cos^2\theta + 1 - 12\cos^3\theta + 6\cos^2\theta - 4\cos\theta\right]$$

$$\therefore 9\left(\mu^2+1\right)\cos^4\theta - 12\left(\mu^2+1\right)\cos^3\theta + 5\left(2\mu^2 - 1\right)\cos^2\theta + 4\left(3-\mu^2\right)\cos\theta + \mu^2 - 4 = 0$$

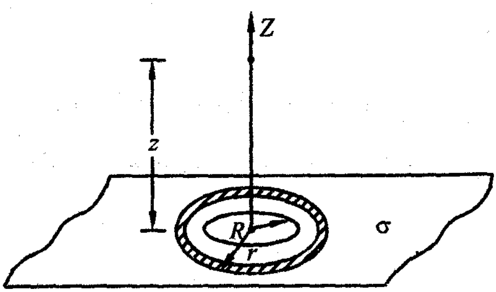
جواب این معادله‌ی مثلثاتی، زاویه‌ای است که در آن زاویه جسم شروع به لغزیدن می‌کند.

پاسخ آزمون دوم

۱)

الف) ابتدا میدان الکتریکی ناشی از یکی از صفحات را روی محور Z و به فاصله‌ی z از آن محاسبه می‌کنیم. مطابق شکل (1) میدان الکتریکی حلقه‌ای به شعاع r می‌شود:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ} \cdot \frac{\sigma(2\pi r\, dr)}{r^2+z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$$



شکل (1)

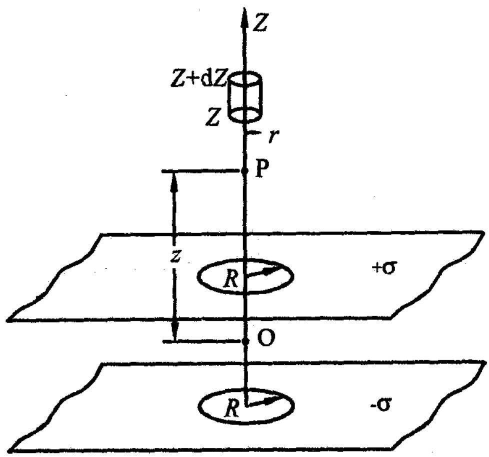
با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی اخیر در فاصله‌ی $r = R$ تا بینهایت، میدان الکتریکی ناشی از این صفحه به دست می‌آید.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ} 2\pi\sigma z \int_R^\infty \frac{r\, dr}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_\circ} \cdot \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

حال اگر دو صفحه با چگالی بار $\sigma+$ و $\sigma-$ و به موازات هم در نظر بگیریم که فاصله‌ی آنها L باشد، میدان الکتریکی ناشی از آنها در نقطه‌ای روی محورZ و به فاصله‌ی z از مبدا مختصات (نقطه‌ی O در شکل (2) که در وسط دو صفحه است) عبارت است از:

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_\circ} \cdot \frac{z-\frac{L}{2}}{\left[R^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_\circ} \cdot \frac{z+\frac{L}{2}}{\left[R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (1)$$

ب) برای به دست آوردن میدان الکتریکی شعاعی، مطابق شکل (2) استوانه‌ای به طول dZ و به فاصله‌ی Z از مبدا مختصات در نظر می‌گیریم. شعاع استوانه r است.



شکل(2)

اگر قانون گاؤس را برای این استوانه بنویسیم، داریم:

$$E_Z(Z+dZ)\pi r^2 - E_Z(Z)\pi r^2 + E_r(Z,r)\times 2\pi r\,dZ = 0$$

اگر در این رابطه به جای $E_Z(Z+dZ)$ مقدار تقریبی $E_z(Z)+\frac{\partial E_z}{\partial Z}dZ$ را قرار دهیم، داریم:

$$E_r(Z,r) = -\frac{r}{2}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial Z} \qquad (2)$$

بنابراین کافی است که از رابطه‌ی (1) مقدار $\frac{\partial E}{\partial Z}$ را محاسبه کنیم و در رابطه‌ی (2) قرار دهیم.

$$\frac{\partial E_Z}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_\circ}\left\{\frac{\left[R^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left(z-\frac{L}{2}\right)^2\left[R^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}}{\left[R^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2\right]} - \frac{\left[R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left(z+\frac{L}{2}\right)^2\left[R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}}{\left[R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2\right]}\right\}$$

$$=\frac{\sigma}{2\epsilon_\circ}\left\{\frac{R^2}{\left[R^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}-\frac{R^2}{\left[R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

با توجه به اینکه $z \ll L,R$ است، عبارات داخل کروشه را بسط داده و تا رتبه‌ی اول حفظ می‌کنیم.

$$\frac{\partial E_Z}{\partial z}\approx$$

$$\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_\circ}\left\{\frac{1}{z^3}\left(1+\frac{3}{2}\cdot\frac{L}{z}\right)\left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{R^2}{\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}\right)-\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{L}{z}\right)\left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{R^2}{\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}\right)\right\}$$

$$\approx\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_\circ}\left\{\frac{1}{z^3}\left(1+\frac{3}{2}\cdot\frac{L}{z}\right)-\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{L}{z}\right)\right\}$$

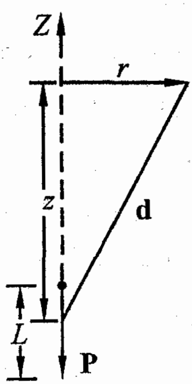
$$\approx\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_\circ}\cdot\frac{1}{z^3}\left(3\frac{L}{z}\right)$$

با قراردادن این مقدار در رابطه‌ی (2) می‌توان مؤلفه‌ی شعاعی را در نقاط دور از صفحه‌ها به دست آورد.

$$E_r(z,r)=-\frac{r}{2}\cdot\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_\circ}\cdot\frac{3L}{z^4}=-\frac{3}{4\epsilon_\circ}\cdot\frac{\sigma R^2 L}{z^4}r$$

البته می‌توان مسئله را به طریق دیگری حل کرد. با توجه به اصل برهم نهی می‌توان میدان ناشی از دو صفحه‌ی سوراخ‌دار را معادل دو صفحه‌ی بینهایت بدون سوراخ و دو دیسک به شعاع R که چگالی بار روی صفحه‌ی بالایی $-\sigma$ و روی صفحه‌ی پایینی $+\sigma$ است، در نظر گرفت. میدان دو صفحه‌ی بینهایت بدون سوراخ در بیرون صفحات صفر است. بنابراین تنها میدان ناشی از دو دیسک می‌ماند. در فواصل دور، این دو دیسک شبیه یک دوقطبی الکتریکی است که امتداد این دوقطبی به صورت شکل (3) می‌باشد. میدان الکتریکی یک دوقطبی الکتریکی در فاصله‌ی **d** از آن عبارت است از:

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_\circ}\left[-\frac{\mathbf{P}}{d^3}+\frac{3\mathbf{P.d}}{d^5}\mathbf{d}\right]$$



شکل (3)

که در آن $\mathbf{P}=\pi R^2\sigma L\left(-\hat{\mathrm{k}}\right)$ و $\mathbf{d}=\mathbf{z}+\mathbf{r}$ است. چون مؤلفه‌ی شعاعی میدان الکتریکی مورد نظر است، بنابراین تنها مولفه‌ی شعاعی $\mathbf{E}$ را می‌نویسیم که به صورت زیر است:

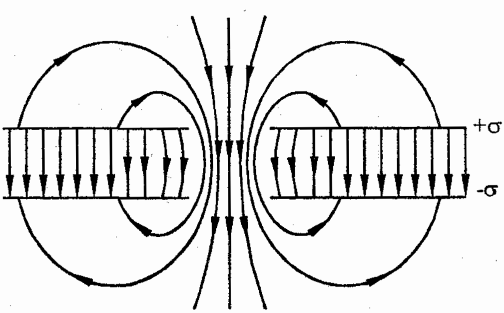
$$E_r=\frac{1}{4\pi\epsilon_\circ}\left[\frac{-3Pz}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{5}{2}}}r\right]$$

عبارت $z>>r$ بدین معناست که نقطه‌ی مورد نظر نزدیک محور قرار دارد، پس می‌توان عبارت مخرج را بسط داد و جمله‌ی اول آن را حفظ کرد. بنابراین:

$$E_r=-\frac{1}{4\pi\epsilon_\circ}\cdot\frac{3Pz}{z^5}r=-\frac{1}{4\pi\epsilon_\circ}\cdot\frac{3\pi R^2\sigma L}{z^4}r=-\frac{3}{4\epsilon_\circ}\cdot\frac{R^2\sigma L}{z^4}r$$

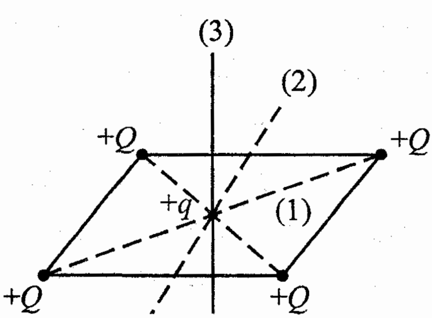
که همان نتیجه‌ی قبلی است.

پ) با توجه به اصل برهم نهی، می‌توان میدان حاصل را، ناشی از میدان دو صفحه‌ی بینهایت بدون سوراخ و دو دیسک به شعاع R دانست. ترکیب این دو میدان، در شکل (4) نشان داده شده است.



شکل(4)

۲)

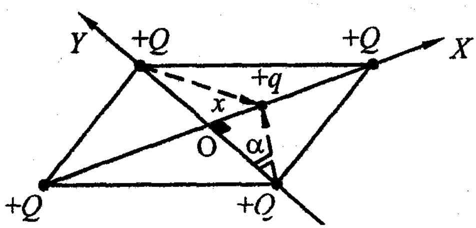


شکل (1)

الف) روشن است که در مرکز مربع، برآیند نیروهایی که به بار $+q$ وارد می‌شود صفر است. یعنی بار $+q$ تعادل دارد. برای اینکه از نظر پایداری یا ناپایداری تعادل در راستاهای (1)، (2) و (3) بحث کنیم، فرض می‌کنیم بار $+q$ به اندازه‌ی خیلی کوچک از نقطه‌ی تعادل، به ترتیب در راستاهای (1)

، (2) و (3) منحرف شود. اگر یک نیروی برگرداننده به آن وارد شود، تعادل پایدار و اگر نیرو در همان جهت انحراف وارد شود، تعادل ناپایدار خواهد بود.

راستای (1): قطر مربع



شکل (2)

در این حالت قطر مربع را $2l$ درنظر می‌گیریم. برآیند دو نیروی ناشی از دو بار در امتداد Y به علت تقارن در امتداد محور X قرار می‌گیرد (شکل (2)). بنابراین برآیند کل نیروهای وارد بربار $+q$ برابر خواهد شد با:

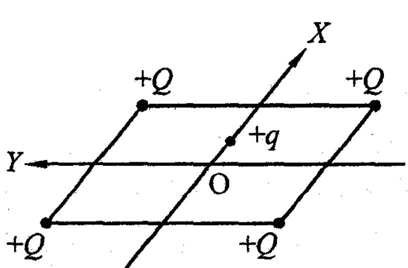
$$F_1 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_\circ}\left[\frac{2\sin\alpha}{\left(l^2+x^2\right)} + \frac{1}{\left(l+x\right)^2} - \frac{1}{\left(l-x\right)^2}\right]$$

چون $x << l$ است، می‌توان عبارت بالا را بسط داد و تا رتبه‌ی اول x را حفظ کرد. همچنین $\sin\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{l^2+x^2}}$ است. بنابراین داریم:

$$F_1 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_\circ}\left[\frac{2x}{l^3}\left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{l^2}+\cdots\right)+\frac{1}{l^2}\left(1-\frac{2x}{l}+\cdots\right)-\frac{1}{l^2}\left(1+\frac{2x}{l}+\cdots\right)\right] \approx \frac{qQ}{4\pi\epsilon_\circ}\left(-\frac{2x}{l^3}\right)$$

علامت منفی نشان می‌دهد که یک نیروی بازگرداننده به مرکز مربع به وجود می‌آید. بنابراین تعادل در امتداد قطر مربع پایدار است.

راستای (2): عمود بر ضلعها

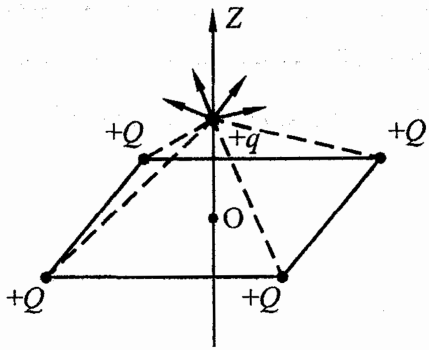


شکل (3)

اگر بار $+q$ در راستای (2) که همان امتداد محور X در شکل (3) است حرکت داده شود، چون فاصله‌ی دوبار $+Q$ که در سمت مثبت محور X قرار دارند به بار $+q$ نزدیکتر از دو بار دیگر می‌شود، منتجه‌ی نیروها، برداری در جهت منفی محور X می‌شود. یعنی نیرو برگرداننده بوده و تعادل نیزدر این راستا پایدار است.

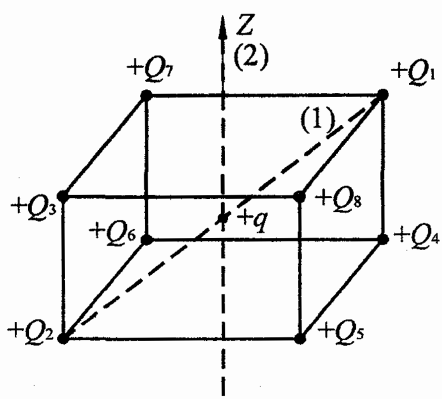
راستای (3): عمود بر صفحه‌ی مربع

اگر بار $q+$ را در امتداد (3) که همان محور z در شکل (4) است حرکت دهیم، نیروی ناشی از هر چهار بار $Q+$ در همان امتداد جابجایی $q+$ واقع می‌شود. یعنی این نیروها باعث حرکت بار $q+$ در همان جهت جابجایی می‌شوند و آن را از نقطه‌ی تعادل مرکزی دور می‌کنند. بنابراین تعادل در این راستا ناپایدار است.



شکل (4)

ب) به علت تقارن، برآیند نیروهای هشت بار $Q+$ در هشت گوشه‌ی یک مکعب بر بار $q+$ که در مرکز مکعب قرار دارد صفر است. حال تعادل را مطابق شکل (5) در راستای قطر (1) و راستای عمود بر وجوه راستای(2) بررسی می‌کنیم.



شکل (5)

راستای (1): قطر مکعب

مطابق شکل (5) هشت بار مساوی $Q+$ را نام‌گذاری می‌کنیم. اگر بار $q+$ را در امتداد قطر Q_1Q_2 به سمت بار Q_1 جابجا کنیم، طبیعی است که نیروی وارد از طرف Q_1 بیشتر از Q_2 می‌شود و برآیند این دو بار برگرداننده است. همچنین نیروی ناشی از Q_4 بیشتر از Q_3 است و این نیرو نیز بازگرداننده می‌باشد. همچنین نیروهای ناشی از Q_7 و Q_8 بیش از نیروهای ناشی از Q_5 و Q_6 بوده و بازگرداننده می‌باشند. بنابراین در کل یک نیروی برگرداننده به بار $q+$ وارد می‌شود و تعادل پایدار است.

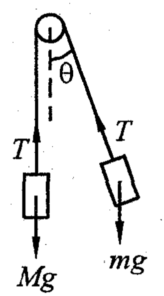
راستای (2): عمود بر وجه‌ها

مطابق شکل (5) اگر بار $q+$ را در راستای (2) که همان محور Z است به سمت مثبت محور Z جابجا کنیم، برآیند نیروهای ناشی از چهار بار Q_1، Q_3، Q_7 و Q_8 که در امتداد منفی Z است، بیشتر از برآیند نیروهای ناشی از چهار بار Q_2، Q_4، Q_5 و Q_6 که به سمت مثبت Z است، می‌باشد. بنابراین یک نیروی برگرداننده به وجود می‌آید و باز تعادل پایدار است.

پاسخ آزمون سوم

۱)

الف) معادله‌ی حرکت جسم به جرم m با توجه به نیروهای وارد بر آن عبارت است از:



$$mg\cos\theta - T = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)$$

$$-mg\sin\theta = m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)$$

همچنین معادله‌ی حرکت جسم به جرم M می‌شود:

$$T - Mg = M\ddot{r}$$

ب) در تقریب زاویه‌ی کوچک، $\sin\theta \approx \theta$ و $\cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ است.

همچنین در این تقریب $\dot{r}$ و $\dot{\theta}$ کوچکند. بنابراین معادلات حرکت دو جسم به صورت زیر تقلیل می‌یابد:

$$mg\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) - T = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \qquad (1)$$

$$-mg\theta = mr\ddot{\theta} \qquad (2)$$

$$T - Mg = M\ddot{r} \qquad (3)$$

پ) از معادله‌ی (2) می‌توان جواب θ را به صورت $\theta = \theta_0 \cos\omega t$ به دست آورد که در آن θ_0 دامنه‌ی نوسان و $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{r}}$ است. با حذف T بین معادلات (1) و (3) به دست می‌آوریم:

$$mg\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) - Mg = (m + M)\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2$$

با گذاشتن مقادیر $\theta = \theta_0 \cos\omega t$ و $\dot{\theta} = -\theta_0 \omega \sin\omega t$ در معادله‌ی اخیر داریم:

$$(m-M)g-\frac{mg}{2}\theta_{\circ}^{2}\cos^2\omega t=(m+M)\ddot{r}-m\theta_{\circ}^{2}r\omega^2\sin^2\omega t$$

با جایگذاری g به جای $r\omega^2$ خواهیم داشت:

$$(m+M)\ddot{r}=(m-M)g+\frac{mg\theta_{\circ}^{2}}{2}\left(2\sin^2\omega t-\cos^2\omega t\right)$$

$$(m+M)\ddot{r}=\left(m-M+\frac{m\theta_{\circ}^{2}}{4}\right)g-\frac{3}{4}mg\theta_{\circ}^{2}\cos 2\omega t$$

اگر جمله‌ی اول سمت راست را صفر کنیم، r تناوبی خواهد شد. بنابراین نتایج زیر از معادله‌ی اخیر حاصل می‌شود:

$$m-M+\frac{m\theta_{\circ}^{2}}{4}=0 \qquad \ddot{r}+\frac{3mg\theta_{\circ}^{2}}{4(m+M)}\cos 2\omega t=0$$

$$\theta_{\circ}=2\sqrt{\frac{M-m}{m}} \quad (4) \qquad \ddot{r}+3\frac{M-m}{M+m}g\cos 2\omega t=0 \quad (5)$$

روشن است که با دامنه‌ی به دست آمده در رابطه‌ی (4)، r به دست آمده از معادله‌ی (5) تناوبی است. فرکانس آن نیز $\omega'=2\omega$ می‌باشد. یعنی فرکانس نوسانات r دو برابر فرکانس نوسانات θ خواهد بود.

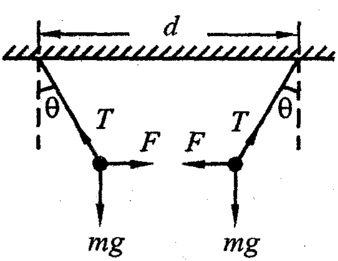
۲)

الف) مولفه مماسی معادله‌ی حرکت هر کدام از گلوله‌ها مطابق شکل (1) به صورت زیر است.

$$F\cos\theta-mg\sin\theta=ml\ddot{\theta}$$

که در آن F نیروی الکتریکی که گلوله‌ها به یکدیگر وارد می‌کنند بوده و مقدار آن برابر است با:

$$F=\frac{kq^2}{(d-2l\sin\theta)^2}$$



شکل (1)

ب) انرژی کل سیستم (شامل دو گلوله) در حالتی که آونگ‌ها به اندازه‌ی θ منحرف شده‌اند برابر است با:

$$E=-\frac{kq^2}{d-2l\sin\theta}-2mgl\cos\theta+2\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2\right)$$

که در آن جمله‌ی اول انرژی پتانسیل الکتریکی، جمله‌ی دوم انرژی پتانسیل گرانشی (نسبت به سقف) و جمله‌ی سوم انرژی جنبشی دو گلوله‌ی آونگ‌ها است.

پ) معادله‌ی حرکت قسمت (ب) به صورت $\frac{kq^2\cos\theta}{(d-2l\sin\theta)^2} - mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$ است. اگر طرفین این معادله را در $\dot{\theta}$ ضرب کنیم، با انتگرال‌گیری نسبت به θ در بازه‌ی $\theta = 0$ تا $\theta = \theta$ خواهیم داشت:

$$\frac{kq^2}{2l}\left(\frac{1}{d-2l\sin\theta}-\frac{1}{d}\right)+mg(\cos\theta-1)=\frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2 \qquad (1)$$

با ضرب‌کردن طرفین رابطه‌ی اخیر در $2l$ داریم:

$$-\frac{kq^2}{d}-2mgl=-\frac{kq^2}{d-2l\sin\theta}-2mgl\cos\theta+ml^2\dot{\theta}^2$$

روشن است که طرف چپ این رابطه، انرژی کل در حالت $\theta = 0$ است و طرف راست، انرژی کل در زاویه‌ی θ می‌باشد. انرژی جنبشی به ازای $\theta = 0$ صفر است. یعنی از معادله‌ی حرکت به بقاء انرژی رسیدیم.

ت) با تزریق بار q و $-q$ به گلوله‌ها، آنها یکدیگر را جذب می‌کنند و حول نقطه‌ی تعادل جدید شروع به نوسان کرده و تا یک زاویه‌ی خاصی بالا می‌روند. در این نقطه، مقدار $\dot{\theta}$ صفر است. بنابراین در رابطه‌ی بقاء انرژی (رابطه‌ی 1)، $\dot{\theta}$ را صفر قرار داده و مقدار q^2 را بر حسب θ به‌دست می‌آوریم.

$$q^2=\frac{mgd}{k}\left(\frac{d}{\sin\theta}-2l\right)(1-\cos\theta)=\mathrm{f}(\theta) \;\; ; \;\; \dot{\theta}=0$$

ماکزیمم $\mathrm{f}(\theta)$ مقدار بار بیشینه‌ای را نشان می‌دهد که به ازای آن $\dot{\theta}$ می‌تواند صفر باشد و اگر q بیش از آن به گلوله‌ها تزریق شود دیگر $\dot{\theta}$ صفر نخواهد شد و دو گلوله به یکدیگر برخورد خواهند کرد. بنابراین ماکزیمم $\mathrm{f}(\theta)$ مقدار حداقل q را به دست می‌دهد که به ازای آن دو گلوله در آستانه‌ی برخورد با یکدیگر قرار می‌گیرند. لذا داریم:

$$\frac{\mathrm{df}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$$

$$\frac{mgd}{k}\left[-\frac{d\cos\theta}{\sin^2\theta}(1-\cos\theta)+\sin\theta\left(\frac{d}{\sin\theta}-2l\right)\right]=0$$

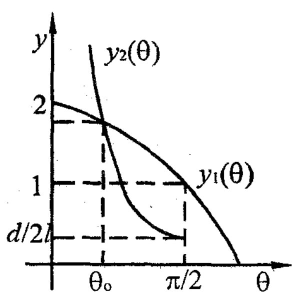
$$-\frac{d\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{d\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+d-2l\sin\theta=0$$

$$\frac{d}{\sin^2\theta}(1-\cos\theta)=2l\sin\theta$$

$$(1-\cos\theta)\left[\frac{d}{\sin\theta}-2l(1+\cos\theta)\right]=0$$

$$\therefore\quad 1+\cos\theta=\frac{d}{2l\sin\theta}\quad ;\quad \left(\frac{d}{2l}<1\right)\quad (2)$$

به روش گرافیکی توابع $y_1(\theta)=1+\cos\theta$ و $y_2(\theta)=\dfrac{d}{2l\sin\theta}$ را ترسیم می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد این دو منحنی، جواب معادله‌ی (2) خواهد بود. شکل (2) دو منحنی مورد نظر را نشان می‌دهد. نقطه‌ی $\theta_\circ$ جواب معادله‌ی (2) است. بنابراین:



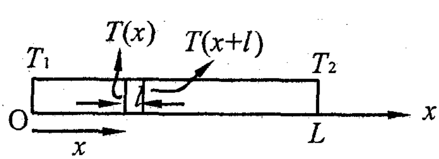
شکل (2)

$$q^2=\frac{2mgd}{k}l\cos\theta_\circ(1-\cos\theta_\circ)\quad (3)$$

مقدار q به دست‌آمده در معادله‌ی (3) حداقل باری است که باید به گلوله‌ها داده شود تا دو گلوله به هم برخورد کنند.

۳)

الف) مطابق شکل (1) دو مقطع از سیم به فاصله‌ی x و $x+l$ از مبدا O درنظر بگیرید. با توجه به خطی‌بودن دما، دما در این دو مقطع برابر است با:



شکل (1)

$$T(x)=\frac{T_2-T_1}{L}x+T_1$$

$$T(x+l)=\frac{T_2-T_1}{L}(x+l)+T_1$$

از طرفی تعداد الکترونهایی که در واحد زمان و واحد سطح به مقطع در فاصله‌ی x وارد و از مقطع در فاصله‌ی $x+l$ خارج می‌شوند، به ترتیب برابر با $\frac{1}{2}ne\overline{v}(x)$ و $\frac{1}{2}ne\overline{v}(x+l)$ است،

که در آن n تعداد الکترونهای آزاد در واحد حجم، e بار الکترون و $\overline{v}$ سرعت متوسط الکترونها است. ضریب $\frac{1}{2}$ به خاطر تصادفی‌بودن حرکت الکترونها به سمت چپ یا راست است. بنابراین چگالی جریانی که از المان واقع در فاصله‌ی x تا $x+l$ می‌گذرد برابر است با:

$$J=\frac{1}{2}ne\overline{v}(x)-\frac{1}{2}ne\overline{v}(x+l)=\frac{1}{2}ne\left[\sqrt{\frac{k_{\text{B}}T(x)}{m}}-\sqrt{\frac{k_{\text{B}}T(x+l)}{m}}\right]$$

$$J=\frac{1}{2}ne\sqrt{\frac{k_{\text{B}}}{m}}\left(\sqrt{T(x)}-\sqrt{T(x+l)}\right) \qquad (1)$$

که مقادیر $T(x)$ و $T(x+l)$ در بالا آمده‌اند. در معادله‌ی (1) چون رادیکال دوم بزرگتر از رادیکال اول است، جواب نهایی منفی می‌باشد. علامت منفی نشان می‌دهد که جریانی از الکترونها از سمت راست به طرف چپ به وجود می‌آید.

ب) در حالت پایا، جریانی که از دو مقطع با دمای $T(x)$ و $T(x+l)$ می‌گذرد با هم برابرند. بنابراین میدان الکتریکی ایجاد شده باید طورنی باشد که سرعت الکترونها را در فاصله‌ی l از $\overline{v}(x)$ به $\overline{v}(x+l)$ تنزل دهد تا همان جریانی که از مقطع اول وارد می‌شود از مقطعی به فاصله‌ی l از آن خارج گردد. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\overline{v}^2(x+l)-\overline{v}^2(x)=-2al$$

که در آن a مقدار شتاب کندکننده‌ی الکترونها است. این شتاب کندشونده برابر با $a=\frac{Ee}{m}$ بوده که در آن E میدان الکتریکی ایجاد شده می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\overline{v}^2(x+l)-\overline{v}^2(x)=-2\frac{Ee}{m}l$$

با قراردادن مقادیر سرعتها برحسب دما داریم:

$$\frac{k_{\text{B}}T(x+l)}{m}-\frac{k_{\text{B}}T(x)}{m}=-2\frac{Ee}{m}l$$

$$E=-\frac{1}{2l}\cdot\frac{k_{\text{B}}}{e}\left[T(x+l)-T(x)\right]$$

با توجه به خطی‌بودن دما برحسب فاصله، عبارت داخل کروشه برابر با $\frac{T_2-T_1}{L}l$ است. لذا داریم:

$$E = -\frac{k_B(T_2 - T_1)}{2Le}$$

پ) چون میدان الکتریکی به دست آمده ثابت است، اختلاف پتانسیل برابر است با:

$$V = EL = -\frac{k_B(T_2 - T_1)}{2e}$$

ت) اگر الکترونی از ناحیه‌ی با دمای $T + \Delta T$ به ناحیه‌ی دیگری با دمای موضعی T حرکت کند، انرژی $\frac{1}{2}k_B\Delta T$ را از دست می‌دهد. حال ΔT بین دو انتهای یک مسیر آزاد ذره از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\Delta T = \frac{dT}{dx}l = \frac{T_2 - T_1}{L}l$$

بنابراین انرژی خالص از دست رفته در واحد زمان (ناشی از انرژی در واحد زمان الکترون در هر

دو جهت) برابر است با:

$$\frac{dQ}{dt} = (n\overline{v}A)\left(\frac{1}{2}k_B\Delta T\right) = \frac{1}{2}nAk_B\overline{v}\left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)l$$

از طرفی در حالت پایا، جریان ناشی از میدان الکتریکی E با جریان حرارتی برابر است. یعنی $J = \sigma E = \frac{n}{2}e\overline{v}$. بنابراین داریم:

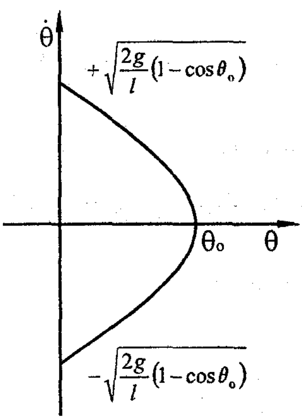
$$\overline{v} = \frac{2\sigma E}{ne}$$

$$\therefore \frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma E}{e}Ak_B\left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)l$$

پاسخ آزمون چهارم

۱)

الف) با استفاده از بقاء انرژی می‌توان $\dot{\theta}$ را برحسب θ به دست آورد.



شکل (1)

$$E=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mgl\cos\theta=-mgl\cos\theta_o$$

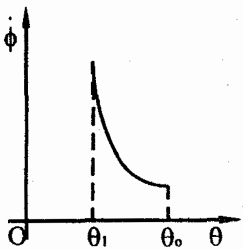
$$\therefore \dot{\theta}=\pm\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta-\cos\theta_o)}$$

ب) گشتاور ناشی از وزن گلوله‌ی آونگ، مولفه‌ای درجهت محور z ندارد. بنابراین تکانه‌ی زاویه‌ای حول محور z بقاء خواهد داشت. از این‌رو تکانه‌ی زاویه‌ای درجهت محور z را در لحظه‌ی ابتدایی و یک لحظه‌ی خاص دیگر می‌نویسیم و آنها را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم.

$$ml^2\omega_o\sin^2\theta_o=ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta$$

$$\therefore \dot{\phi}=\omega_o\left(\frac{\sin\theta_o}{\sin\theta}\right)^2$$

شکل (2) نمودار $\dot{\phi}$ را برحسب θ نشان می‌دهد که θ_o و θ_1 جوابهای معادله‌ی $\dot{\theta}=0$ هستند.



شکل (2)

پ) با دو رابطه‌ی بقاء انرژی و بقاء تکانه‌ی زاویه‌ای حول محور z، $\dot{\theta}$ را به دست می‌آوریم.

بقاء انرژی: $\frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)-mgl\cos\theta=$

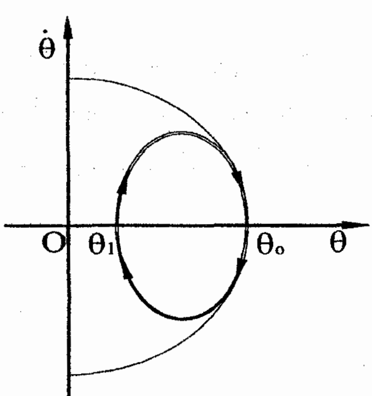
$$\frac{1}{2}ml^2\sin^2\theta_0\omega_0{}^2-mgl\cos\theta_0$$

بقاء تکانه‌ی زاویه‌ای حول محور z: $ml^2\sin^2\theta_0\omega_0=ml^2\sin^2\theta\dot{\phi}$

با حذف $\dot{\phi}$ بین دو رابطه‌ی اخیر داریم:

$$\frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2+\frac{\sin^4\theta_0\omega_0{}^2}{\sin^2\theta}-\sin^2\theta_0\omega_0{}^2\right)=mgl(\cos\theta-\cos\theta_0)$$

$$\therefore \dot{\theta}^2=\frac{2g}{l}(\cos\theta-\cos\theta_0)+\omega_0{}^2\sin^4\theta_0\left(\frac{1}{\sin^2\theta_0}-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)$$



شکل (3)

ت) شکل (3) نشان می‌دهد که پس از گذشت مدت زمان محدودی، θ دوباره مقدار θ_0 را پیدا می‌کند و همه چیز تکرار می‌شود. بنابراین حرکت θ تناوبی است و چون $\dot{\phi}$ تابعی از θ است، پس آن هم تناوبی خواهد بود.

ث) با کوچک فرض‌کردن $\omega_\circ$ جمله‌ی دوم رابطه‌ی $\dot{\theta}^2$ که در قسمت (پ) محاسبه شد کوچک خواهد بود مگر در θهای کوچک. بنابراین برای اینکه مقدار تقریبی θ_1 را به دست آوریم، $\cos\theta$ و $\sin\theta$ را در تقریب اول θ نوشته و $\dot{\theta}$ را صفر قرار می‌دهیم.

$$0 \approx \frac{2g}{l}\left(1-\frac{\theta^2}{2}-\cos\theta_\circ\right)+\omega_\circ^2\sin^4\theta_\circ\left(\frac{1}{\sin^2\theta_\circ}-\frac{1}{\theta^2}\right)$$

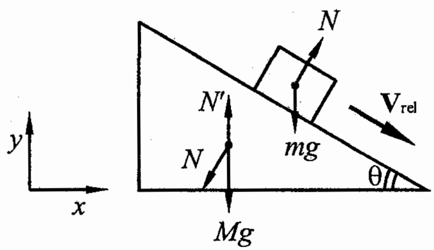
$$\frac{g}{l}\theta^4-\left[\frac{2g}{l}(1-\cos\theta_\circ)+\omega_\circ^2\sin^2\theta_\circ\right]\theta^2+\omega_\circ^2\sin^4\theta_\circ=0$$

با صرفنظرکردن از جمله‌ی θ^4 و همچنین صرفنظرکردن از جمله‌ی دوم داخل کروشه که $\omega_\circ^2$ دارد در مقابل جمله‌ی اول آن، مقدار تقریبی θ_1 به دست می‌آید.

$$\frac{2g}{l}(1-\cos\theta_\circ)\theta^2 \approx \omega_\circ^2\sin^4\theta_\circ$$

$$\therefore \theta_1 \approx \frac{\omega_\circ\sin^2\theta_\circ}{\sqrt{\frac{2g}{l}(1-\cos\theta_\circ)}}=2\omega_\circ\sqrt{\frac{l}{g}}\sin\frac{\theta_\circ}{2}\cos^2\frac{\theta_\circ}{2}=\omega_\circ\sqrt{\frac{l}{g}}\sin\theta_\circ\cos\frac{\theta_\circ}{2}$$

۲) نیروهایی که به جسم m و گوه‌ی M وارد می‌شوند مطابق شکل زیر است، که در آن N و N' به ترتیب نیروی عکس‌العمل جسم و گوه و نیروی عکس‌العمل سطح افقی بر روی گوه هستند. سرعت افقی و سرعت عمودی جسم را به ترتیب با V_x و V_y نشان می‌دهیم. همچنین سرعت افقی گوه را V'_x می‌نامیم. با توجه به اینکه شنها موقع خروج از جسم، سرعت جسم را دارند نیرویی به جسم وارد نمی‌کنند. اما با سرعت $\mathbf{V}_{rel}$ روی گوه می‌نشینند و مطابق با قانون جرم متغیر به آن نیرو وارد می‌کنند. بنابراین معادلات حرکت گوه و جسم عبارتند از:



$$M\frac{dV'_x}{dt}=-N\sin\theta+V_{rel}\frac{dm}{dt}\cos\theta \qquad (1)$$

$$m\frac{dV_x}{dt}=N\sin\theta \qquad (2)$$

$$m\frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t}=N\cos\theta-mg \qquad (3)$$

از طرفی سرعت نسبی $\mathbf{V}_{\mathrm{rel}}$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$\mathbf{V}_{\mathrm{rel}}=V_{\mathrm{rel}}\cos\theta\,\hat{\mathrm{i}}+V_{\mathrm{rel}}\sin\theta\,\hat{\mathrm{j}}=\left(V_x-V'_x\right)\hat{\mathrm{i}}-V_y\hat{\mathrm{j}}$$

یعنی داریم:

$$\tan=\frac{-V_y}{V_x-V'_x}$$

$$-V_y\mathrm{cotan}\theta=V_x-V'_x$$

با دیفرانسیل‌گیری از طرفین رابطه‌ی اخیر نسبت به زمان داریم:

$$-\frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t}\mathrm{cotan}\theta=\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}V'_x}{\mathrm{d}t} \qquad (4)$$

همچنین معادله‌ی (1) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$M\frac{\mathrm{d}V'_x}{\mathrm{d}t}=-N\sin\theta+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(V_x-V'_x\right) \qquad (5)$$

با جاگذاری $\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t}$، $\frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t}$ و $\frac{\mathrm{d}V'_x}{\mathrm{d}t}$ از روابط (2)، (3) و (5) در رابطه‌ی (4) به دست می‌آوریم:

$$-\left(\frac{N}{m}\cos\theta-g\right)\mathrm{cotan}\theta=\frac{N}{m}\sin\theta+\frac{N}{M}\sin\theta-\frac{1}{M}\cdot\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(V_x-V'_x\right)$$

$$N=\frac{Mmg\cos\theta+m\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(V_x-V'_x\right)}{M+m\sin^2\theta} \qquad (6)$$

از معادلات (2) و (5) می‌توان عبارتی برای $\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}V'_x}{\mathrm{d}t}$ به دست آورد. داریم:

$$\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}V'_x}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)N\sin\theta-\frac{1}{M}\cdot\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(V_x-V'_x\right) \qquad (7)$$

با تعریف $u=:V_x-V'_x$ و قراردادن N از روی معادله‌ی (6) در معادله‌ی (7) داریم:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{m+M}{M+m\sin^2\theta}g\cos\theta+\left[\frac{M+m}{M\left(M+m\sin^2\theta\right)}\sin^2\theta-\frac{1}{M}\right]u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{m+M}{M+m\sin^2\theta} g\cos\theta - \left[\frac{\cos^2\theta}{M+m\sin^2\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right]u \qquad (8)$$

ب) اگر در تقریب اول از تغییر جرم جسم و گوه صرفنظر کنیم و با قرار دادن $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\alpha$، معادله‌ی (8) یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول با ضرایب ثابت خواهد بود و داریم:

$$\dot{u} = a + bu \quad ; \quad a = \frac{m+M}{M+m\sin^2\theta} g\cos\theta \quad , \quad b = \frac{-\alpha\cos^2\theta}{M+m\sin^2\theta}$$

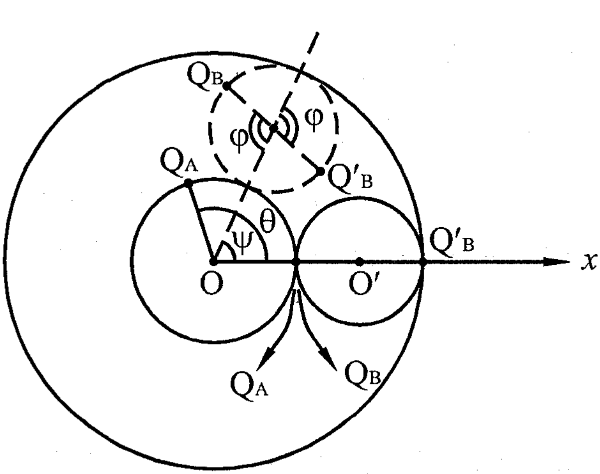
جواب این معادله‌ی دیفرانسیل عبارت است از:

$$u = K\mathrm{e}^{bt} - \frac{a}{b}$$

چون در لحظه‌ی $t=0$ سرعت نسبی صفر است $(u=0)$، مقدار $K=\frac{a}{b}$ به دست آمده و جواب مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$u = \frac{a}{b}\left(\mathrm{e}^{bt}-1\right)$$

سرعت نسبی به صورت نمایی افزایش یافته و همچنین در حالت حدی $\alpha \to 0$ سرعت نسبی به صورت خطی زیاد می‌شود و شتاب ثابت می‌ماند.



۳) حالت اولیه‌ی استوانه‌های A و B را طوری انتخاب می‌کنیم که محورهای هردو در امتداد x باشد. در این حالت نقطه‌ی Q_A روی استوانه‌ی A و محور x قرار دارد. همچنین نقاط Q_B و Q'_B روی استوانه‌ی B و روی محور x واقعند.

فرض کنید استوانه‌ی A به

اندازه‌ی θ بچرخد، به طوری که نقطه‌ی Q_A در وضعیت جدید قرار گیرد. در این حالت نقاط Q_B و Q'_B نیز نسبت به خط واصل مراکز دو استوانه به اندازه‌ی φ چرخیده اند. چون حرکت استوانه‌ها، غلتشی کامل است، داریم:

$$\begin{cases} b\varphi = (a+2b)\ \psi \\ b\varphi = a(\theta-\psi) \end{cases}$$

بنابراین φ و ψ را برحسب θ به دست می‌آوریم:

$$\psi = \frac{a}{2(a+b)}\theta$$

$$\varphi = \frac{a}{2b}\left(\frac{a+2b}{a+b}\right)\theta$$

شتاب زاویه‌ای استوانه‌ی A برابر $\ddot{\theta}$ و شتاب زاویه‌ای استوانه‌ی B (که نسبت به امتداد ثابت x سنجیده می‌شود) برابر $\ddot{\varphi}-\ddot{\psi}$ است. بنابراین:

$$\alpha_B = \ddot{\varphi}-\ddot{\psi} = \frac{a}{2b}\left(\frac{a+2b}{a+b}\right)\ddot{\theta} - \frac{a}{2(a+b)}\ddot{\theta} = \frac{a}{2b}\ddot{\theta}$$

حال معادلات حرکت را برای استوانه‌های A و B می‌نویسیم:

حرکت دورانی استوانه‌ی A:　$\tau - f_1 a = I_A\ddot{\theta}$

حرکت دورانی استوانه‌ی B:　$(f_1+f_2)b = I_B\alpha_B = I_B\dfrac{a}{2b}\ddot{\theta}$

حرکت انتقالی استوانه‌ی B:　$f_1 - f_2 = m(a+b)\ \ddot{\psi} = \dfrac{1}{2}ma\ddot{\theta}$

در این معادلات f_1 و f_2 به ترتیب نیروی اصطکاک بین دو استوانه‌ی A و B و دو استوانه‌ی B و C می‌باشند. با حل این معادلات برای $\ddot{\theta}$ به دست می آوریم:

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau}{I_A + \dfrac{a^2}{4}\left(\dfrac{I_B}{b^2}+m\right)}$$

با انتگرال‌گیری از $\ddot{\theta}$ می‌توان $\omega_A = \dot{\theta}$ را به دست آورد.

$$\omega_{\mathrm{A}} = \dot{\theta} = \frac{\tau t_{\mathrm{o}}}{I_{\mathrm{A}} + \frac{a^2}{4}\left(\frac{I_{\mathrm{B}}}{b^2} + m\right)} = \frac{4b^2 \tau t_{\mathrm{o}}}{4b^2 I_{\mathrm{A}} + I_{\mathrm{B}} a^2 + m a^2 b^2}$$

سرعت زاویه‌ای استوانه‌ی B نیز برابر است با:

$$\omega_{\mathrm{B}} = \frac{a}{2b}\dot{\theta} = \frac{2ab\tau \ \ t_{\mathrm{o}}}{4b^2 I_{\mathrm{A}} + I_{\mathrm{B}} a^2 + m a^2 b^2}$$

پاسخ آزمون پنجم

۱)

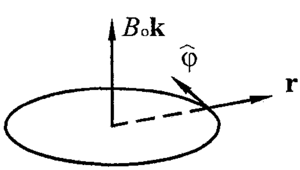
الف) مقاومت حلقه‌ی به شعاع r عبارت است از:

$$R=\rho\frac{l}{A}$$

که در آن ρ مقاومت ویژه ، $l=2\pi r$ طول سیم و $A=\frac{V}{2\pi r}$ سطح مقطع سیم بوده که V حجم سیم و ثابت است. پس داریم:

$$R=\rho\frac{2\pi r}{\frac{V}{2\pi r}}=\rho\frac{4\pi^2 r^2}{V}$$

برای به دست‌آوردن جریان حلقه باید نیروی محرکه‌ی القایی را به دست آوریم.



$$\epsilon=\frac{d\phi_B}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\pi r^2 B_o\right)=2\pi r\dot{r}B_o$$

$$\therefore I=\frac{\epsilon}{R}=\frac{2\pi r\dot{r}B_o}{\rho\frac{4\pi^2 r^2}{V}}=\frac{V\dot{r}B_o}{2\pi r\rho}$$

با توجه به قانون لنز، جریان درجهت $-\hat{\varphi}$ است.

ب) نیروی مغناطیسی وارد بر حلقه عبارت است از:

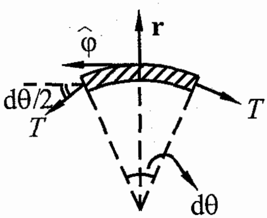
$$d\mathbf{F}_B=I\,d\mathbf{l}\times\mathbf{B}=Ir\,d\theta B_o\left(-\hat{\varphi}\times\hat{k}\right)=IB_o r\,d\theta\left(-\hat{r}\right)$$

حال یک جزء کوچک از حلقه را درنظر می‌گیریم. نیروی کشش T وارد بر این جزء کوچک که ناشی از خاصیت کشسانی حلقه می‌باشد عبارت است از:

$T = K(2\pi r - 2\pi r_o)$

که r_o شعاع حالت آزاد حلقه است.

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_T = 2T\sin\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)(-\hat{r}) \approx T\,\mathrm{d}\theta\,(-\hat{r}) = 2\pi K(r - r_o)\mathrm{d}\theta\,(-\hat{r})$$



بنابراین نیروی وارد بر این جزء کوچک حلقه مجموع دو نیروی $\mathrm{d}\mathbf{F}_B$ و $\mathrm{d}\mathbf{F}_T$ است که با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$\ddot{r}\,\mathrm{d}m = -IB_o r\,\mathrm{d}\theta \;= 2\pi K(r - r_o)\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\theta}\ddot{r} = -\left(\frac{V\dot{r}B_o}{2\pi r\rho}\right)B_o r - 2\pi K(r - r_o)$$

اگر چگالی جرمی حلقه را ثابت بگیریم، داریم:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\theta} = \frac{m}{2\pi}$$

که در آن m جرم حلقه است. پس:

$$\frac{m}{2\pi}\ddot{r} = -\frac{VB_o^{\,2}}{2\pi\rho}\dot{r} - 2\pi K(r - r_o)$$

پ) با درنظرگرفتن جوابی به صورت $r = \mathrm{A} + \mathrm{D}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$ داریم:

$$\dot{r} = -\alpha\,\mathrm{D}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$$
$$\ddot{r} = \alpha^2\,\mathrm{D}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

با گذاشتن روابط اخیر در معادله‌ی دیفرانسیل قسمت (ب) خواهیم داشت:

$$\frac{m}{2\pi}\alpha^2\,\mathrm{D}\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \;= \frac{VB_o^{\,2}}{2\pi\rho}\alpha\,\mathrm{D}\mathrm{e}^{-\alpha t} - 2\pi K(\mathrm{A} + \mathrm{D}\mathrm{e}^{-\alpha t} - r_o)$$

برای اینکه معادله‌ی اخیر برای هر مقدار t صادق باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} -2\pi K(\mathrm{A} - r_o) = 0 \\ \\ \dfrac{m}{2\pi}\alpha^2\,\mathrm{D} = \dfrac{VB_o^{\,2}}{2\pi\rho}\alpha\,\mathrm{D} - 2\pi K\,\mathrm{D} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = r_o \\ \alpha = \dfrac{\dfrac{VB_o^{\,2}}{2\pi\rho} \pm \sqrt{\dfrac{V^2 B_o^{\,4}}{4\pi^2\rho^2} - 4mK}}{2\left(\dfrac{m}{2\pi}\right)} \end{cases}$$

چون α یک عدد حقیقی است باید داشته باشیم:

$$\frac{V^2 B_o^{\,4}}{4\pi^2\rho^2} \geq 4mK$$

$$V^2 B_o^{\,4} \geq 16\pi^2\rho^2 mK$$

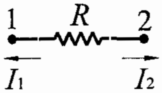
$$\therefore B_o^{\,2} \geq \frac{4\pi\rho}{V}\sqrt{mK}$$

۲)

الف) فرض کنید پتانسیل سیم خروجی j ام برابر $1\,\mathrm{V}$ و بقیه‌ی سیمهای خروجی به پتانسیل صفر ولتی وصل شده باشد. در این صورت جریان خروجی سیم iام را M_{ij} می‌نامیم. حال اگر پتانسیل سیم j ام، V_j شود و بقیه‌ی سیمها همان پتانسیل صفر را داشته باشند با توجه به خطی‌بودن معادلات کیرشهف، جریان سیم iام $M_{ij}V_j$ خواهد شد. حاصل برهم‌نهی j های مختلف که به پتانسیل V_jهای متفاوت وصل می‌شود، جریان $I_i = \sum_{j=1}^{N} M_{ij}V_j$ را در سیم iام ایجاد می‌کند.

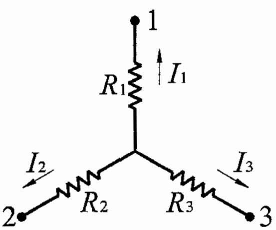
ب) جریان خروجی دوسر 1 و 2 با هم برابر ولی مختلف‌الجهت هستند، یعنی $I_1 = -I_2$.
بنابراین داریم:

$$I_1 = -I_2 = \frac{V_2 - V_1}{R}$$



$$\begin{cases} M_{11} = M_{22} = -\dfrac{1}{R} \\ M_{12} = M_{21} = \dfrac{1}{R} \end{cases}$$

پ) فرض کنید که به سر 1 پتانسیل V_1 و به بقیه پتانسیل صفر وصل کنیم. بنابراین دوسر 2 و 3 هم‌پتانسیل شده و این دو مقاومت (R_3, R_2) موازی می‌شوند. بنابراین داریم:



$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ I_2 R_2 = I_3 R_3 \\ R_2 I_2 - R_1 I_1 = V_1 \end{cases}$$

لذا از سه رابطه‌ی اخیر می‌توان I_1، I_2 و I_3 را تعیین کرد. به سادگی می‌توان دید که مقادیر I_1، I_2 و I_3 عبارتند از:

$$I_1 = \frac{(R_1 - \alpha)}{\beta} V_1 \quad , \quad I_2 = \frac{(\alpha - R_1 - R_2)}{\beta} V_1 \quad , \quad I_3 = \frac{(\alpha - R_1 - R_3)}{\beta} V_1$$

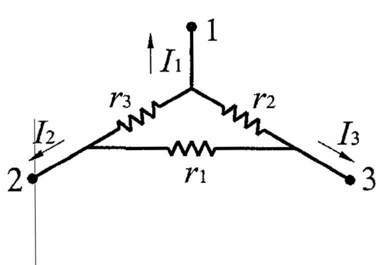
که در آن $\alpha = R_1 + R_2 + R_3$ و $\beta = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1$ است.

حال اگر همین کار را برای سرهای 2 و 3 انجام دهیم، جوابهای مشابهی به دست می‌آوریم که با برهم‌نهی آنها، ضرایب M_{ij} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$M_{ii} = \frac{(R_i - \alpha)}{\beta} \quad ; \quad i = j$$

$$M_{ij} = \frac{(\alpha - R_i - R_j)}{\beta} \quad ; \quad i \neq j$$

ت) مطابق شکل به روشنی دیده می‌شود که داریم:



$$I_1 = \frac{(V_2 - V_1)}{r_3} + \frac{(V_3 - V_1)}{r_2}$$

$$I_1 = \left(-\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) V_1 + \left(\frac{1}{r_3}\right) V_2 + \left(\frac{1}{r_2}\right) V_3$$

حال اگر تعریف کنیم $\gamma = \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$، می‌توان عبارت مربوط به I_1 را به صورت زیر نوشت:

$$I_1 = \left(\frac{1}{r_1}-\gamma\right)V_1 + \left(\gamma - \frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)V_2 + \left(\gamma - \frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)V_3$$

همچنین می‌توان عبارتهای مشابهی برای I_2 و I_3 به دست آورد. بنابراین در این حالت ضرایب M_{ij} عبارتند از:

$$M_{ii} = \frac{1}{r_i}-\gamma \qquad ; \qquad i=j$$

$$M_{ij} = \gamma - \frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_j} \qquad ; \qquad i \neq j$$

ث) برای اینکه M_{ij}های قسمت (پ) و (ت) یکسان باشند، مقادیر آنها را در دو حالت $i \neq j$ مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\alpha - R_i - R_j}{\beta} = \gamma - \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_j}$$

$$\frac{R_1}{\beta}+\frac{R_2}{\beta}+\frac{R_3}{\beta}-\frac{R_i}{\beta}-\frac{R_j}{\beta} = \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_j}$$

از تساوی بالا دیده می‌شود که اگر به ازای تمام iها، r_i را مساوی $\frac{\beta}{R_i}$ بگیریم، همواره تساوی فوق برقرار است. حال کافی است نشان دهیم که اگر r_i مساوی $\frac{\beta}{R_i}$ باشد، M_{ii}ها نیز برابر خواهند بود. از تساوی M_{ii}ها در دو حالت (پ) و (ت) داریم:

$$\frac{\left(R_i - \alpha\right)}{\beta} = \frac{1}{r_i} - \gamma$$

$$\frac{R_i}{\beta}-\frac{R_1}{\beta}-\frac{R_2}{\beta}-\frac{R_3}{\beta} = \frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}$$

رابطه‌ی اخیر نشان می‌دهد که باز در حالت $r_i = \frac{\beta}{R_i}$ تساوی M_{ii}ها همواره برقرار است.

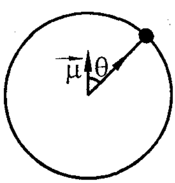
بنابراین رابطه‌ی تبدیل ستاره به مثلث با $r_{\mathrm{i}}=\dfrac{\beta}{R_{\mathrm{i}}}$ میسر است.

۳) می‌دانیم میدان مغناطیسی ناشی از یک دوقطبی $\boldsymbol{\mu}$ در نقطه‌ای به فاصله‌ی $\mathbf{r}$ از آن برابر است با:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\left[-\frac{\boldsymbol{\mu}}{r^{3}}+\frac{3(\boldsymbol{\mu}.\mathbf{r})}{r^{5}}\mathbf{r}\right]$$

چون مولفه‌ی شعاعی میدان مغناطیسی برای ما مهم است، بنابراین به راحتی می‌توان دید که مولفه‌ی شعاعی میدان مغناطیسی ذکرشده برابر است با:

$$B_{\mathrm{r}}=\frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\cdot\frac{2\mu\cos\theta}{r^{3}}$$



که در آن θ زاویه‌ی بین ممان مغناطیسی $\boldsymbol{\mu}$ و بردار $\mathbf{r}$ است. از این رو میدان مغناطیسی زمین در محل ماهواره برابر است با:

$$B_{\mathrm{r}}=\frac{\mu_{\mathrm{o}}}{2\pi}\cdot\frac{\mu\cos\theta}{R^{3}}$$

شار گذرنده از پیچه‌ی با سطح مقطع A و تعداد N دور برابر است با:

$$\phi_{\mathrm{B}}=NAB_{\mathrm{r}}=\frac{\mu\mu_{\mathrm{o}}NA}{2\pi}\cdot\frac{\cos\theta}{R^{3}}$$

بنابراین نیروی محرکه‌ی القایی عبارت است از:

$$\epsilon_{\mathrm{mf}}=-\frac{\mathrm{d}\phi_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu\mu_{\mathrm{o}}NA}{2\pi}\cdot\frac{\sin\theta}{R^{3}}\dot{\theta}$$

از طرفی با توجه به قانون دوم نیوتن برای ماهواره‌ی مورد نظر که روی دایره حرکت می‌کند می‌توان $\omega=\dot{\theta}$ را به دست آورد. داریم:

$$mR\omega^{2}=G\frac{mM}{R^{2}}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{GM}{R^{3}}}=\dot{\theta}$$

بنابراین ϵ_{mf} می‌شود:

$$\epsilon_{\mathrm{mf}}=\left(\frac{\mu\mu_{\mathrm{o}}NA\sqrt{GM}}{2\pi}\right)\frac{\sin\theta}{R^{\frac{9}{2}}}$$

همچنین مقاومت پیچه برابر است با:

$$r = N\lambda \times \text{محیط دایره} = N\lambda \times 2\pi\sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2N\lambda\sqrt{\pi A}$$

توان اتلافی برابر با $\frac{\epsilon_{\mathrm{mf}}^{\ 2}}{r}$ است. بنابراین:

$$P_{\mathrm{dis.}} = \frac{1}{2N\lambda\sqrt{\pi A}}\left(\frac{\mu\mu_{\mathrm{o}}NA}{2\pi}\right)^2 \frac{GM\sin^2\theta}{R^9}$$

چون متوسط $\sin^2\theta$ در یک دور کامل گردش ماهواره به دور زمین برابر $\frac{1}{2}$ است، پس:

$$P = \langle P_{\mathrm{dis.}} \rangle = \frac{1}{4\sqrt{\pi}\lambda}\cdot\frac{\mu_{\mathrm{o}}^{\ 2}\mu^2 NA^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^2}\cdot\frac{GM}{R^9}$$

$$N = \frac{16\pi^{\frac{5}{2}}\lambda R^9}{\mu_{\mathrm{o}}^{\ 2}\mu^2 A^{\frac{3}{2}}GM}P$$

ب) انرژی کل ماهواره برای مدار دایره‌ای عبارت است از:

$$E = E_{\mathrm{K}} + E_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2R}$$

تغییر انرژی ماهواره با زمان برابر با توان اتلاف حرارتی در پیچه است، پس:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -P$$

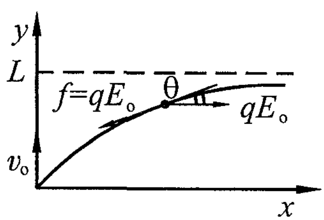
$$\frac{GMm}{2R^2}\dot{R} = -\frac{\mu_{\mathrm{o}}^{\ 2}\mu^2 NA^{\frac{3}{2}}GM}{16\pi^{\frac{5}{2}}\lambda R^9}$$

$$\dot{R}R^7 = -\frac{\mu_{\mathrm{o}}^{\ 2}\mu^2 NA^{\frac{3}{2}}}{8\pi^{\frac{5}{2}}m\lambda}$$

$$R(t) = \left[R_{\mathrm{o}}^{\ 8} - \frac{\mu_{\mathrm{o}}^{\ 2}\mu^2 NA^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{5}{2}}m\lambda}t\right]^{\frac{1}{8}}$$

پاسخ آزمون نهائی

۱)



الف) مطابق شکل نیروی الکتریکی qE_o درجهت محور x و نیروی اصطکاک $f = \mu mg = qE_o$ در خلاف جهت حرکت به ذره وارد می‌شود. براثر مولفه‌ی نیروی اصطکاک درجهت y درنهایت حرکت جسم در راستای y متوقف مـی‌گـردد. یعنـی یک مجانب داریم و جسم با سرعت ثابـت درجهـت محـور x حرکت خواهد کرد.

ب) مولفه‌های x و y ی شتاب و مولفه‌ی مماسی شتاب به صورت زیر هستند:

$$ma_x = qE_o - qE_o\cos\theta$$

$$ma_y = -qE_o\sin\theta$$

$$ma_t = qE_o\cos\theta - qE_o$$

پ) با توجه به روابط قسمت (ب) داریم:

$$a_x = -a_t$$
$$v_x = -v + c$$

که درآن v اندازه‌ی سرعت و c مقدار ثابت انتگرال‌گیری بوده و $v_x = v\cos\theta$ است. بنـابراین داریم:

$$v\cos\theta = -v + c \qquad (1)$$

با استفاده از شرط اولیه‌ی $\theta = 90^\circ$ می‌توانیم مقدار c را برحسب v_o به دست آوریم.

$$0 = -v_o + c \Rightarrow c = v_o$$

یعنی رابطه‌ی (1) می‌شود:

$$v(1+\cos\theta) = v_o$$

$$\therefore v = \frac{v_o}{1+\cos\theta}$$

در حالت حدی $t \to \infty$ و $\theta \to 0$ نتیجه‌ی $v \to \frac{v_o}{2}$ به دست می‌آید.

ت) حداکثر مقدار مولفه‌ی y ی بردار مکان ذره، L، برابر است با:

$$L = \int v_y \, dt = \int v \sin\theta \, dt$$

حال با استفاده از مولفه‌ی y ی شتاب داریم:

$$m \frac{dv_y}{dt} = -qE_o \sin\theta$$

$$d(v\sin\theta) = -\frac{qE_o}{m} \sin\theta \, dt$$

$$\sin\theta \, dt = -\frac{m}{qE_o} d\left(\frac{v_o \sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$$

$$\therefore \sin\theta \, dt = -\frac{m}{qE_o} v_o \, d\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

که در آن از $v = \frac{v_o}{1+\cos\theta}$ و $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$ استفاده شده است. بنابراین داریم:

$$L = \int v \sin\theta \, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{v_o}{1+\cos\theta} \left[-\frac{m}{qE_o} v_o \, d\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

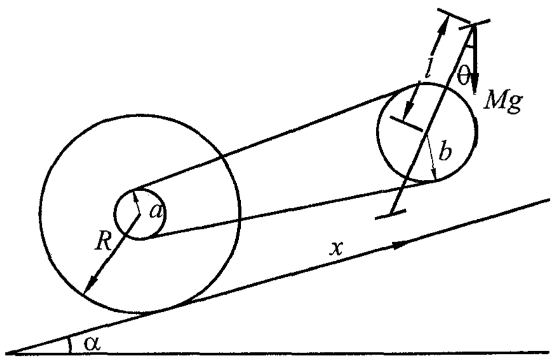
$$L = -\frac{m v_o^2}{qE_o} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{1+\cos\theta} d\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$L = -\frac{m v_o^2}{qE_o} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\frac{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}{2}\right) d\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

که در آن از $\frac{1+\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}}{2} = \frac{1}{1+\cos\theta}$ استفاده شده است. با تغییر متغیر $u = \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}$ داریم:

$$L=-\frac{mv_0^2}{qE_0}\int_1^0\frac{1+u^2}{2}\mathrm{d}u=\frac{mv_0^2}{2qE_0}\int_0^1\left(1+u^2\right)\mathrm{d}u=\frac{mv_0^2}{2qE_0}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{mv_0^2}{qE_0}$$

۲) چون بالارفتن از شیب مورد نظر است، بنابراین می‌توان تغییر انرژی جنبشی دوچرخه را صفر درنظر گرفته تا تمام کاری که دوچرخه‌سوار انجام می‌دهد، صرف بالارفتن از شیب شود.
کاری که دوچرخه‌سوار انجام می‌دهد برابر است با:



$$W=\int\tau\,\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi Mgl\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=2Mgl$$

حال وقتی چرخ با شعاع b نیم‌دور می‌زند، زنجیر به اندازه‌ی πb حرکت می‌کند. بنابراین چرخ با شعاع a به اندازه‌ی $\varphi=\frac{\pi b}{a}$ خواهد چرخید. لذا مسافتی که دوچرخه طی می‌کند برابر با $x=\frac{\pi b}{a}R$ خواهد بود و درنتیجه دوچرخه به اندازه‌ی ارتفاع قائم $h=x\sin\theta=\frac{\pi b}{a}R\sin\theta$ بالا می‌رود. پس کار انجام‌شده توسط دوچرخه‌سوار باعث افزایش انرژی پتانسیل دوچرخه و دوچرخه‌سوار می‌شود. یعنی:

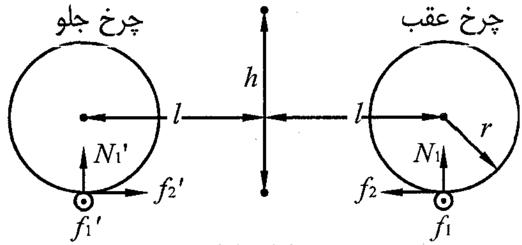
$$2Mgl=(M+m)gh$$

$$2Mgl=(M+m)g\frac{\pi b}{a}R\sin\theta \qquad (1)$$

$$\therefore \sin\theta_{\max}=\frac{2Mal}{\pi bR(M+m)}$$

این θ ، ماکزیمم شیب است. زیرا فرض کرده بودیم که انرژی جنبشی سیستم تغییر نمی‌کند. اگر انرژی جنبشی سیستم افزایش می‌یافت، در طرف دوم رابطه‌ی (1) یک جمله‌ی مثبت (انرژی جنبشی) اضافه می‌شد که می‌توان دید در آن حالت زاویه‌ی θ کمتر از مقدار به دست‌آمده می‌شود.

۳) به علت گشتاور نیروهای f_1 و f_1' حول مرکز جرم، تعادل دوچرخه به‌هم می‌خورد. مطابق شکل (1) نیروهای f_1 و f_1' درجهت جانبی دوچرخه هستند. درنتیجه باید دوچرخه‌سوار، دوچرخه را به اندازه‌ی θ کج کند. حال مقدار θ را به دست می‌آوریم.



شکل (1)

چون دوچرخه با سرعت ثابت روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند شتاب زاویه‌ای $\alpha = 0$ است. درمورد چرخ عقب داریم:

$$\tau - f_2 r = 0 \qquad (1)$$

که در آن τ گشتاور ناشی از پازدن دوچرخه‌سوار و r شعاع چرخ است. همچنین داریم:

$$f_2 - f_2' = M(0) = 0 \qquad (2)$$

درمورد چرخ جلو نیز داریم:

$$f_2' r = 0 \qquad (3)$$

از دو رابطه‌ی (2) و (3) داریم:

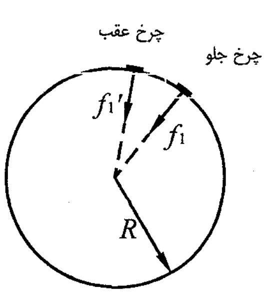
$$f_2 = f_2' = 0$$

و درنتیجه از رابطه‌ی (1) به دست می‌آوریم:

$$\tau = 0$$

یعنی برای ادامه‌ی حرکت دوچرخه لازم نیست دوچرخه‌سوار رکاب بزند. از شکل (2) داریم:

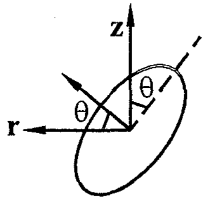
$$f_1 + f_1' = M\frac{v^2}{R}$$



شکل(۲)

حال رابطه‌ی $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{d\mathbf{L}}{dt}$ را نسبت به مرکز جرم کل (شخص + دوچرخه) می‌نویسیم. فرض کنید دوچرخه به اندازه‌ی θ حول محور قائم کج شده است. با توجه به شکل (3) داریم:

$$\mathbf{L} = I\omega\hat{z} + 2mr^2\left(\frac{v}{r}\right)\left[\hat{r}\cos\theta + \hat{z}\sin\theta\right]$$



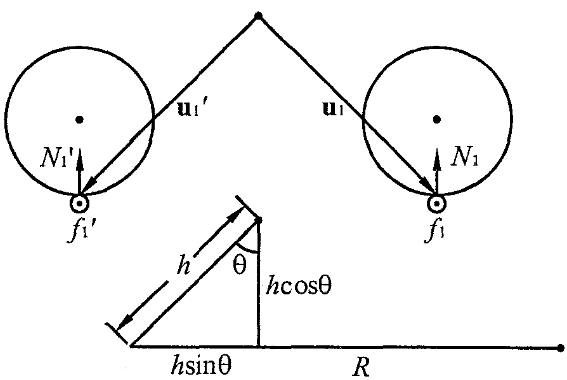
شکل (3)

که در آن جمله‌ی اول مربوط به اندازه حرکت زاویـه‌ای دوچرخـه حـول محور z با سرعت زاویه‌ای $\omega = \dfrac{v}{R}$ است. زیرا در یک دور زدن دوچرخه، دوچرخه‌سوار به اندازه‌ی 2π دور خود می‌چرخد. جمله‌ی دوم نیز مربـوط به اندازه حرکت زاویه‌ای چرخ‌ها است. بنابراین $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}$ می‌شود:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = 2mrv\cos\theta\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t} = 2mrv\cos\theta\left(\frac{v}{R}\hat{\theta}\right) = \frac{2mrv^2}{R}\cos\theta\ \hat{\theta} \qquad (4)$$

از طرفی با توجه به شکل (4) گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ حول مرکز جرم کل می‌شود:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{u}_1' \times \left(\mathbf{N}_1' + \mathbf{f}_1'\right) + \mathbf{u}_1 \times \left(\mathbf{N}_1 + \mathbf{f}_1\right)$$



شکل (4)

که در آن $\mathbf{u}_1'$ و $\mathbf{u}_1$ با توجه به شکل (4) عبارتند از:

$$\mathbf{u}_1' = l\hat{\theta} - h\cos\theta\ \hat{\mathrm{z}} - h\sin\theta\ \hat{\mathrm{r}}$$

$$\mathbf{u}_1 = -l\hat{\theta} - h\cos\theta\ \hat{\mathrm{z}} - h\sin\theta\ \hat{\mathrm{r}}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \left(l\hat{\theta} - h\cos\theta\ \hat{\mathrm{z}} - h\sin\theta\ \hat{\mathrm{r}}\right)\times\left(N_1'\ \hat{\mathrm{z}} - f_1'\hat{\mathrm{r}}\right) + \left(-l\hat{\theta} - h\cos\theta\ \hat{\mathrm{z}} - h\sin\theta\ \hat{\mathrm{r}}\right)\times\left(N_1\ \hat{\mathrm{z}} - f_1\hat{\mathrm{r}}\right)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\tau} = \hat{\mathrm{r}}l\left(N_1' - N_1\right) + \hat{\mathrm{z}}l\left(f_1' - f_1\right) + \hat{\theta}\left(h\cos\theta f_1' + h\sin\theta N_1' + h\cos\theta f_1 + h\sin\theta N_1\right) \qquad (5)$$

از طرفی با استفاده از روابط $N_1^{'} + N_1 = mg$ و $N_1^{'} - N_1 = 0$ داریم:

$$N_1^{'} = N_1 = \frac{mg}{2}$$

و همچنین از $f_1^{'} + f_1 = \frac{M v^2}{R}$ و $f_1^{'} - f_1 = 0$ داریم:

$$f_1^{'} = f_1 = \frac{M v^2}{2R}$$

بنابراین با جایگزین‌کردن روابط اخیر در معادله‌ی (5) و مساوی قرار دادن معـادلات (4) و (5) با یکدیگر داریم:

$$h\cos\theta f_1^{'} + h\sin\theta N_1^{'} + h\cos\theta f_1 + h\sin\theta N_1 = \frac{2mrv^2\cos\theta}{R}$$

$$\frac{M v^2}{R} h\cos\theta + mgh\sin\theta = \frac{2mrv^2\cos\theta}{R}$$

$$mgh\sin\theta = \frac{\cos\theta}{R}\left(2mrv^2 - M v^2 h\right)$$

$$\tan\theta = \frac{2mrv^2 - M v^2 h}{mghR}$$

$$\therefore \tan\theta = \left(\frac{2mr - Mh}{mghR}\right)v^2$$

۴)

الف) گشتاور لختی کل سیستم عبارت است از:

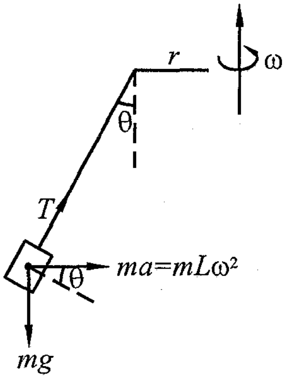
$$I = I_w + Nm(r + l\sin\theta)^2$$

که در آن I_w گشتاور لختی چرخ گردنده، r شعاع چرخ گردنده، l طول تاب، N تعـداد تـاب‌هـا و m جرم صندلی به علاوه‌ی شخص سوارشده بر روی آن است.

ب) درصورتی که سرعت زاویه‌ای، $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ثابت باشد، شتاب به سمت محور چرخش و برابـر $L\omega^2$ است که در آن $L = r + l\sin\theta$ می‌باشد.

مولفه‌ی نیروها در راستای عمود بر تاب $mg\sin\theta$ بوده که برابر است با:

$$mg\sin\theta = mL\omega^2\cos\theta$$



$$g\sin\theta=(r+l\sin\theta)\omega^2\cos\theta \quad ; \quad \omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{g}{\omega^2}=(r+l\sin\theta)\operatorname{cotan}\theta$$

$$\frac{gT^2}{4\pi^2}=(r+l\sin\theta)\operatorname{cotan}\theta$$

$$\therefore T=2\pi\sqrt{\frac{(r+l\sin\theta)\operatorname{cotan}\theta}{g}}$$

پ) با استفاده از قسمت (ب) داریم:

$$\frac{g}{\omega^2}=(r+l\sin\theta)\operatorname{cotan}\theta$$

$$\cos\theta=\frac{g}{l\omega^2}-\frac{r}{l}\operatorname{cotan}\theta$$

تا تقریب صفرم $\cos\theta_{\circ}=\frac{g}{l\omega^2}$ است. یعنی:

$$\cos\theta^{(0)}=\cos\theta_{\circ}=\frac{g}{l\omega^2}$$

اگر $\epsilon:=\frac{r}{l}$ بگیریم تا رتبه‌ی اول ϵ داریم:

$$\cos\theta\approx\cos\theta^{(1)}=\cos\theta^{(0)}-\epsilon\ \operatorname{cotan}\theta^{(0)}$$

$$\theta^{(1)}=\cos^{-1}\left(\cos\theta_{\circ}-\epsilon\ \operatorname{cotan}\theta_{\circ}\right)=\theta_{\circ}+\epsilon\frac{\cos\theta_{\circ}}{\sin^2\theta_{\circ}}+O\left(\epsilon^2\right)$$

$$\therefore\theta^{(1)}=\theta_{\circ}+\epsilon\frac{\cos\theta_{\circ}}{\sin^2\theta_{\circ}} \quad ; \quad \theta_{\circ}=\cos^{-1}\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{gT^2}{4\pi^2 l}\right)$$

ت) انرژی جنبشی کل چرخ و فلک عبارت است از:

$$\epsilon_{K}=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\omega^2\left[I_{w}+Nm(r+l\sin\theta)^2\right]$$

$$\epsilon_{K}=\frac{1}{2}Nml^2\omega^2\left[\frac{I_{w}}{Nml^2}+(\epsilon+\sin\theta)^2\right]$$

حال $\sin\theta$ را تا تقریب اول ϵ به دست می‌آوریم.

$$\sin\theta=\sin(\theta_{\circ}+\Delta)\cong\sin\theta_{\circ}+\Delta\cos\theta_{\circ}$$

که درآن با توجه به قسمت (پ) مقدار $\Delta = \epsilon \dfrac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}$ به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$(\epsilon+\sin\theta)^2 \approx \sin^2\theta + 2\epsilon\sin\theta =$$

$$\left(\sin\theta_0 + \epsilon\ \text{cotan}^2\theta_0\right)^2 + 2\epsilon\left(\sin\theta_0 + \epsilon\ \text{cotan}^2\theta_0\right) \approx$$

$$\sin^2\theta_0 + 2\epsilon\frac{\cos^2\theta_0}{\sin\theta_0} + 2\epsilon\sin\theta_0 = \sin^2\theta_0 + \frac{2\epsilon}{\sin\theta_0}$$

بنابراین انرژی جنبشی کل چرخ و فلک به دست می‌آید:

$$\epsilon_K = \frac{1}{2}Nml^2\omega^2\left[\frac{I_w}{Nml^2} + \sin^2\theta_0 + \frac{2\epsilon}{\sin\theta_0}\right]$$

همچنین انرژی پتانسیل آن عبارت است از:

$$\epsilon_P = Nmgl(1-\cos\theta)$$

بنابراین انرژی کل می‌شود $\left(\alpha = \dfrac{I_w}{Nml^2}\ ,\ I_0 = Nml^2\right)$:

$$\epsilon = \epsilon_K + \epsilon_P = \frac{1}{2}I_0\omega^2\left(\alpha + \sin^2\theta_0\right) + \epsilon\left(\frac{I_0\omega^2}{\sin\theta_0}\right) +$$

$$Nmgl\left(1-\cos\theta_0\right) + Nmgl\epsilon\,\text{cotan}\theta_0$$

$$\therefore \epsilon = \frac{1}{2}I_0\omega^2\left(\alpha + \sin^2\theta_0\right) + Nmgl(1-\cos\theta_0) + \epsilon\left(\frac{I_0\omega^2 + Nmgl\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\right)$$

ث) با توجه بـه اطلاعـات مـسئله $\epsilon = \dfrac{r}{l} = \dfrac{1}{7}$ و در $T = 4.5\,\text{sec}$ مقـدار $\omega \approx 1.396\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}$ بـه دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$\cos\theta_0 = \frac{g}{l\omega^2} \approx 0.718$$

$$\therefore \theta_0 \approx 44^\circ$$

$$\theta \approx \theta^{(1)} = \theta_0 + \epsilon\frac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0} = 56^\circ$$

حال انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل را محاسبه می‌کنیم.

$$\epsilon_K = \frac{1}{2}\times 10\times 35\times 7^2\times 1.396^2\left[\frac{1000}{10\times 35\times 7^2}+\left(\frac{1}{7}+\sin 56^\circ\right)^2\right]\approx 16800\,\mathrm{J}$$

$$\epsilon_P = 10\times 35\times 9.8\times 7\left(1-\cos 56^\circ\right)\approx 10584\,\mathrm{J}$$

$$\therefore \epsilon = \epsilon_K + \epsilon_P = 27384\,\mathrm{J}$$

ابتدا چرخ و فلک $M = 7$ دور می‌زند، سپس به مدت $t = 150\,\mathrm{sec}$ با پریود $T = 4.5\,\mathrm{sec}$، $M' = \frac{150}{4.5}\approx 33$ دور می‌گردد. پس از خاموش‌شدن موتور نیز به علت گشتاور اصطکاکی $\tau_f = 400\,\mathrm{N.m}$ چرخ و فلک می‌ایستد. با استفاده از بقاء انرژی می‌توان تعداد دورهای این حالت را نیز به دست آورد. اگر تعداد دورها را M'' بگیریم، داریم:

$$\tau_f\left(2\pi M''\right) = \epsilon$$

$$\therefore M'' = \frac{\epsilon}{2\pi\tau_f} = \frac{27384}{2\pi(400)}\approx 11 \text{ دور}$$

بنابراین تعداد کل دورها از ابتدا تا انتها برابر است با:

$$\text{تعداد کل دورها} = M + M' + M'' = 7+33+11 = 51 \text{ دور}$$

ج) برای اینکه انرژی مصرف‌شده را به دست آوریم باید انرژی مصرف‌شده در طول مدت شتاب‌گرفتن چرخ و فلک و همچنین مدتی را که با آهنگ ثابت می‌چرخد محاسبه کنیم. انرژی مصرف‌شده در طول مدت زمان شتاب‌گیری برابر است با:

$$\epsilon_1\,(\text{انرژی مصرف‌شده}) = \text{انرژی نهایی چرخ و فلک} + \text{انرژی تلف‌شده در این مدت}$$

$$= \epsilon + \left(2\pi M\right)\tau_f$$

$$= 27384 + \left(2\pi\times 7\right)\times 400 \cong 44980\,\mathrm{J}$$

انرژی مصرف‌شده در طول مدتی که چرخ و فلک با آهنگ ثابت می‌چرخد تنها ناشی از انرژی اتلافی است، زیرا انرژی مکانیکی آن تغییر نمی‌کند.

$$\epsilon_2 = \left(2\pi M'\right)\tau_f = \left(2\pi\times 33\right)\times 400 \approx 82940\,\mathrm{J}$$

بنابراین انرژی کل مصرفی برابر است با:

$$\epsilon_L = \epsilon_1 + \epsilon_2 = 44980 + 82940 = 127920\,\mathrm{J}$$

چون هر کیلووات ساعت برابر 3.6×10^6 ژول است، بنابراین انرژی مصرفی برابر 0.0355 کیلووات ساعت است. با توجه به بازده موتور چرخ و فلک، انرژی مصرفی برابر است با:

$$\epsilon^* = \frac{\epsilon_L}{e} = \frac{0.0355}{0.60} = 0.0592\,\mathrm{kW.h}$$

چون اداره‌ی برق به ازای هرکیلووات ساعت 700 تومان می‌گیرد، بنابراین هزینه برای صاحب چرخ و فلک $0.0592 \times 700 \approx 41$ تومان می‌شود. اگر صاحب چرخ و فلک بخواهد 5 برابر سود کند باید جمعا $5 \times 41 = 205$ تومان از بچه‌ها بگیرد که تقریبا از هر نفر 21 تومان می‌گیرد.

۵)

الف) با استفاده از قانون گاؤس به سادگی می‌توان دید که پتانسیل ناشی از یک خط بار با چگالی λ و به فاصله‌ی r از آن برابر با $\phi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln r$ است. بنابراین پتانسیل ناشی از دو خط بار مذکور در نقطه‌ای از صفحه‌ی xy برابر است با:

$$\phi = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}$$

$$(x+a)^2 + y^2 = \mathrm{e}^{\frac{4\pi\epsilon_0\phi}{\lambda}}\left[(x-a)^2 + y^2\right]$$

با ساده‌کردن رابطه‌ی اخیر داریم:

$$y^2 + (x-aB)^2 = a^2(B^2-1) \quad ; \quad B = \frac{\beta+1}{\beta-1} \quad ، \quad \beta = \mathrm{e}^{\frac{4\pi\epsilon_0\phi}{\lambda}}$$

که رابطه‌ی اخیر معادله‌ی دایره‌ای است که مختصات مرکز آن $(aB,0)$ و شعاع آن $R = a\sqrt{B^2-1}$ است.

ب) فاصله‌ی بین محورهای دو استوانه r است. با توجه به قسمت (الف) داریم:

$$\begin{cases} r = a(B_1 - B_2) \\ {B_1}^2 = 1 + \left(\frac{r_1}{a}\right)^2 \\ {B_2}^2 = 1 + \left(\frac{r_2}{a}\right)^2 \end{cases}$$

با جاگذاری B_1 و B_2 در رابطه‌ی اول داریم:

$$r = \sqrt{a^2 + {r_1}^2} - \sqrt{a^2 + {r_2}^2}$$

اگر جمله‌ی اول طرف راست را به طرف چپ برده و سپس طرفین را به توان 2 برسانیم خواهیم داشت:

$$r^2+a^2+r_1^2-2r\sqrt{a^2+r_1^2}=a^2+r_2^2$$

$$\left(r^2+r_1^2-r_2^2\right)^2=4r^2\left(a^2+r_1^2\right)$$

$$\therefore a=\sqrt{\frac{\left(r_1^2-r_2^2\right)^2+r^4-2r^2\left(r_1^2+r_2^2\right)}{4r^2}}$$

پ) با توجه به قسمت (ب) داریم:

$$B_1^2-B_2^2=\left(\frac{r_1}{a}\right)^2-\left(\frac{r_2}{a}\right)^2$$

$$\left(B_1-B_2\right)\ \left(B_1+B_2\right)=\left(\frac{r_1}{a}\right)^2-\left(\frac{r_2}{a}\right)^2$$

$$B_1+B_2=\frac{a}{r}\left[\left(\frac{r_1}{a}\right)^2-\left(\frac{r_2}{a}\right)^2\right] \quad ، \quad B_1-B_2=\frac{r}{a}$$

$$B_1=\frac{r_1^2-r_2^2+r^2}{\sqrt{\left(r_1^2-r_2^2\right)^2+r^4-2r^2\left(r_1^2+r_2^2\right)}} \quad ، \quad B_2=\frac{r_1^2-r_2^2-r^2}{\sqrt{\left(r_1^2-r_2^2\right)^2+r^4-2r^2\left(r_1^2+r_2^2\right)}}$$

ظرفیت واحد طول خازنی که از این دو استوانه ساخته می‌شود برابر $C=\frac{\lambda}{V}$ است که در آن $V=\phi_1-\phi_2$ می‌باشد. پتانسیل هر استوانه را از قسمت (الف) محاسبه می‌کنیم. در قسمت (الف)، $y=0$ قرار داده و برای استوانه‌ی به شعاع r_1، مقدار $x_1=aB_1+r_1$ و برای استوانه‌ی به شعاع r_2، مقدار $x_2=aB_2+r_2$ را قرار می‌دهیم و به ترتیب ϕ_1 و ϕ_2 را محاسبه می‌کنیم.

$$\phi_1=-\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\frac{\left(aB_1+r_1-a\right)^2}{\left(aB_1+r_1+a\right)^2}=-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{a\left(B_1-1\right)+r_1}{a\left(B_1+1\right)+r_1}$$

$$\phi_1=-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{a\left(B_1-1\right)+a\sqrt{B_1^2-1}}{a\left(B_1+1\right)+a\sqrt{B_1^2-1}}=-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{\sqrt{B_1-1}\left(\sqrt{B_1-1}+\sqrt{B_1+1}\right)}{\sqrt{B_1+1}\left(\sqrt{B_1+1}+\sqrt{B_1-1}\right)}$$

$$\phi_1=-\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{B_1-1}{B_1+1}\right)$$

به همین ترتیب برای استوانه‌ی به شعاع r_2 می‌توان ϕ_2 را محاسبه کرد که جواب به طور مشابه می‌شود:

$$\phi_2 = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{B_2-1}{B_2+1}\right)$$

$$V = \phi_1 - \phi_2 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\frac{(B_2-1)\,(B_1+1)}{(B_2+1)\,(B_1-1)}$$

بنابراین ظرفیت واحد طول خازن می‌شود:

$$C = \frac{\lambda}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left|\ln\dfrac{(B_2-1)\,(B_1+1)}{(B_2+1)\,(B_1-1)}\right|}$$

با گذاشتن مقادیر B_1 و B_2 و انجام یک سری عملیات ساده به دست می‌آوریم:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left|\ln\dfrac{r^2-\left(r_1^{\,2}+r_2^{\,2}\right)+\sqrt{\left(r_1^{\,2}-r_2^{\,2}\right)^2+r^4-2r^2\left(r_1^{\,2}+r_2^{\,2}\right)}}{r^2-\left(r_1^{\,2}+r_2^{\,2}\right)-\sqrt{\left(r_1^{\,2}-r_2^{\,2}\right)^2+r^4-2r^2\left(r_1^{\,2}+r_2^{\,2}\right)}}\right|}$$

ت) در حالت حدی $r = 0$ داریم:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\ln\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)}$$

که همان ظرفیتی است که برای دو استوانه‌ی هم‌مرکز از طریق معمولی به دست می‌آید.

در حالت حدی $r \to r_1 + r_2$ مشاهده می‌شود که $C \to \infty$ و این همان چیزی است کـه بـرای دو استوانه‌ی مماس خارجی برهم انتظار داریم.

آزمون‌های

دوره‌ی تابستان

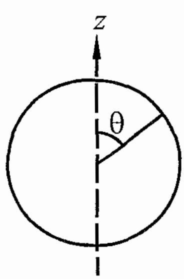
سال ۱۳۷۷

آزمون اول

۱) نیروی گرانشی بین دو جرم m و m' به شکل $F = G\frac{mm'}{r^2}$ است، که در آن r فاصله‌ی دو جرم از یکدیگر و F نیرو است. فرض کنید چگالی جرم یک کهکشان برحسب فاصله از مرکز آن به شکل $\rho = ar^{\alpha}$ باشد، که در آن α و a ثابت‌اند. اکنون ستاره‌هایی را در نظر بگیرید که در فاصله‌ی r از مرکز این کهکشان روی دایره‌هایی به شعاع r می‌چرخند. در این صورت، سرعت حرکت ستاره‌ها در فاصله‌ی r با r^{β} متناسب می‌شود. با تحلیل ابعادی β را به دست آورید.

۲) فاصله‌ی خورشید تا نزدیک‌ترین ستاره‌ی نسبت به آن در حدود $4\,\mathrm{Ly}$ است. کهکشان ما تقریبا به شکل قرصی به شعاع $3\times10^4\,\mathrm{Ly}$ و ضخامت $10^3\,\mathrm{Ly}$ است. فاصله‌ی کهکشان ما تا کهکشان همسایه، امراةالمسلسله $2\times10^6\,\mathrm{Ly}$ بوده و اندازه‌ی جهان قابل مشاهده هم تقریبا $10^{10}\,\mathrm{Ly}$ است. با فرض اینکه این فاصله‌ها، فاصله‌های نوعی ستاره‌ها از هم در کهکشان ما و نیز ابعاد نوعی کهکشانها و فاصله‌ی کهکشانها از هم‌اند، مجموع تعداد پروتونها و نوترونهای جهان را تخمین بزنید.

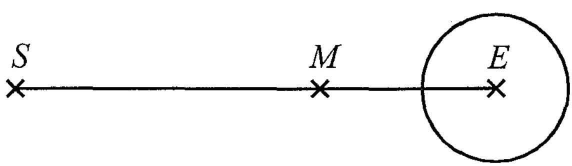
۳) بر روی سه گوشه از چهار گوشه‌ی یک هرم چهار وجهی منتظم سه بار $+q$ قرار می‌دهیم. میدان الکتریکی را در مرکز هرم محاسبه کنید. یال چهار وجهی منتظم l است.



۴) بر روی یک کره چگالی باری متناسب با $\cos\theta$ وجود دارد. دو قطبی الکتریکی معادل این توزیع بار را در فواصل دور حساب کنید.

آزمون دوم

۱) ماه در مداری تقریبا دایره‌ای شکل به دور زمین می‌گردد. صفحه‌ی این مدار، تقریبا همان صفحه‌ی مدار زمین به دور خورشید است. در حالتی که خط واصل خورشید و ماه،زمین را قطع کند کسوف رخ می‌دهد.لکه‌ی کسوف را روی زمین یک نقطه فرض کنید. می‌خواهیم سرعت لکه را نسبت به یک چارچوب ثابت در زمین به دست آوریم. فرض کنید محور حرکت وضعی زمین بر مدار حرکت زمین به دور خورشید عمود است. مبدا زمان را لحظه‌ای بگیرید که مرکز زمین، ماه و خورشید روی یک خط قرار دارند. شعاع زمین را $R_{\mathrm{E}} = 6400\,\mathrm{km}$ و فاصله‌ی زمین تا ماه را $R_{\mathrm{M}} = 60R_{\mathrm{E}}$ بگیرید. فاصله‌ی خورشید تا زمین خیلی بزرگتر از فاصله‌ی زمین تا ماه است. جهت دوران ماه به دور زمین همان جهت حرکت وضعی زمین می‌باشد.



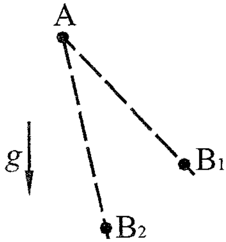
الف) سرعت لکه را برحسب زمان به دست آورید.

ب) لکه به طرف شرق حرکت می‌کند یا غرب؟

برای همه‌ی کمیتهای دیگری که ممکن است لازم داشته باشید مقدار مناسبی انتخاب نمایید. عبارتهای حاصل را با استفاده از اعداد داده شده، تا حد امکان ساده کنید. (تقریبهای مناسبی به کار ببرید.)

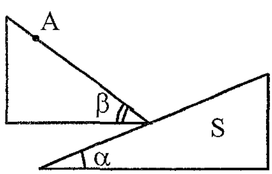
۲) یک تفنگ الکترونی باریکه‌ای به قطر $1\,\mathrm{mm}$ با جریان $10\,\mu\mathrm{A}$ و انرژی $1\,\mathrm{keV}$ ایجاد می‌کند. برخورد باریکه با یک صفحه‌ی فلورسنت که $10\,\mathrm{cm}$ دورتر قرار دارد نشان می‌دهد که قطر باریکه

به علت دافعه‌ی الکتریکی بارها اندکی افزایش یافته است. مقدار افزایش قطر را حساب کنید. فرضیات و تقریبهایی که برای حل مسئله به کار می‌برید توضیح دهید.

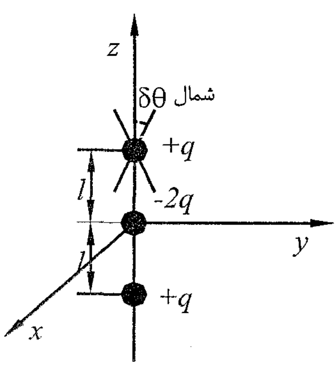


۳) ذره‌ای را در نقطه‌ی A در میدان گرانش در نظر بگیرید. سطح شیبداری با اصطکاک ناچیز که شیب آن را به دلخواه می‌توان تغییر داد در اختیار داریم. در زمان $t=0$ ذره را از نقطه‌ی A رها می‌کنیم. در زمان $t=T$ ذره به نقطه‌ی B_1 می‌رسد. اگر شیب سطح شیبدار مقدار دیگری بود ذره به نقطه‌ی B_2 می‌رسید.

الف)اگر با تغییر شیب سطح شیبدار نقاط B_3، B_4 و... را به دست آوریم، این نقاط روی چه منحنی قرار دارند؟



ب) سطح شیبدار S را مطابق شکل در نظر بگیرید. ذره را روی سطح شیبدار دیگری که اصطکاک آن ناچیز است و از نقطه‌ی A می‌گذرد قرار می‌دهیم. زاویه‌ی شیب، β را به گونه‌ای تعیین کنید که زمان رسیدن ذره به سطح شیبدار S کوتاهترین مقدار باشد.



۴) یک چهار قطبی الکتریکی مطابق شکل از یک بار $-2q$ و دو بار $+q$ روی محور z تشکیل شده است. فاصله‌ی بارها از یکدیگر l است.

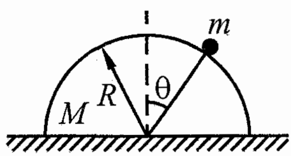
الف) خطوط میدان الکتریکی را ترسیم کنید.

ب) خطوط میدان الکتریکی که از بار $+q$ در زاویه‌ی قطبی کروی خیلی کوچک $\delta\theta$ از قطب شمال و جنوب آن سرچشمه می‌گیرند، در چه زاویه‌ی قطبی کروی $(\delta\theta'', \delta\theta')$ روی بار $-2q$ فرود می‌آیند؟

پ) میدان الکتریکی ناشی از این چهار قطبی روی محور z چقدر است؟

ت) با استفاده از قانون گاوس، میدان الکتریکی شعاعی در امتداد بردار واحد $\mathbf{e}_\rho$ و در نقاط دور از بارها و نزدیک محور z را به دست آورید. ($\mathbf{e}_\rho$ بردار واحد شعاعی در مختصات استوانه‌ای است.)

آزمون سوم



۱) مطابق شکل ذره‌ای به جرم m روی جرم M قرار دارد. از اصطکاک بین جرم m و نیم‌کره صرف‌نظر کنید. ولی بین نیم‌کره و نیم‌کره‌ای به زمین اصطکاک وجود دارد و ضریب اصطکاک ایستایی آن μ_s است.

الف) با فرض آنکه μ_s به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، در مدتی که جرم m روی نیم‌کره می‌لغزد، نیم‌کره حرکتی نخواهد کرد. در این حالت نیروی اصطکاک بین نیم‌کره و زمین را برحسب زاویه‌ی θ به دست آورید.

ب) حداقل μ_s چه مقدار باشد که نیم‌کره حرکت نکند؟ برای حل این بخش ابتدا معادله‌ی لازم را به دست آورید و سپس با فرض $\alpha = \dfrac{m}{M} << 1$ مقدار μ_s را تا مرتبه‌ی اول نسبت به α محاسبه کنید.

۲) یک دوقطبی الکتریکی متغیر با زمان تابش می‌کند. مقدار توان تابشی به مشتق زمانی nام دوقطبی بستگی دارد.

الف) با تحلیل ابعادی مقدار توان تابشی و نیز n را به دست آورید (راهنمایی: $\mu_0\varepsilon_0 = \dfrac{1}{v^2}$).

ب) ذره‌ی بارداری را درنظر بگیرید که روی دایره‌ای دور یک بار ناهمنام ثابت می‌گردد. مقدار بار مرکزی Q، مقدار بار گردان $-q$ و جرم ذره‌ی گردان m است. در اثر تابش، شعاع مدار ذره‌ی گردان تغییر می‌کند. فرض کنید طی تابش شعاع مدار به کندی تغییر کند، به طوری که بتوان

مدار را در هر زمان دایره‌ای در نظر گرفت. معادله‌ی r (شعاع مدار) را برحسب زمان به دست آورید.

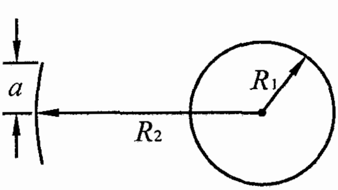
پ) همین مسئله را در مورد اتم هیدروژن درنظر بگیرید. با فرض اینکه معادلات حاکم بر الکترون، همان معادلات کلاسیک باشد، مرتبه‌ی بزرگی زمان سقوط الکترون بر پروتون را به دست آورید. بار پروتون تقریبا $10^{-19}\ \mathrm{C}$ و جرم الکترون تقریبا $10^{-30}\ \mathrm{kg}$ است. شعاع اولیه‌ی اتم هیدروژن تقریبا 0.5 آنگستروم است.

راهنمایی: پارامترهای ثابت بخش (الف) را $k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\approx 10^{10}\dfrac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}$ و v (سرعت نور) و در بخش (پ) ثابت بدون بعد مربوط به تحلیل ابعادی را از مرتبه‌ی یک بگیرید.
$(1\mathrm{A^\circ}=10^{-10}\ \mathrm{m})$

۳) وقتی N جسم رسانا به ترتیب دارای بارهای Q_1، Q_2،... و Q_N باشند، پتانسیل هر جسم از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$V_\mathrm{i}=\sum_{j=1}^{N}P_\mathrm{ij}Q_\mathrm{j}$$

که در آن Q_j بار روی جسم j ام و V_i پتانسیل جسم i ام است. ضرایب P_ij نیز ثابتهایی هستند که به هندسه‌ی سیستم بستگی دارند و به بار روی رساناها بستگی ندارند. می‌توان نشان داد که $P_\mathrm{ij}=P_\mathrm{ji}$ است.



حال فرض کنید مطابق شکل عرقچینی به فاصله‌ی R_2 (شعاع کره‌ای که این عرقچین از آن جدا شده است.) از کره‌ای به شعاع R_1 قرار دارد. فاصله‌ی لبه‌ی عرقچین از محور آن a است. با توجه به اطلاعات داده شده اگر بار در واحد سطح روی عرقچین σ باشد، پتانسیل کره‌ی R_1 چقدر می‌شود؟

۴) یک خازن مسطح دارای صفحاتی به مساحت $0.12\,\mathrm{m^2}$ و به فاصله‌ی $1.2\,\mathrm{cm}$ از هم است. یک باتری این صفحات را تا اختلاف پتانسیل $120\,\mathrm{V}$ پر می‌کند و سپس برداشته می‌شود. آنگاه یک

بره‌ی دی‌الکتریک به ضخامت $0.4\,\mathrm{cm}$ و ثابت دی‌الکتریک 4.8 به طور متقارن در میان صفحات قرار داده می‌شود.

الف) ظرفیت خازن را قبل از قراردادن بره پیدا کنید.

ب) ظرفیت با وجود بره چقدر است؟

پ) بار آزاد q قبل و بعد از قراردادن بره چقدر است؟

ت) میدان الکتریکی را در فضای میان صفحات و دی‌الکتریک تعیین کنید.

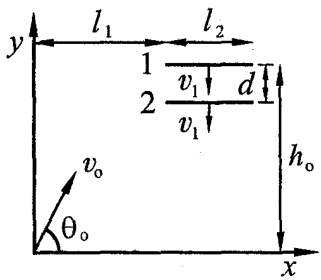
ث) میدان الکتریکی در دی‌الکتریک چقدر است؟

ج) با بودن بره، اختلاف پتانسیل میان صفحات چقدر است؟

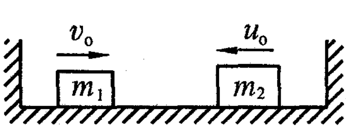
چ) در فرآیند قراردادن بره چقدر کار خارجی باید انجام شود؟

آزمون چهارم

۱) دو صفحه ی 1 و 2 که موازی محور x هستند، با سرعت ثابت v_1 در جهت $-\hat{j}$ در حرکت‌اند. زمانی که صفحه‌ی 1 در $y = h_0$ قرار دارد، ذره‌ای با سرعت v_0 که با محور x زاویه‌ی θ_0 می‌سازد پرتاب می‌شود. مقادیر d، l_1 و l_2 در چه شرایطی صدق کنند که ذره ابتدا با صفحه‌ی 1 برخورد کند و سپس با صفحه‌ی 2 برخورد کند و پس از آن دیگر هیچ برخوردی با دو صفحه نداشته باشد؟ تمام برخوردها را کشسان گرفته و از گرانش صرفنظر کنید. جرم ذره نسبت به صفحه‌ها ناچیز می‌باشد.



۲) دو جسم به جرمهای m_1 و m_2 روی یک سطح بدون اصطکاک بین دو دیوار حرکت می‌کنند. سرعت اولیه‌ی آنها به ترتیب v_0 و u_0 است. ضریب جهندگی بین دو جرم برابر با η_1 و ضریب جهندگی اجسام با دیوارها η_2 است. فرض کنید هر کدام از اجسام بین دو برخورد متوالی با یکدیگر، یک بار با دیوار برخورد می‌کنند. سرعت هر کدام از این اجسام را پس از n بار برخورد به یکدیگر حساب کنید.

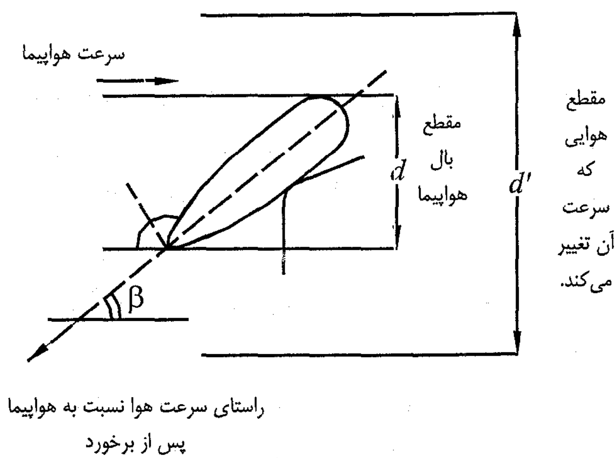


۳)

الف) کره‌ای به شعاع R با سرعت v در هوای ساکن حرکت می‌کند .به خاطر برخورد مولکولهای هوا با این کره، نیرویی بر کره وارد می‌شود که آن را نیروی پس‌آر می‌نامیم. چگالی

هوا ρ است و فرض می‌کنیم برخورد مولکولهای هوا با کره از نوع کره‌ی سخت (و کشسان) است. این نیرو را به دست آورید.

ب) بر هواپیمایی که در هوا پرواز می‌کند، دو نیرو از طرف هوا وارد می‌شود. یکی از این نیروها به خاطر برخورد هوا با هواپیما (عمدتا با بال آن) است. این نیرو را مشابه همان نیرویی بگیرید که بر کره وارد می‌شد. نیروی دیگری که به هواپیما وارد می‌شود ناشی از تغییر مسیر هوایی است که از کناره‌ی بالها می‌گذرد.



تغییر مسیر چنان است که اندازه‌ی سرعت هوا نسبت به هواپیما تغییر نمی‌کند، اما جهت این سرعت نسبت به جهت اولیه زاویه‌ی β می‌سازد. فرض کنید ضخامت بخشی از هوا که چنین تغییری می‌یابد d' و ضخامت بال هواپیما d باشد. نیروی پس‌آر و نیروی بالابر وارد بر هواپیما را حساب کنید. فاصله‌ی نوک بالهای هواپیما از هم را L بگیرید. از اینجا سرعت هواپیما را بر حسب وزن آن، چگالی هوا، β و پارامترهای هندسی مسئله به دست آورید. (فرض کنید هواپیما به طور افقی پرواز می‌کند.)

پ) توان مفید هواپیما را (بخشی از توان که به صورت مکانیکی مصرف می‌شود)به دست آورید.

ت) وزن هواپیما را 2×10^5 N ، چگالی هوا را 1kg/m^3 و سرعت هواپیما را 200m/s بگیرید. فاصله‌ی نوک بالها را 10m و d' را 5m فرض کنید. d را 0.5m بگیرید. با استفاده از این داده‌ها β و توان مکانیکی موتور هواپیما را حساب کنید.

آزمون پنجم

۱) میدان مغناطیسی زمین را با تقریب خوب می‌توان شبیه میدان ناشی از یک دوقطبی مغناطیسی فرض کرد. می‌دانیم میدان مغناطیسی یک دوقطبی در فاصله‌ی r از آن با $\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\hat{n}(\hat{n}\cdot\mathbf{M})-\mathbf{M}}{r^3}$ داده می‌شود، که در آن $\hat{n}=\frac{\mathbf{r}}{r}$ بردار واحد در امتداد $\mathbf{r}$ و $\mathbf{M}$ گشتاور مغناطیسی است. در مورد زمین جهت $\mathbf{M}$ به سمت جنوب بوده و این میدان مغناطیسی در استوای مغناطیسی برابر $\frac{1}{3}$ گاؤس است ($1\mathrm{T}=10^4\,\mathrm{G}$).

الف) خطوط میدان مغناطیسی زمین را ترسیم کنید.

ب) میدان مغناطیسی روی سطح زمین را برحسب تابعی از زاویه‌ی متمم عرض جغرافیایی (زاویه‌ی قطبی کروی) به دست آورید و نمودار آن را ترسیم کنید ($B-\theta$).

پ) مقدار M، گشتاور مغناطیسی زمین چقدر است؟

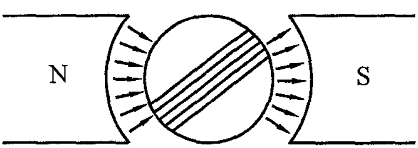
ت) معادله‌ی خطوط نیروی مغناطیسی را به دست آورید.

$\int \cot a n\,\theta\, d\theta=\frac{1}{2}\ln\sin^2\theta$ ، شعاع زمین $=6400\,\mathrm{km}$

۲) از یک سیم استوانه‌ای به شعاع R جریان I می‌گذرد. توزیع جریان در سیم را یکنواخت فرض کنید. به خاطر میدان مغناطیسی حاصل از این جریان،چگالی باری در استوانه ایجاد می‌شود. رابطه‌ی چگالی بار را با شعاع استوانه‌ای (فاصله‌ی نقطه‌ی مشاهده تا محور استوانه) به دست آورید. کل بار روی سطح استوانه بر واحد طول چقدر است؟ چگالی حامل‌های بار، n و بار هر یک q است.

۳) حلقه‌ای رسانا به شعاع r و به مقاومت الکتریکی R را حول یکی از قطرهایش با سرعت زاویه‌ای ω به گردش درمی‌آوریم. لختی دورانی حلقه حول این محور برابر با I است. میدان مغناطیسی‌ای به شدت B_0 عمود بر محور گردش به حلقه اعمال می‌کنیم. توان اتلافی را به دست آورید و از آنجا بسامد زاویه‌ای را برحسب زمان حساب کنید. برای محاسبه فرض کنید میدان مغناطیسی کوچک بوده، در نتیجه تغییرات بسامد زاویه‌ای در یک دوره کم است و از میانگین توان اتلافی در یک دوره استفاده کنید.

۴) یک موتور الکتریکی شامل N دور سیم پیچ است که روی استوانه‌ای آهنی پیچیده شده است. این استوانه در فضای بین دو قطب یک آهنربا قرار دارد به طوری که میدان مغناطیسی در سطح استوانه، شعاعی و مقدار آن ثابت است. میدان در نیمه‌ی چپ استوانه به طرف داخل و در نیمه‌ی راست به طرف خارج است. اتصال خروجیهای سیم پیچ چنان است که وقتی سیم پیچ از سطح جدا کننده‌ی نیمه‌ی چپ و راست می‌گذرد جهت جریان در آن عوض می‌شود به نحوی که جهت جریان در سیم‌های نیمه‌ی چپ استوانه همواره ثابت می‌ماند.

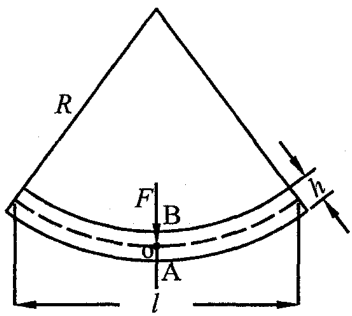


الف) جریان سیم پیچ را i ومساحت آن را A بگیرید. مقاومت سیم پیچ نیز r است. اگر سرعت زاویه‌ای دوران سیم پیچ ω و شدت میدان مغناطیسی B باشد، اختلاف ولتاژ دو سر سیم پیچ، E را به دست آورید.

ب) گشتاور مقاوم وارد بر سیم پیچ‌τ چقدر باشد تا سرعت زاویه‌ای آن ثابت بماند؟

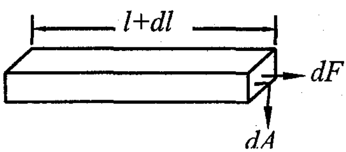
پ) فرض کنید میدان مغناطیسی B را سیم پیچ دیگری می‌سازد که مقاومت آن R است و جریان I از آن می‌گذرد به طوری که $B=kI$ بوده و k مقداری ثابت است. این سیم پیچ را با سیم پیچ قبلی سری می‌کنیم و دو سر مجموعه را به منبعی با اختلاف پتانسیل ϵ می‌بندیم.رابطه‌ی ω را برحسب τ به دست آورید.

ت) اگر دو سیم پیچ را با هم موازی کنیم و به همان منبع ببندیم، رابطه‌ی ω برحسب τ به چه شکل می‌شود؟



۵) می‌خواهیم قطعه‌ی چوبی به طول l، به پهنای w و به ارتفاع h را بشکنیم. برای شکستن، آن را مطابق شکل روی دوپایه قرار داده، به وسط آن نیروی F وارد می‌کنیم. فرض کنید چوب در اثر این نیرو تغییر شکل داده و به شکل کمانی از یک دایره به شعاع R در می‌آید. همچنین فرض کنید که طول، در صفحه‌ای که از وسط چوب می‌گذرد (خط چین) همان مقدار اولیه‌ی طول چوب است.

الف) تغییر طول صفحات مختلف چوب را برحسب x (فاصله‌ی O در راستای AB) به دست آورده و نیرویی را که نیمه‌ی سمت راست چوب به نیمه‌ی سمت چپ یا برعکس وارد می‌کند محاسبه کنید. برای به دست آوردن نیرو از مدول کشسانی یانگ استفاده نمایید. یعنی:



$$\mathrm{d}F = Y\left(\frac{\delta l}{l}\right)\mathrm{d}A$$

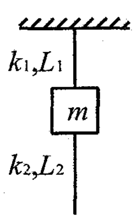
که در آن Y مدول کشسانی یانگ و ثابت است، δl تغییر طول، l طول اولیه و $\mathrm{d}A$ قطعه مساحتی است که نیرو در آنجا محاسبه می‌شود.

ب) برای نیمه‌ی سمت چپ (یا سمت راست) تعادل نیروها و گشتاورها حول O را بنویسید و از آنجا R را برحسب F به دست آورید. (اگر $\frac{\delta l}{l}$ از یک حد بحرانی زیادتر شود، چوب می‌شکند.)

پ) استدلال کنید که چرا R_{C} ای وجود دارد که چوب به محض رسیدن به آن می‌شکند؟

ت) بستگی نیروی لازم برای شکستن چوب را به h, w و l به دست آورید. اگر هر یک را (تک تک) دوبرابر کنیم نیروی لازم چند برابر می‌شود؟

آزمون نهائی



۱) مطابق شکل وزنه‌ای به جرم m از ریسمانی آویزان است و ریسمان دیگری به انتهای آن وزنه متصل است. ضرایب سختی ریسمانها k_1 و k_2 و طول کشیده نشده‌ی آنها L_1 و L_2 می‌باشد. تغییر مکان وزنه نسبت به حالت تعادل خود را x و مکان انتهای ریسمان دوم نسبت به حالت تعادل سیستم را y بنامید. (جهت مثبت را رو به پایین می‌گیریم.) جرم ریسمانها قابل چشم‌پوشی است.

الف) فرض کنید انتهای ریسمان دوم را با معادله‌ی $y(t)$ حرکت دهیم. معادله‌ی دیفرانسیلی بنویسید که تغییرات x برحسب زمان را نشان دهد.

ب) از اینجا به بعد دو ریسمان را مشابه فرض کنید ($k_1 = k_2 = k$ و $L_1 = L_2 = L$). فرض کنید حرکت انتهای ریسمان دوم از زمان صفر آغاز شود و با شتاب ثابت a باشد. $x(t)$ را به دست آورید.

راهنمایی: جواب معادلاتی از نوع $\ddot{X} + \Omega^2 X = Y$ که در آن Y یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n می‌باشد، $X = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t + \tilde{Y}$ بوده که در آن $\tilde{Y}$ هم یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n است. ضرایب موجود در $\tilde{Y}$ از اینجا به دست می‌آید که X در معادله صدق کند و A و B از شرایط اولیه معلوم می‌شود.

پ) مقدار کشیدگی دو ریسمان را به دست آورید.

ت) اگر کشیدگی هر یک از دو ریسمان از l بیشتر شود، آن ریسمان پاره می‌شود. با فرض اینکه این اتفاق در زمان بسیار کوتاهی رخ دهد، مقدار کشیدگی هر یک از دو ریسمان را برحسب t بسط دهید و تنها اولین جمله‌ی غیر صفر (نسبت به $t = 0$) را به دست آورید.

ث) با استفاده از جواب قسمت (ت) به ازای چه مقادیری از a ریسمان اول و به ازای چه مقادیری از a ریسمان دوم پاره می‌شود؟

۲) حلقه‌ای یکنواخت به شعاع R درنظر بگیرید که روی یک سطح افقی قرار داده شده است. ضریب اصطکاک این حلقه با سطح افقی μ است. فرض کنید نیروی اصطکاک که به جزء جزء حلقه وارد می‌شود، به این صورت باشد:

$$d\mathbf{F}_f = -\mu g\, d m \hat{\mathbf{u}}$$

که dm تکه‌جرمی است که نیروی وارد به آن محاسبه می‌شود و $\hat{\mathbf{u}}$ راستای سرعت این تکه جرم است.

الف) فرض کنید این حلقه سرعتی خطی در راستای x داشته باشد. حرکت را بررسی کنید و زمان ایستادن را بیابید.

ب) فرض کنید حلقه تنها یک سرعت زاویه‌ای حول مرکز خود داشته باشد. باز هم حرکت را بررسی کنید و زمان ایستادن را بیابید.

پ) این بار حلقه هم سرعت خطی در راستای x و هم سرعت زاویه‌ای دارد. ثابت کنید که حرکت همواره در راستای x باقی می‌ماند. (ثابت کنید $F_y = 0$ است.)

ت) فرض کنید بین سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای رابطه‌ی $v_0 = R\omega_0$ برقرار است. ثابت کنید در طول حرکت این وضعیت پایدار می‌ماند، یعنی: $v(t) = R\omega(t)$ می‌باشد. زمان ایستادن را در این حالت به دست آورید و با قسمتهای (الف) و (ب) مقایسه کنید.

۳)

الف) لختی دورانی مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a، چگالی یکنواخت و جرم m را حول محور گذرنده از مرکز جرم آن و عمود بر مثلث به دست آورید.

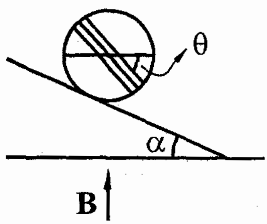
ب) لختی دورانی منشوری به ارتفاع l و به قاعده‌ی مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a را حول محور گذرنده از مرکز جرم قاعده و عمود بر آن به دست آورید. چگالی منشور یکنواخت و جرم آن m است.

پ) قاعده‌ی منشوری یک n ضلعی منتظم بوده که طول ضلع(n ضلعی) آن a و ارتفاع منشور l است. لختی دورانی این منشور را حول محور گذرنده از مرکز جرم قاعده و عمود بر آن به دست آورید. چگالی منشور یکنواخت و جرم آن m است.

ت) این منشور n وجهی را روی سطح شیبداری با زاویه‌ی α می‌گذاریم به طوری که یکی از وجه‌های جانبی آن روی سطح شیبدار باشد. حداقل ضریب اصطکاک ایستایی بین سطح منشور و

سطح شیبدار چقدر باشد تا منشور نلغزد؟ چه شرطی لازم است تا منشور شروع به غلتیدن نکند؟

۴) مطابق شکل، استوانه‌ای به قطر D و ارتفاع L روی سطح شیبداری قرار دارد. سیم‌پیچی متشکل از n دور روی این استوانه پیچیده شده است به طوری که یک ضلع سیم‌پیچ، قطر استوانه و ضلع دیگر آن ارتفاع استوانه است. از این سیم‌پیچ جریان ثابت i می‌گذرد. زاویه‌ی صفحه‌ی سیم‌پیچ با سطح افقی را θ بگیرید. مجموعه در میدان مغناطیسی قائم یکنواخت B قرار دارد. جرم استوانه m و لختی دورانی آن (حول محور تقارن استوانه) I است. استوانه روی سطح شیبدار فقط می‌غلتد.



الف) حداقل B چقدر باشد تا نقطه‌ی تعادلی برای استوانه وجود داشته باشد؟ (سیم پیچ با استوانه چسبیده است و با آن می‌چرخد.)

ب) با فرض وجود نقطه‌ی تعادل، بسامد نوسانهای کوچک حول نقطه‌ی تعادل پایدار چقدر است؟

پ) فرض کنید استوانه را در وضعیت تعادل پایدار قرار داده و به آن یک سرعت زاویه‌ای ω_0 بدهیم. ω_0 حداکثر چقدر باشد تا حرکت استوانه حول نقطه‌ی تعادل پایدار باقی بماند؟ (یعنی به طور نامحدود از نقطه‌ی تعادل دور نشود.)

۵) دو کره‌ی رسانا به شعاعهای a و b $(a<b)$ داریم. کره‌ی اول درون کره‌ی دوم بوده و اختلاف پتانسیل دو کره V است.

الف) اگر دو کره هم‌مرکز باشند، پتانسیل به شکل $\phi = \frac{A}{r} + B$ است. A را به دست آورید.

ب) فرض کنید فاصله‌ی مراکز دو کره از هم ϵ باشد. مبدا مختصات را مرکز کره‌ی بزرگ و مرکز کره‌ی کوچک را روی نقطه‌ی $\epsilon\hat{\mathbf{z}}$ بگیرید. رابطه‌ی r برحسب θ را برای کره‌ی کوچک به دست آورید. در اینجا r فاصله تا مبدا مختصات و θ زاویه‌ی بردار $\mathbf{r}$ با محور z است.

پ) در حالتی که کره‌ها هم‌مرکز نباشند ϕ تا مرتبه‌ی دو نسبت به ϵ به شکل:

$$\phi = \frac{A}{r} + B + \left(\frac{C}{r^2} + Dr\right)\cos\theta + \left(\frac{E}{r^3} + Fr^2\right)\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$$

است که در آن A، B، C، D، E و F ثابت‌اند. از اینجا ظرفیت سیستم را تا مرتبه‌ی دو نسبت به ϵ حساب کنید.

پاسخ آزمون‌های

دوره‌ی تابستان

سال ۱۳۷۷

پاسخ آزمون اول

۱) سرعت ستاره‌ها، v به کمیتهای G، a و r بستگی دارد. بنابراین با این چهار کمیت می‌توان کمیتهای بدون بعد ساخت.

$$Q = v^x G^y a^z r^m$$

$$[Q] = \left(LT^{-1}\right)^x \left(M^{-1}L^3T^{-2}\right)^y \left(ML^{-3-\alpha}\right)^z L^m$$

$$[Q] = L^{x+3y-3z-\alpha z+m} T^{-x-2y} M^{-y+z}$$

$$\begin{cases} -y + z = 0 \Rightarrow y = z \\ -x - 2y = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{x}{2} \\ x + 3y - 3z - \alpha z + m = 0 \end{cases}$$

$$x - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x + \frac{\alpha}{2}x + m = 0$$

$$m = -\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)x$$

بنابراین کمیت بدون بعد به صورت $\dfrac{v}{G^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} r^{1+\frac{\alpha}{2}}}$ است و داریم:

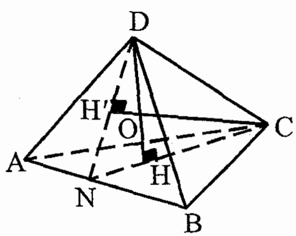
$$v = \mathrm{k}\sqrt{Ga}\ r^{1+\frac{\alpha}{2}}$$

بنابراین $\beta = 1 + \dfrac{\alpha}{2}$ است.

۲) با توجه به فاصله‌ی نوعی ستاره‌ها در کهکشان خودمان $(4\,\mathrm{Ly})$، می‌توان گفت که در هر مکعب به ابعاد $4\,\mathrm{Ly}$ یک ستاره قرار دارد یعنی در حجم $4^3\left(\mathrm{Ly}\right)^3$ یک ستاره موجود است. با توجه به

ابعاد کهکشان، حجم کهکشان برابر با $\pi\left(3\times10^{4}\right)^{2}\times10^{3}(\mathrm{Ly})^{3}\approx10^{12}(\mathrm{Ly})^{3}$ است. بنابراین تعداد کل ستارگان در کهکشان خودمان تقریبا 10^{11} ستاره است. همچنین در هر مکعب به ابعاد 2×10^{6} Ly یک کهکشان داریم. پس در حجم $8\times10^{18}(\mathrm{Ly})^{3}$ یک کهکشان قرار دارد. حجم جهان قابل مشاهده نیز $10^{30}(\mathrm{Ly})^{3}$ است. بنابراین در جهان حدودا 10^{11} کهکشان داریم و چون در هر کدام نیز 10^{11} ستاره قرار گرفته، پس 10^{22} ستاره مانند خورشید در جهان وجود دارد. جرم خورشید حدود 10^{33} gr است و چون هر گرم تقریبا 10^{23} پروتون و نوترون دارد، پس در هر ستاره مثل خورشید $10^{33}\times10^{23}=10^{56}$ پروتون و نوترون است و بنابراین تعداد کل پروتونها و نوترونهای جهان حدودا $10^{56}\times10^{22}=10^{78}$ می‌باشد.

۳) نقطه‌ی O مرکز هرم است که از تقاطع ارتفاعهای هرم به دست می‌آید. لازم است فاصله‌ی O را تا رئوس هرم به دست آوریم. این فاصله $\frac{3}{4}$ ارتفاع است. ارتفاع DH نیز برابر با $\sqrt{\mathrm{DC}^2-\mathrm{HC}^2}$ می‌باشد، که در آن $\mathrm{DC}=l$ و $\mathrm{HC}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}l$ است. بنابراین طول OD برابر می‌شود با:



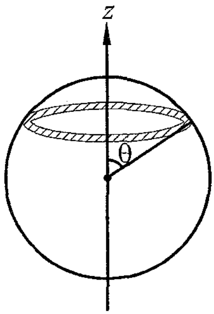
$$\mathrm{OD}=\frac{3}{4}\mathrm{DH}=\frac{3}{4}\sqrt{l^2-\frac{1}{3}l^2}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\,l=\frac{\sqrt{6}}{4}l$$

اگر روی چهار راس هرم بار q باشد، بنا به تقارن میدان کل در مرکز هرم صفر است. یعنی میدان ناشی از بارهای روی رئوس A، B و C برابر میدان ناشی از بار روی راس D و در خلاف جهت آن خواهدبود. پس کافی است میدان ناشی از یک بار q روی یک راس چهاروجهی را حساب کنیم.

$$E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q}{\mathrm{OD}^2}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q}{\frac{6}{16}l^2}=\frac{2q}{3\pi\epsilon_0 l^2}$$

جهت میدان حاصل از بار واقع در نقطه‌ی D به سمت پایین است. بنابراین جهت میدان ناشی از سه بار q واقع در سه راس چهاروجهی در مرکز آن در راستای عمود بر وجه پایینی و به سمت بالا خواهد بود.

۴)



راه اول: یک نوار باریک در زاویه‌ی θ درنظر می‌گیریم. مساحت این نوار برابر است با:

$$\mathrm{d}S = 2\pi R^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta$$

چگالی بار روی آن $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ بوده و بار آن برابر با $\mathrm{d}q = 2\pi R^2 \sigma_0 \sin\theta \cos\theta \,\mathrm{d}\theta$ خواهد شد. در زاویه‌ی $\pi-\theta$ نیز همین بار با علامت منفی وجود دارد. فاصله‌ی این دو نوار $2R\cos\theta$ بوده و دوقطبی معادل آن $\mathrm{d}P = 4\pi R^3 \sigma_0 \sin\theta \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta$ می‌باشد. لذا دوقطبی کل برابر است با:

$$P = 4\pi R^3 \sigma_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta = 4\pi R^3 \sigma_0 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_0$$

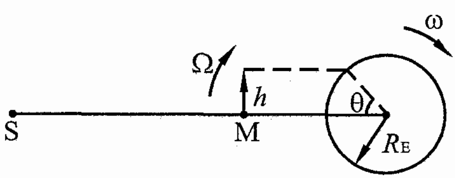
جهت آن نیز در امتداد z است. یعنی: $\mathbf{P} = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_0 \hat{\mathrm{k}}$.

راه دوم: فرض کنید کره از یک دی‌الکتریک پر شده که بردار قطبش آن به صورت $\mathbf{P} = P\hat{\mathrm{k}}$ می‌باشد. در این صورت $\sigma = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathrm{n}} = P\cos\theta$ بوده که در آن $P = \sigma_0$ است. بنا به تعریف بردار $\mathbf{P}$، دوقطبی در واحد حجم است. پس کل دوقطبی می‌شود: $\mathbf{P} = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_0 \hat{\mathrm{k}}$.

پاسخ آزمون دوم

۱)

الف) فرض کنید جابه‌جایی زمین در مدارش به دور خورشید در مدت کسوف قابل صرف‌نظر است. همچنین فرض کنید جابه‌جایی ماه در مدت کسوف آنقدر کم است که بردار جابه‌جایی آن بر خط واصل خورشید و زمین عمود می‌باشد. داریم:



$$\sin\theta = \frac{h}{R_E} \quad , \quad h = v_M t = R_M \Omega t$$

که در آن h فاصله‌ایست که ماه در مدت t طی کرده است و v_M و Ω به‌ترتیب سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای ماه به دور زمین می‌باشند. بنابراین داریم:

$$\sin\theta = \frac{R_M \Omega t}{R_E}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{R_M \Omega t}{R_E}\right)$$

بنابراین اگر زمین حرکت وضعی نمی‌داشت، سرعت لکه روی زمین برابر با $v_\theta = R_E \dot{\theta}$ می‌شد. اما با توجه به حرکت وضعی زمین ، سرعت حرکت لکه با توجه به جهت چرخش یکسان زمین با جهت چرخش ماه به دور زمین برابر می‌شود با:

$$v = v_\theta - R_E\omega = R_E\dot{\theta} - R_E\omega = R_E\left[\frac{R_M\Omega}{R_E\sqrt{1-\left(\frac{R_M\Omega t}{R_E}\right)^2}} - \omega\right]$$

که در آن ω سرعت زاویه‌ای زمین به دور خودش است. داریم:

$$R_E = 6.4\times10^6\,\text{m} \quad , \quad R_M = 60R_E = 3.8\times10^8\,\text{m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} = 7.3\times10^{-5}\,\text{s}^{-1} \quad , \quad \Omega = 2.5\times10^{-6}\,\text{s}^{-1}$$

تا زمان $t < \frac{R_E}{R_M\Omega}$ لکه روی زمین بوده و تا همین زمان رابطه‌ی مربوط به v برقرار است.

پس:

$$v \approx \left(\frac{900}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{6900}\right)^2}} - 465\right)\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ب) چون $R_E\omega$ همواره کوچکتر از سرعت دوران ماه است، پس جهت حرکت سایه به طرف شرق می‌باشد.

۲) چون قطر باریکه نسبت به طول آن بسیار کوچک است (حدوداً $\frac{1}{100}$)، پس میدان را می‌توان از طریق میدان خط طویل بار به دست آورد. میدان خط بار در فاصله‌ی r از آن با چگالی خطی λ برابر $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ است. اگر n تعداد الکترونها در واحد حجم، v سرعت الکترونها و A سطح مقطع باریکه باشد، جریان $i = nAev$ و چگالی خطی $\lambda = nAe$ است. بنابراین $\lambda = \frac{i}{v}$ می‌شود.

مقدار v نیز از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$v = \sqrt{\frac{2E'}{m}} \approx 1.9\times10^7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

که در آن از $E' = 1\text{keV}$ و $m \approx 9\times10^{-31}\,\text{kg}$ استفاده شده است. بنابراین:

$$\lambda = \frac{i}{v} = \frac{10\times10^{-6}}{1.9\times10^7} \approx 5\times10^{-13}\,\frac{\text{C}}{\text{m}}$$

چون تغییر r کم است، داریم: $r \approx r_0$ و خواهیم داشت:

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o r_o}=18\times10^9\times\frac{5\times10^{-13}}{10^{-3}}=9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

و نیروی F وارد بر یک الکترون می‌شود:

$$F=eE=1.6\times10^{-19}\times9=1.4\times10^{-18}\ \mathrm{N}$$

و شتاب الکترون به دست می‌آید:

$$a=\frac{F}{m}=\frac{1.4\times10^{-18}}{9\times10^{-31}}=1.6\times10^{12}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

اگر سرعت افقی همان v باشد، زمان رسیدن باریکه به دیوار برابر است با:

$$t=\frac{x}{v}=\frac{0.1}{1.9\times10^7}=5.2\times10^{-9}\ \mathrm{s}$$

و جابه‌جایی عرضی باریکه نیز در این مدت برابر است با:

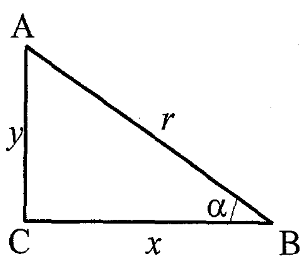
$$S=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times1.6\times10^{12}\times\left(5.2\times10^{-9}\right)^2\approx2.2\times10^{-5}\ \mathrm{m}$$

بنابراین شعاع باریکه به اندازه‌ی S افزایش می‌یابد و قطر باریکه به اندازه‌ی $2S=4.4\times10^{-5}\ \mathrm{m}$ افزایش خواهد یافت.

۳)

الف) برای یک سطح شیبدار بدون اصطکاک با زاویه‌ی شیب α، شتاب یک جسم روی آن برابر $g\sin\alpha$ است و در مدت زمان $t=T$ طول طی شده روی آن برابر است با:

$$r=\frac{1}{2}aT^2=\frac{1}{2}gT^2\sin\alpha$$



جابه‌جایی افقی و قائم ذره برابر است با:

$$x=r\cos\alpha=\frac{1}{2}gT^2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}gT^2\sin2\alpha \qquad (1)$$

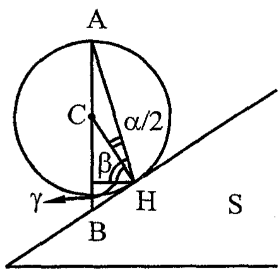
$$y=-r\sin\alpha=-\frac{1}{2}gT^2\sin^2\alpha=-\frac{1}{4}gT^2\left(1-\cos2\alpha\right)$$

$$y+\frac{1}{4}gT^2=\frac{1}{4}gT^2\cos2\alpha \qquad (2)$$

اگر طرفین روابط (1) و (2) را به توان دو برسانیم و با هم جمع کنیم، به دست می‌آوریم:

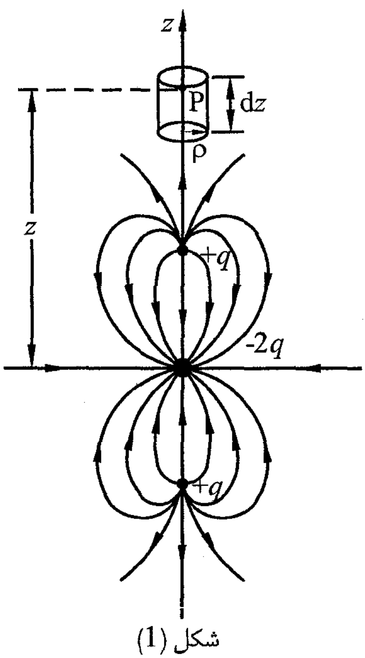
$$x^2+\left(y+\frac{1}{4}gT^2\right)^2=\left(\frac{1}{4}gT^2\right)^2$$

بنابراین مکان هندسی این نقاط دایره‌ای به مرکز $\left(0,-\frac{1}{4}gT^2\right)$ و شعاع $\frac{1}{4}gT^2$ است.

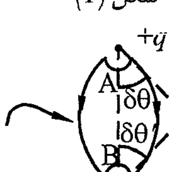


ب) با توجه به قسمت (الف) اگر در امتداد قائم AB نقطه‌ی C را طوری انتخاب کنیم که دایره‌ی رسم شده به مرکز C، در نقطه‌ی H بر سطح شیبدار S مماس شود، مسیر AH کمترین زمان را خواهد داشت. بنابراین مقدار $\beta=\gamma+\frac{\alpha}{2}$ بوده که در آن $\gamma=\frac{\pi}{2}-\alpha$ است. لذا $\beta=\frac{\pi-\alpha}{2}$ می‌باشد.

۴)



شکل (1)



شکل (2)

الف) خطوط میدان به صورت شکل (1) است.

ب) مطابق شکل (2) خطوطی که از قطب جنوب بار $+q$ خارج می‌شوند در قطب شمال بار $-2q$ فرود می‌آیند. یک سطح گاؤسی مطابق شکل طوری انتخاب می‌کنیم که سطوح جانبی آن در امتداد خطوط میدان باشند و سطوح بالا و پایین این سطح گاؤسی در نزدیکی بارها واقع شوند. شار کل عبوری از این سطح صفر است زیرا باری داخل آن وجود ندارد. چون شار روی سطوح جانبی صفر است، شار از سطح A با شار از سطح B با هم برابرند.

$$\phi_A=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}(1-\cos\delta\theta)\approx\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\delta\theta^2}{2}\right)$$

$$\phi_B=\frac{2q}{4\pi\epsilon_0}(1-\cos\delta\theta')\approx\frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\delta\theta'^2}{2}\right)$$

از تساوی $\phi_A=\phi_B$ داریم:

$$\delta\theta' = \frac{\delta\theta}{\sqrt{2}}$$

در مورد خطوطی که از قطب شمال $+q$ خارج می‌شوند و در استوای بار $-2q$ فرود می‌آیند نیز می‌توان همان روش قبلی را به کار برد.

$$\phi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(1-\cos\delta\theta) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\delta\theta^2}{2}\right)$$

$$\phi_2 = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\theta''\right)-0\right) \approx \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\delta\theta''$$

بطور مشابه از برابری $\phi_1 = \phi_2$ داریم:

$$\delta\theta'' = \frac{\delta\theta^2}{4}$$

پ) مطابق شکل (1) میدان در نقطه‌ی P به فاصله‌ی z از بار $-2q$ برابر است با:

$$\mathbf{E} = \left[k\frac{-2q}{z^2} + k\frac{q}{(z-l)^2} + k\frac{q}{(z+l)^2}\right]\hat{\mathrm{k}} = kq\left[\frac{-2}{z^2} + \frac{1}{(z-l)^2} + \frac{1}{(z+l)^2}\right]\hat{\mathrm{k}}$$

ت) در فواصل دور از بارها $(z >> l)$ میدان به صورت زیر ساده می‌شود.

$$E_z = kq\left[\frac{-2}{z^2} + \frac{1}{z^2}\left(1+\frac{2l}{z}+3\frac{l^2}{z^2}+\cdots\right) + \frac{1}{z^2}\left(1-\frac{2l}{z}+3\frac{l^2}{z^2}+\cdots\right)\right] \approx 6kq\frac{l^2}{z^4}$$

مطابق شکل (1) اگر نقطه‌ی P در فواصل دور باشد، میدان در امتداد محور z از رابطه‌ی اخیر به دست می‌آید.

اگر یک سطح گاؤسی به صورت استوانه‌ای به شعاع ρ و ارتفاع $\mathrm{d}z$ بگیریم، چون باری داخل این سطح گاؤسی وجود ندارد شار گذرنده از آن صفر است. بنابراین داریم:

$$E_z(z)\pi\rho^2 - E_z(z-\mathrm{d}z)\pi\rho^2 + E_\rho 2\pi\rho\,\mathrm{d}z = 0$$

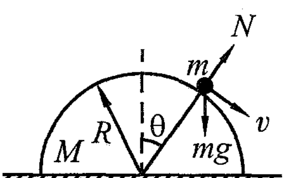
که در آن E_ρ میدان شعاعی روی سطح جانبی استوانه است. با بسط‌دادن $E_z(z-\mathrm{d}z)$ داریم:

$$E_z(z)\pi\rho^2 - \left(E_z(z) - \frac{\partial E_z}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\pi\rho^2 + E_\rho 2\pi\rho\,\mathrm{d}z = 0$$

$$\therefore E_\rho = -\frac{\rho}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\rho}{2}\left(\frac{-24kql^2}{z^5}\right) = \frac{3q}{\pi\epsilon_0}\frac{l^2}{z^5}\rho$$

پاسخ آزمون سوم

۱)



الف) اگر نیم‌کره حرکت نکند، سرعت ذره‌ی m با استفاده از بقاء انرژی به دست می‌آید.

$$mgR\left(1-\cos\theta\right)=\frac{1}{2}mv^2$$

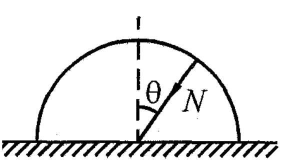
$$v^2=2gR\left(1-\cos\theta\right)$$

معادله‌ی نیوتن برای مؤلفه‌ی شعاعی حرکت ذره‌ی m می‌شود:

$$N-mg\cos\theta=-mR\dot{\theta}^2=-m\frac{v^2}{R}$$

$$N=mg\cos\theta-2mg(1-\cos\theta)$$

$$\therefore N=mg(3\cos\theta-2)$$



به نیم‌کره نیز همین نیرو اما در جهت عکس وارد شده و معادله‌ی نیوتن برای آن در راستای افقی برابر می‌شود با:

$$f=N\sin\theta=mg\sin\theta(3\cos\theta-2)$$

ب) شرط نلغزیدن $\mu_S(Mg+N\cos\theta)\geq N\sin\theta$ است، بنابراین:

$$\mu_S\geq\frac{N\sin\theta}{Mg+N\cos\theta}=\frac{mg\sin\theta(3\cos\theta-2)}{Mg+mg\cos\theta(3\cos\theta-2)}=$$

$$\frac{\alpha\sin\theta(3\cos\theta-2)}{1+\alpha\cos\theta(3\cos\theta-2)}=$$

$$\alpha\sin\theta\left(3\cos\theta-2\right)\left[1-\alpha\cos\theta\left(3\cos\theta-2\right)+\cdots\right]\approx$$

$$\alpha\sin\theta\left(3\cos\theta-2\right)$$

که در عبارت آخر تنها جمله‌ی شامل مرتبه‌ی اول α حفظ شده است. حال باید ببینیم که بیشینه‌ی عبارت $\alpha \sin\theta(3\cos\theta - 2)$ در چه زاویه‌ای رخ می‌دهد که μ_S باید از آن بزرگتر باشد. با مشتق‌گیری از این عبارت و برابر صفر قراردادن آن داریم:

$$\alpha\cos\theta(3\cos\theta-2)-3\alpha\sin^2\theta=0$$

$$6\cos^2\theta-2\cos\theta-3=0$$

$$\cos\theta=\frac{1\pm\sqrt{19}}{6}$$

علامت منفی عبارت اخیر به کار نمی‌آید و تنها مقدار مثبت را درنظر می‌گیریم. با علامت مثبت مقدار $\theta \approx 26.7°$ به دست می‌آید و بنابراین $(\mu_\mathrm{S})_{\min} \approx 0.3\alpha$ است.

۲)

الف) کمیتهای که در مسئله وارد می‌شوند عبارتند از: توان تابشی، P، مشتق nام دوقطبی، $\frac{\mathrm{d}^\mathrm{n} p}{\mathrm{d}t^\mathrm{n}}$، سرعت نور v، و ثابت قانون کولن k. بنابراین:

$$Q=P^{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}^\mathrm{n} p}{\mathrm{d}t^\mathrm{n}}\right)^{\beta} v^{\gamma}k^{\theta}$$

$$[Q]=\left(ML^2T^{-3}\right)^{\alpha}\left(CLT^{-\mathrm{n}}\right)^{\beta}\left(LT^{-1}\right)^{\gamma}\left(ML^3T^{-2}C^{-2}\right)^{\theta}$$

که در آن C بعد بار الکتریکی است.

$$[Q]=M^{\alpha+\theta}L^{2\alpha+\beta+\gamma+3\theta}T^{-3\alpha-\mathrm{n}\beta-\gamma-2\theta}C^{\beta-2\theta}$$

روابط بین توانهای کمیتها طوری است که Q بدون بعد شود.

$$\begin{cases}\alpha+\theta=0\\ 2\alpha+\beta+\gamma+3\theta=0\\ -3\alpha-n\beta-\gamma-2\theta=0\\ \beta-2\theta=0\end{cases}\Rightarrow \alpha=-\theta=-\frac{\beta}{2}=\frac{\gamma}{3}\Rightarrow n=2$$

بنابراین توان تابشی به صورت $P=\frac{\ddot{p}^2 k}{A v^3}$ است.

ب) با نوشتن قانون دوم نیوتن داریم:

$$k\,\frac{qQ}{r^2}=\frac{mv^2}{r}=mr\omega^2$$

$$v^2=k\,\frac{qQ}{mr}$$

بنابراین انرژی کل می‌شود:

$$E=-k\,\frac{qQ}{r}+\frac{1}{2}mv^2=-k\,\frac{qQ}{r}+k\,\frac{qQ}{2r}=-k\,\frac{qQ}{2r}$$

چون بار $-q$ دور هسته می‌چرخد، بردار دوقطبی $\mathbf{p}$ می‌چرخد و مقدار $\ddot{\mathbf{p}}\approx-\omega^2\mathbf{p}$ خواهد بود.

$$\ddot{p}=\omega^2qr=rqk\frac{qQ}{mr^3}=k\frac{q^2Q}{mr^2}$$

از یک طرف توان تابشی را می‌توان از رابطه‌ی زیر به دست آورد.

$$P=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=k\frac{qQ}{2r^2}\dot{r}$$

و از طرف دیگر داریم:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=-\frac{\ddot{p}^2k}{Av^3}=-\frac{k}{Av^3}\left(\frac{kq^2Q}{mr^2}\right)^2=-\frac{k^3q^4Q^2}{Av^3m^2r^4}$$

بنابراین داریم:

$$k\,\frac{qQ}{2r^2}\dot{r}=-\frac{k^3q^4Q^2}{Av^3m^2r^4}$$

$$r^2\,\mathrm{d}r=-\frac{2k^2q^3Q}{Av^3m^2}\mathrm{d}t$$

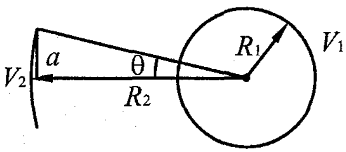
$$r^3-r_\circ^3=-\frac{6k^2q^3Q}{Av^3m^2}t$$

$$\therefore r=\left(r_\circ^3-\frac{6k^2q^3Q}{Av^3m^2}t\right)^{\frac{1}{3}}$$

پ) زمان سقوط در حالتی است که $r=0$ شود. بنابراین:

$$T\approx r_\circ^3\frac{Av^3m^2}{6k^2q^3Q}\approx10^{-10}\,\mathrm{s}$$

۳)



با توجه به صورت مسئله، پتانسیل کره و عرقچین به ترتیب عبارتند از:

$$V_1 = P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2$$
$$V_2 = P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2$$

که در آن $P_{12} = P_{21}$ است. اگر $Q_1 = q$ و $Q_2 = 0$ باشد، سطح عرقچین یک سطح هم‌پتانسیل است و داریم:

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} \quad , \quad V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

و بنابراین $P_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1}$ و $P_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2}$ می‌شود.

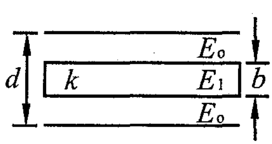
حال به مسئله‌ی اصلی برمی‌گردیم که $Q_1 = 0$ و $Q_2 = \int \sigma \, dA$ است. بنابراین داریم:

$$V_1 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

۴)

الف) ظرفیت خازن قبل از قراردادن دی‌الکتریک برابر است با:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 8.8\times10^{-12} \times \frac{0.12}{0.012} = 8.8\times10^{-11}\,\mathrm{F}$$



ب) بردار جابه‌جایی D در همه‌جا یکنواخت و عمودی است.

$$D = \frac{q}{A}$$

بنابراین میدان E در داخل و بیرون دی‌الکتریک برابر است با:

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A} \quad , \quad E_1 = \frac{q}{k\epsilon_0 A}$$

از این رو اختلاف پتانسیل بین صفحات خازن می شود:

$$V = E_0(d-b) + E_1 b = \frac{q}{\epsilon_0 A}(d-b) + \frac{q}{k\epsilon_0 A}b$$

$$V = \frac{q}{\epsilon_0 A}\left[d - b + \frac{b}{k}\right]$$

ظرفیت خازن نیز می‌شود:

$$C' = \frac{q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d - b + \frac{b}{k}} = \frac{8.8\times10^{-12}\times0.12}{0.008+\frac{0.004}{4.8}} = 11.9\times10^{-11}\ \mathrm{F}$$

پ) بار آزاد q قبل از قراردادن بره:

$$q = CV = 8.8\times10^{-11}\times120 = 1.06\times10^{-8}\ \mathrm{C}$$

بعد از قراردادن بره نیز q همین مقدار است زیرا با چیزی در تماس نیست.

ت) میدان در میان صفحات و خارج از دی‌الکتریک E_0 است.

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A} = \frac{1.06\times10^{-8}}{8.8\times10^{-12}\times0.12} \approx 10^4\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

ث) میدان در دی‌الکتریک E_1 است.

$$E_1 = \frac{E_0}{k} = \frac{10^4}{4.8} \approx 2\times10^3\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

ج) با وجود بره، اختلاف پتانسیل برابر است با:

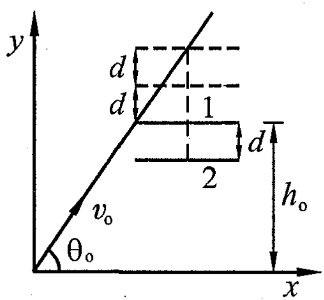
$$V = \frac{q}{C'} = \frac{1.06\times10^{-8}}{11.9\times10^{-11}} \approx 89\ \mathrm{V}$$

چ) اختلاف انرژی خازن برابر است با:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{1}{2}q(V_2 - V_1) = -16.4\times10^{-8}\ \mathrm{J}$$

تغییر انرژی منفی است زیرا دی‌الکتریک به داخل جذب می‌شود و برای اینکه شتاب نگیرد کار منفی روی آن انجام می‌دهیم.

پاسخ آزمون چهارم



۱) در دستگاه دو صفحه، سرعت ذره به صورت زیر است.

$$v_x = v_o \cos\theta_o$$

$$v_y = v_o \sin\theta_o + v_1$$

مسیر حرکت ذره در این دستگاه قبل از برخورد $y = kx$ بوده که در آن $k = \frac{v_y}{v_x}$ است.

اولا: این ذره باید هنگام رسیدن به طول l_1 چنان yای داشته باشد که در شرط زیر صدق کند.

$$h_o - d < kl_1 < h_o \qquad (1)$$

ثانیا: وقتی ذره به ارتفاع h_o می‌رسد طول آن باید در شرط زیر صدق کند.

$$l_1 < \frac{h_o}{k} < l_1 + l_2 \qquad (2)$$

ثالثا: ذره باید بعد از برخورد به سطح 2 دیگر با صفحات برخورد نکند. اگر روش تصویر را به کار ببریم، معادل این است که اگر ذره به ارتفاع $h_o + 2d$ برسد، طول x آن در شرط زیر صدق کند.

$$\frac{h_o + 2d}{k} > l_1 + l_2 \qquad (3)$$

بنابراین سه شرط (1)، (2)، و (3) با هم این امر را میسر می‌سازد.

۲) طبق تعریف ضریب جهندگی، سرعت نسبی دو جسم m_1 و m_2 پس از اولین برخوردشان برابر است با:

$$\left|v_{rel}^{f}\right| = \eta_1 \left(v_o + u_o\right)$$

از طرفی می‌دانیم انرژی جنبشی دو جسم برابر است با:

$$K=\frac{1}{2}M\,{v_{\rm cm}}^2+\frac{1}{2}\mu {v_{\rm rel}}^2$$

که در آن $M=m_1+m_2$ و $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ است. چون در برخورد دو جسم با یکدیگر سرعت مرکز جرم تغییر نمی‌کند و فقط سرعت نسبی η_1 برابر سرعت نسبی قبل از برخورد می‌شود، بنابراین انرژی جنبشی به اندازه‌ی $\frac{1}{2}\mu\left(v_{\rm o}+u_{\rm o}\right)^2\left(1-{\eta_1}^2\right)$ کم می شود.

اما وقتی دو جسم به دو دیوار برخورد می‌کنند، سرعت هر کدام معکوس شده و به نسبت η_2 کاهش می‌یابد. پس سرعت مرکز جرم به اندازه‌ی η_2 کاهش می‌یابد. یعنی انرژی جنبشی مرکز جرم به اندازه‌ی $\frac{1}{2}M\,{v_{\rm cm}}^2\left(1-{\eta_2}^2\right)$ کم می‌شود.

درست پس از n برخورد دو جسم با یکدیگر، $n-1$ بار به دیوارها برخورد کرده‌اند و هر بار که آنها به هم برخورد می‌کنند، $\mathbf{V}_{\rm cm}$ تغییر نمی‌کند، اما وقتی به دیوارها می‌خورند $\mathbf{V}_{\rm cm}$ تبدیل به $-\eta_2\mathbf{V}_{\rm cm}$ می‌شود. بنابراین پس از n بار برخورد دو جسم با یکدیگر داریم:

$$\mathbf{V}_{\rm cm}(n)=(-\eta_2)^{n-1}\mathbf{V}_{\rm cm}(0)\quad;\quad n\geq 1$$

اما هر بار که دو جسم به هم برخورد می‌کنند $\mathbf{v}_{\rm rel}$ تبدیل به $-\eta_1\mathbf{v}_{\rm rel}$ می‌شود و هر بار که به دیوارها می‌خورند $\mathbf{v}_{\rm rel}$ تبدیل به $-\eta_2\mathbf{v}_{\rm rel}$ می‌گردد. بنابراین بعد از n بار برخورد داریم:

$$\mathbf{v}_{\rm rel}(n)=(-\eta_1)^{n}(-\eta_2)^{n-1}\mathbf{v}_{\rm rel}(0)\quad;\quad n\geq 1$$

از طرفی با توجه به روابط

$$\mathbf{V}_{\rm cm}=\frac{m_1\mathbf{V}_1+m_2\mathbf{V}_2}{m_1+m_2}$$

$$\mathbf{v}_{\rm rel}=\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2$$

داریم:

$$\mathbf{V}_1=\mathbf{V}_{\rm cm}+\frac{\mu}{m_1}\mathbf{v}_{\rm rel}$$

$$\mathbf{V}_2=\mathbf{V}_{\rm cm}-\frac{\mu}{m_2}\mathbf{v}_{\rm rel}$$

بنابراین پس از n بار برخورد دو جسم با یکدیگر داریم:

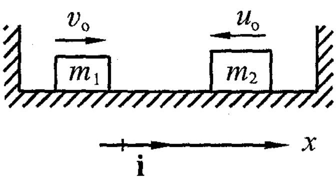
$$\mathbf{V}_1(n)=\mathbf{V}_{\rm cm}(0)(-\eta_2)^{n-1}+\frac{\mu}{m_1}(-\eta_1)^{n}(-\eta_2)^{n-1}\mathbf{v}_{\rm rel}(0)$$

$$\mathbf{V}_2(n) = \mathbf{V}_{cm}(0)(-\eta_2)^{n-1} - \frac{\mu}{m_2}(-\eta_1)^n(-\eta_2)^{n-1}\,\mathbf{v}_{rel}(0)$$

که در آن:

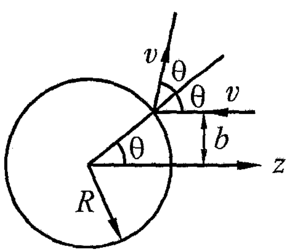
$$\begin{cases} \mathbf{v}_{rel}(0) = (u_o + V_o)\,\hat{\mathrm{i}} \\ \mathbf{V}_{cm}(0) = \dfrac{m_1 v_o - m_2 u_o}{M}\,\hat{\mathrm{i}} \end{cases}$$

که در آن جهت مثبت محور x مطابق شکل است.



۳)

الف) به علت تقارن تنها مؤلفه‌ی نیرو بر اثر برخورد ذرات به کره در امتداد z است. بنابراین مؤلفه‌ی نیرو در این راستا را به دست می‌آوریم.



$$\mathrm{d}F_z = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\delta v\cos\theta = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(2v\cos\theta)\cos\theta$$
$$= (\rho v \cdot 2\pi b\,\mathrm{d}b)(2v\cos^2\theta)$$

که در آن $b = R\sin\theta$ است. بنابراین داریم:

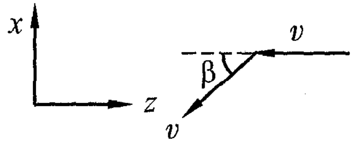
$$\mathrm{d}F_z = (2\pi\rho v R\sin\theta\ R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta)\,2v\cos^2\theta$$

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی اخیر در فاصله‌ی بین $\theta = 0$ تا $\theta = \frac{\pi}{2}$ داریم:

$$F_z = 4\pi\rho v^2 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi\rho v^2 R^2$$

که در آن πR^2 سطح مقطع دایره‌ی عظیمه‌ی کره است.

ب) بال‌های هواپیما دارای سطح مقطع Ld است. بنابراین نیروی اول در راستای حرکت هواپیما و درجهت عکس حرکت آن و برابر $\rho v^2 Ld$ خواهد بود.



نیروی دوم نیز که از تغییر جهت حرکت هوا ایجاد می‌شود در دو راستای z و x به صورت زیر محاسبه

می‌شود.

$$F_z = \frac{\delta m}{\delta t}\Delta v_z = (\rho v A)v(1-\cos\beta)$$
$$F_x = \frac{\delta m}{\delta t}\Delta v_x = -(\rho v A)v\sin\beta$$

که در آن $A = Ld'$ است.

بنابراین نیروی پس‌آر و نیروی بالابر وارد بر هواپیما می‌شود:

نیروی پس‌آر $= \left[-\rho v^2 Ld - \rho v^2 Ld'(1-\cos\beta)\right]\ \hat{k}$

نیروی بالابر $= \rho v^2 Ld'\sin\beta\ \hat{i}$

در حالت حرکت افقی هواپیما، نیروی بالابر با نیروی وزن برابر است. یعنی:

$$\rho v^2 Ld'\sin\beta = mg$$
$$\therefore v = \sqrt{\frac{mg}{\rho Ld'\sin\beta}}$$

پ) توان هواپیما صرف غلبه بر نیروی پس‌آر می‌شود و در نتیجه داریم:

توان هواپیما $= \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = \rho v^3 L\left[d + d'(1-\cos\beta)\right] =$

$$\rho L\left(\frac{mg}{\rho Ld'\sin\beta}\right)^{\frac{3}{2}}\left[d+d'(1-\cos\beta)\right]$$

ت) با استفاده از معادله‌ی آخر قسمت (ب) داریم:

$$\sin\beta = \frac{mg}{\rho v^2 Ld'} = \frac{2\times10^5}{1\times200^2\times10\times5} = 0.1 \Rightarrow \beta \approx 5.7^\circ$$

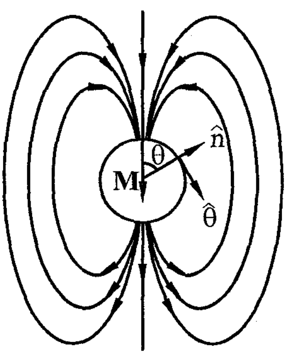
از قسمت (پ) نیز داریم:

$$P = \rho L\left(\frac{mg}{\rho Ld'\sin\beta}\right)^{\frac{3}{2}}\left[d+d'(1-\cos\beta)\right] =$$
$$1\times10\left(\frac{2\times10^5}{1\times10\times5\times0.1}\right)^{\frac{3}{2}}\left[0.5+(5\times0.005)\right] = 4.2\times10^7\,\mathrm{W}$$

پاسخ آزمون پنجم

۱)

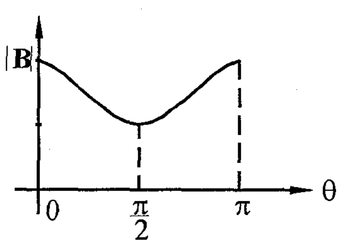
الف) خطوط میدان مغناطیسی مطابق شکل است.



ب) میدان مغناطیسی به صورت $\mathbf{B}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{3\hat{n}(\hat{n}\cdot\mathbf{M})-\mathbf{M}}{r^3}$ است. بردار $\mathbf{M}$ را می‌توان به صورت $\mathbf{M}=-M\cos\theta\ \hat{n}+M\sin\theta\ \hat{\theta}$ نوشت. بنابراین $\mathbf{B}$ به صورت $\mathbf{B}=-\frac{\mu_\circ M}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\ \hat{r}+\sin\theta\ \hat{\theta}\right)$ درمی‌آید.

اندازه‌ی $\mathbf{B}$ خواهدشد:

$$|\mathbf{B}|=\frac{\mu_\circ M}{4\pi r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$



مشتق $|\mathbf{B}|$ نسبت به θ در نقاط $\theta=0,\frac{\pi}{2},\pi$ صفر است.

$\theta=\frac{\pi}{2}$ می‌نیمم و $\theta=0,\pi$ ماکزیمم $|\mathbf{B}|$ را می‌دهند.

نمودار $|\mathbf{B}|$ بر حسب θ به صورت شکل مقابل است.

پ) مقدار میدان مغناطیسی در استوا، $\theta=\frac{\pi}{2}$ و روی سطح زمین، $r=6400\,\text{km}$ برابر $\frac{1}{3}$ گاؤس است. بنابراین داریم:

$$\frac{\mu_\circ M}{4\pi r^3}=\frac{1}{3}\times10^{-4}\,\text{T}\ \Rightarrow\ \frac{10^{-7}M}{6.4^3\times10^{18}}=\frac{10^{-4}}{3}$$

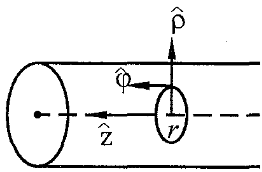
$$\therefore M=8.7\times10^{22}\,\text{A}\,m^2$$

ت) یک عنصر کوچک خط میدان، $\mathrm{d}\mathbf{r}$، موازی با $\mathbf{B}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{\mathrm{d}r}{r\,\mathrm{d}\theta}=\frac{B_r}{B_\theta}=2\cot\mathrm{an}\,\theta \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}r}{r}=2\cot\mathrm{an}\,\theta\,\mathrm{d}\theta \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{r}{r_o}\right)=\ln\sin^2\theta$$

$$\therefore r=r_o\sin^2\theta$$

۲) به علت جریان در استوانه، میدان مغناطیسی به وجود می‌آید. داریم:



$$\oint \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=\mu_o i$$

$$B\cdot 2\pi r=\mu_o\frac{I}{\pi R^2}\pi r^2$$

$$\therefore \mathbf{B}=\frac{\mu_o I}{2\pi R^2}r\varphi$$

سرعت حامل‌های بار $v=\dfrac{j}{nq}$ است. به این حامل‌های بار، یک نیروی مغناطیسی و یک نیروی الکتریکی وارد می‌شود. در حالت پایا مجموع این دو نیرو صفر است. یعنی:

$$q\mathbf{v}\times\mathbf{B}+q\mathbf{E}=0$$

$$\mathbf{E}=+\frac{\mu_o I}{2\pi R^2}\frac{j}{nq}r\hat{\rho} \qquad (1)$$

حال دو استوانه به طول L و شعاع‌های r و $r+\mathrm{d}r$ درنظر می‌گیریم و قانون گاؤس را می‌نویسیم.

$$\oint \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\frac{\int\rho(r)\mathrm{d}V}{\epsilon_o}$$

$$E\left(r+\mathrm{d}r\right)\cdot 2\pi\left(r+\mathrm{d}r\right)L-E\left(r\right)\cdot 2\pi rL=\frac{\rho\left(r\right)\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}rL}{\epsilon_o} \qquad (2)$$

با بسط‌دادن $E(r+\mathrm{d}r)$ و حفظ‌کردن تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\mathrm{d}r$ داریم:

$$E(r+\mathrm{d}r)=E(r)+\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r \qquad (3)$$

با جایگزین‌کردن روابط (1) و (3) در رابطه‌ی (2) و ساده‌کردن آن به دست می‌آوریم:

$$\rho = \frac{\mu_0 \epsilon_0 I j}{\pi R^2 n q} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 I^2}{\pi^2 R^4 n q}$$

کل بار بر واحد طول باید صفر باشد، چون بار کل خنثی است. بنابراین روی سطح خارجی استوانه مجموع همه‌ی بارهای داخل استوانه با علامت مخالف جمع می‌شود. بار در واحد طول داخل استوانه عبارت است از:

$$\lambda = \int_0^R \rho 2\pi r \, \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 \epsilon_0 I^2}{\pi^2 R^4 n q} 2\pi \frac{R^2}{2} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 I^2}{\pi R^2 n q}$$

و بار روی سطح خارجی استوانه برابر است با:

$$\lambda' = -\lambda = -\frac{\mu_0 \epsilon_0 I^2}{\pi R^2 n q}$$

۳) شار مغناطیسی که از حلقه عبور می‌کند را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Phi = B_0 \pi r^2 \sin \omega t$$

از قانون القای فارادی داریم:

$$\epsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -B_0 \pi r^2 \omega \cos \omega t$$

بنابراین توان تلف شده می‌شود:

$$P = \frac{\epsilon^2}{R} = \frac{B_0^{\,2} \pi^2 r^4 \omega^2 \cos^2 \omega t}{R}$$

میانگین توان اتلافی در یک دوره عبارت است از:

$$< P > = \frac{B_0^{\,2} \pi^2 \omega^2 r^4}{R} < \cos^2 \omega t > = \frac{1}{2} \frac{B_0^{\,2} \pi^2 \omega^2 r^4}{R}$$

این توان اتلافی باعث کاهش انرژی جنبشی حلقه می‌شود.

$$-I\omega \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \frac{B_0^{\,2} \pi^2 \omega^2 r^4}{R}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} = -\frac{B_0^{\,2} \pi^2 r^4}{2IR} \mathrm{d}t$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی اخیر به دست می‌آوریم:

$$\therefore \omega = \omega_0 \exp\left(-\frac{B_0^{\,2}\pi^2 r^4}{2IR}\right)$$

۴)

الف) اختلاف ولتاژ دو سر سیم‌پیچ، E از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$E = ri + \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = ri + NAB\omega$$

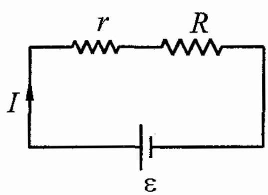
ب) از طرف میدان مغناطیسی، گشتاور زیر وارد می‌شود.

$$\tau = NiAB$$

گشتاور مقاوم، τ'، باید منفی این مقدار باشد تا سرعت زاویه‌ای ثابت بماند.

$$\tau' = -\tau = -NiAB$$

پ) مدار معادل به صورت زیر است.



اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت r مطابق قسمت (الف) برابر است با:

$$E = rI + NAB\omega$$

حال که مقاومت R با آن سری می‌شود، داریم:

$$\epsilon = E + RI = (r+R)I + NAB\omega$$

که در آن $B = kI$ است. بنابراین داریم:

$$\epsilon = I(r + R + NA\omega k)$$

$$I = \frac{\epsilon}{r + R + NA\omega k}$$

گشتاور ناشی از میدان مغناطیسی مطابق قسمت (ب) می‌شود:

$$\tau = NIAB = NAkI^2 = NAk\left(\frac{\epsilon}{r + R + NA\omega k}\right)^2$$

که در آن از $B = kI$ استفاده شده است. مقدار ω برحسب τ به دست می‌آید:

$$\omega = \frac{\epsilon\left(\dfrac{NAk}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} - r - R}{NAk}$$

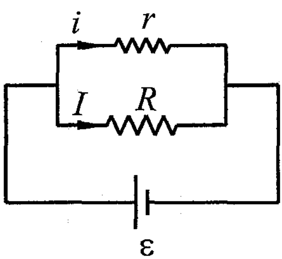
ت) مدار معادل به صورت شکل زیر است.

در این حالت روابط زیر را داریم:

$$ri + NAB\omega = \epsilon \qquad (1)$$

$$RI = \epsilon \qquad (2)$$

$$B = kI$$



از رابطه‌ی اول و سوم به دست می‌آوریم:

$$i = \frac{\epsilon - NAkI\omega}{r}$$

و از رابطه‌ی دوم نیز داریم:

$$I = \frac{\epsilon}{R}$$

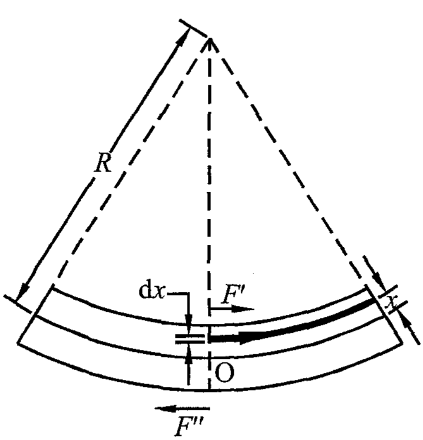
با قراردادن روابط اخیر در رابطه‌ی مربوط به گشتاور داریم:

$$\tau = NiAB = N\frac{\epsilon - NAkI\omega}{r}AkI \Rightarrow \tau = N\frac{\epsilon\left(1 - \frac{NAk\omega}{R}\right)}{r}Ak\frac{\epsilon}{R}$$

$$\therefore \tau = \frac{N\epsilon^2 Ak}{R^2 r}\left(R - NAk\omega\right)$$

$$\therefore \omega = \frac{R - \frac{R^2 r\tau}{N\epsilon^2 Ak}}{NAk}$$

۵)



الف) برای صفحه‌های بالاتر از نقطه‌ی O فشردگی داریم. صفحه‌ی به فاصله‌ی x از وسط چوب را درنظر می‌گیریم. طول اولیه‌ی این صفحه l بوده و طول فشرده‌شده‌ی آن $\frac{l}{R}(R - x)$ است. بنابراین تغییر طول آن $\delta l = \frac{lx}{R}$ و $\frac{\delta l}{l} = \frac{x}{R}$ خواهد بود.

طبق تعریف مدول یانگ، نیروی وارد بر عنصر صفحه‌ی نیمه‌ی بالایی چوب برابر است با:

$$\mathrm{d}F' = Y\frac{\delta l}{l}\ \mathrm{d}A = Y\frac{x}{R}W\,\mathrm{d}x$$

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی اخیر در فاصله‌ی $x = 0$ تا $x = \frac{h}{2}$ نیروی وارد بر نیمه‌ی بالایی چوب به دست می‌آید:

$$F' = \frac{YW}{R}\int_0^{\frac{h}{2}} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\frac{YW}{R}h^2$$

به نیمه‌ی پایینی چوب نیز همین نیرو اما درجهت عکس (نیروی کشیدگی) وارد می‌شود. یعنی داریم:

$$F'' = \frac{1}{8}\frac{YW}{R}h^2$$

یعنی مجموع نیروهای وارد بر چوب صفر است.

ب) نیروی فشردگی $\mathrm{d}F'$ حول نقطه‌ی O گشتاور زیر را وارد می‌کند:

$$\mathrm{d}\tau' = x\,\mathrm{d}F' = Y\frac{W}{R}x^2\,\mathrm{d}x$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه در فاصله‌ی $x = 0$ تا $x = \frac{h}{2}$ به دست می‌آوریم:

$$\tau' = Y\ \frac{W}{R}\int_0^{\frac{h}{2}} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{24}Y\ \frac{W}{R}h^3$$

گشتاور نیروی کشیدگی که به نیمه‌ی پایینی چوب وارد می‌شود نیز همین مقدار و جهت یکسان با τ' دارد. یعنی:

$$\tau'' = \tau' = \frac{1}{24}Y\frac{W}{R}h^3$$

بنابراین مجموع گشتاورهای وارد بر چوب $\tau_{\text{tot.}} = Y\frac{W}{R}\frac{h^3}{12}$ به دست می‌آید.

لبه‌های تکیه‌گاه چوب هر یک نیروی $\frac{F}{2}$ به سمت بالا به چوب وارد می‌کنند. برای نیمه‌ی راست چوب، شرط تعادل می‌شود:

$$\frac{F}{2}\frac{l}{2}-Y\frac{W}{R}\frac{h^3}{12}=0$$

$$\therefore R=\frac{YW}{Fl}\frac{h^3}{3}$$

پ) اگر $\frac{\delta l}{l}=\frac{x}{R}$ از یک حد بحرانی بیشتر شود، چوب می‌شکنند. قسمتهایی از چوب که به اندازه‌ی $\frac{h}{2}$ از نقطه‌ی O فاصله دارند، بیشترین $\frac{\delta l}{l}$ را دارند. بنابراین R_{C} از مرتبه‌ی h است که اگر شعاع کمان تشکیل‌شده به آن برسد، چوب خواهد شکست.

ت) نیروی لازم، F_{b} برای شکستن چوب از رابطه‌ی آخر قسمت (ب) به دست می‌آید.

$$F_{\mathrm{b}}=\frac{YW}{3l}\frac{h^3}{R_{\mathrm{C}}}$$

اگر عرض چوب، W دو برابر شود، نیروی لازم باید دو برابر گردد.

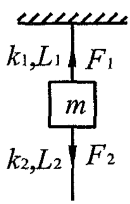
اگر طول چوب، l دو برابر شود، نیروی لازم نصف می‌شود.

اگر ارتفاع چوب، h، دو برابر شود، از آنجایی که $R_{\mathrm{C}}\approx h$ است، نیروی لازم برای شکستن چهار برابر می‌شود.

پاسخ آزمون نهائی

۱)

الف) معادله‌ی حرکت وزنه‌ی m به صورت زیر است:



$$F_2 - F_1 = m\ddot{x}$$
$$k_2\left[y(t) - x\right] - k_1 x = m\ddot{x}$$
$$\therefore m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = k_2 y(t)$$

ب) با $k_1 = k_2 = k$ و $L_1 = L_2 = L$ و همچنین حرکت انتهای ریسمان دوم با شتاب a که به صورت $y(t) = \frac{1}{2}at^2$ است، معادله‌ی دیفرانسیل قسمت (الف) به صورت زیر درمی‌آید:

$$m\ddot{x} + 2kx = \frac{k}{2}at^2$$

با درنظرگرفتن $\omega^2 = \frac{2k}{m}$، معادله‌ی اخیر به صورت زیر می‌شود:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{4}a\omega^2 t^2 \qquad (1)$$

جواب این معادله برابر است با:

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t + C_1 t^2 + C_2 t + C_3 \qquad (2)$$

با احتساب شرایط اولیه در لحظه‌ی $t = 0$ که $x = 0$ و $\dot{x} = 0$ است، به دست می‌آوریم:

$$A + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = -A$$
$$B\omega + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -B\omega$$

با جایگزین‌کردن معادله‌ی (2) و مشتقات اول و دوم آن در معادله‌ی (1) به دست می‌آوریم:

$$-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t + 2C_1 +$$
$$\omega^2\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t + C_1t^2 + C_2t + C_3\right) = \frac{1}{4}a\omega^2t^2$$

با مساوی قراردادن ضرایب t^2، t و اعداد ثابت در طرفین معادله‌ی اخیر داریم:

$$2C_1 + \omega^2C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{2C_1}{\omega^2} = -\frac{a}{2\omega^2}$$

$$\omega^2C_1 = \frac{1}{4}a\omega^2 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4}a$$

$$\therefore A = \frac{a}{2\omega^2}$$

$$\omega^2C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\therefore B = 0$$

بنابراین جواب x به صورت زیر درمی‌آید:

$$x = \frac{a}{2\omega^2}\cos\omega t + \frac{1}{4}at^2 - \frac{a}{2\omega^2}$$

که در آن $\omega^2 = \frac{2k}{m}$ است.

پ) کشیدگی ریسمان اول برابر است با:

$$l_1 = \frac{mg}{k} + \frac{a}{2\omega^2}\cos\omega t + \frac{1}{4}at^2 - \frac{a}{2\omega^2}$$

کشیدگی ریسمان دوم نیز برابر است با:

$$l_2 = y(t) - x = \frac{1}{2}at^2 - x = \frac{1}{4}at^2 - \frac{a}{2\omega^2}\cos\omega t + \frac{a}{2\omega^2}$$

ت) با بسط‌دادن $\cos\omega t$ داریم:

$$l_1 = \frac{mg}{k} + \frac{a}{2\omega^2}\left(1 - \frac{\omega^2t^2}{2} + \frac{\omega^4t^4}{24} + \cdots\right) + \frac{1}{4}at^2 - \frac{a}{2\omega^2}$$

$$\therefore l_1 \approx \frac{mg}{k} + \frac{a}{2\omega^2} - \frac{1}{4}at^2 + \frac{1}{48}a\omega^2t^4 + \frac{1}{4}at^2 - \frac{a}{2\omega^2} \approx \frac{mg}{k} + \frac{1}{48}a\omega^2t^4$$

$$l_2 \approx \frac{1}{4}at^2 - \frac{a}{2\omega^2}\left(1 - \frac{\omega^2t^2}{2}\right) + \frac{a}{2\omega^2} \approx \frac{1}{2}at^2$$

ث) زمانی که طول ریسمان اول به l می‌رسد، برابر است با:

$$l_1 = l \Rightarrow t_1 = \left[\left(l - \frac{mg}{k}\right)\frac{48}{a\omega^2}\right]^{\frac{1}{4}}$$

و زمانی که طول ریسمان دوم به l می‌رسد، برابر است با:

$$l_2 = l \Rightarrow t_2 = \left(\frac{2l}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

وقتی ریسمان اول پاره می‌شود که $t_1 < t_2$ باشد. یعنی:

$$\left[\left(l - \frac{mg}{k}\right)\frac{48}{a\omega^2}\right]^{\frac{1}{4}} < \left(\frac{2l}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 0 < a < \frac{l^2\omega^2}{12\left(l - \frac{mg}{k}\right)} = a_1$$

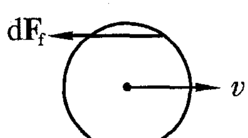
و وقتی ریسمان دوم پاره می‌شود که $t_1 > t_2$ باشد. یعنی:

$$a > \frac{l^2\omega^2}{12\left(l - \frac{mg}{k}\right)} = a_1$$

بنابراین اگر شتاب از a_1 کمتر باشد، ریسمان اول پاره می‌شود و اگر بیشتر از a_1 باشد، ریسمان دوم پاره خواهد شد.

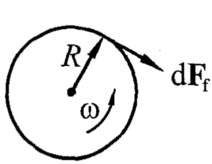
۲)

الف) اگر حلقه در راستای x حرکت کند، تمام نقاط آن با سرعت v در راستای $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{i}}$ حرکت می‌کنند. بنابراین داریم:



$$\mathbf{F}_f = \int d\mathbf{F}_f = \int -\mu g\, dm\hat{\mathbf{u}} = -\mu mg\hat{\mathbf{i}}$$

بنابراین شتاب حلقه $\mathbf{a} = -\mu g\hat{\mathbf{i}}$، سرعت آن به صورت $v = -\mu gt + v_0$ و زمان ایستادن $t = \frac{v_0}{\mu g}$ است.



ب) در این حالت بردار $\hat{\mathbf{u}}$ در راستای $\hat{\theta}$ است و نیروی کل وارد بر حلقه برابر $\mathbf{F}_f = -\mu mg\hat{\theta}$ است. گشتاور وارد بر حلقه می‌شود:

$$\tau = -\mu mgR$$

$$I\dot{\omega} = -\mu mgR$$

$$mR^2\dot{\omega} = -\mu mgR$$

$$\therefore \dot{\omega} = -\frac{\mu g}{R}$$

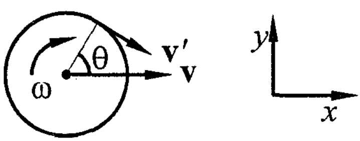
بنابراین سرعت زاویه‌ای در هر لحظه از زمان به صورت زیر است:

$$\omega = \dot{\omega}t + \omega_0$$

$$\therefore \omega = -\frac{\mu g}{R}t + \omega_0$$

زمان ایستادن حلقه نیز برابر $t = \frac{R\omega_0}{\mu g}$ است.

پ) سرعت هر تکه از حلقه، مجموع دو سرعت خطی، $\mathbf{v}$ و دورانی، $\mathbf{v}'$ است.



$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{V} = (R\omega\sin\theta + v)\hat{\mathrm{i}} + (-R\omega\cos\theta)\hat{\mathrm{j}}$$

بنابراین نیروی اصطکاک وارد بر هر تکه به صورت زیر می‌شود:

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_f = -\mu g\,\mathrm{d}m\hat{\mathbf{u}} = -\mu g\,\mathrm{d}m\frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} = \frac{-\mu g\,\mathrm{d}m\left[(R\omega\sin\theta + v)\hat{\mathrm{i}} + (-R\omega\cos\theta)\hat{\mathrm{j}}\right]}{\sqrt{R^2\omega^2 + v^2 + 2R\omega v\sin\theta}}$$

مؤلفه‌ی y ی این جزء نیرو از رابطه‌ی اخیر به دست می‌آید.

$$\mathrm{d}F_f^{(y)} = -\mu g\,\mathrm{d}m\frac{-R\omega\cos\theta}{\sqrt{R^2\omega^2 + v^2 + 2R\omega v\sin\theta}}$$

مؤلفه‌ی y ی نیروی کل می‌شود:

$$F_f^{(y)} = \int \mathrm{d}F_f^{(y)} = \mu g \int_0^{2\pi} \frac{R\omega\cos\theta\left(\frac{m}{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)}{\sqrt{R^2\omega^2 + v^2 + 2R\omega v\sin\theta}}$$

که در آن از $\mathrm{d}m = \frac{m}{2\pi}\mathrm{d}\theta$ استفاده شده است.

$$F_f^{(y)} = \frac{m\mu g}{4\pi v}\sqrt{R^2\omega^2 + v^2 + 2R\omega v\sin\theta}\,\Bigg|_0^{2\pi} = 0$$

بنابراین هیچ نیروی خالصی درجهت y به حلقه وارد نمی‌شود و جهت حرکت تغییر نمی‌کند.

ت) نیروی کند کننده‌ی حرکت خطی و گشتاور کند کننده‌ی حرکت دورانی حلقه عبارتند از:

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{f}}^{(x)} = -\mu g\, \mathrm{d}m \frac{R\omega\sin\theta + v}{\sqrt{R^2\omega^2 + v^2 + 2R\omega v\sin\theta}}$$

$$F_{\mathrm{f}}^{(x)} = -\mu g \frac{m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R\omega\sin\theta + v)}{\sqrt{R^2\omega^2 + v^2 + 2R\omega v\sin\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}\times\mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{f}} = -\mu g R\,\mathrm{d}m(\hat{\mathrm{r}}\times\hat{\mathrm{u}}) = -\mu g R\,\mathrm{d}m \frac{(-R\omega - v\sin\theta)}{\sqrt{R^2\omega^2 + v^2 + 2R\omega v\sin\theta}}\hat{\mathrm{k}}$$

که در آن از $\hat{\mathrm{r}} = \cos\theta\ \hat{\mathrm{i}} + \sin\theta\ \hat{\mathrm{j}}$ استفاده شده است. اندازه‌ی گشتاور کل وارد بر حلقه برابر است با:

$$\tau = \mu g R \frac{m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R\omega + v\sin\theta)}{\sqrt{R^2\omega^2 + v^2 + 2R\omega v\sin\theta}}\mathrm{d}\theta$$

اگر تعریف کنیم:

$$B = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2\omega^2 + v^2 + 2R\omega v\sin\theta}} \quad \text{و} \quad A = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{R^2\omega^2 + v^2 + 2R\omega v\sin\theta}}\mathrm{d}\theta$$

می‌توان مقادیر $F_{\mathrm{f}}^{(x)}$ و τ را به صورت زیر نوشت:

$$F_{\mathrm{f}}^{(x)} = -\mu g \frac{m}{2\pi}(R\omega A + vB)$$

$$\tau = \mu g R \frac{m}{2\pi}(R\omega B + vA)$$

برای سادگی تعریف می‌کنیم:

$$\frac{\mu g}{2\pi} = \beta$$

بنابراین شتاب خطی و شتاب زاویه‌ای کند کننده‌ی حرکت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$a = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{F_{\mathrm{f}}^{(x)}}{m} = -\beta(R\omega A + vB)$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{-\tau}{I} = \frac{-\tau}{mR^2} = -\beta\left(\omega B + \frac{vA}{R}\right)$$

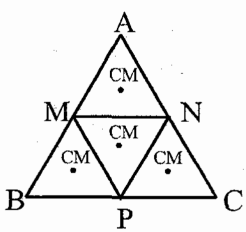
اگر در یک لحظه $v_0 = R\omega_0$ باشد، از معادله‌ی اخیر پیداست که در آن لحظه $a_0 = R\alpha_0$ است. سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای نیز با استفاده از این روابط به صورت زیر می‌شود:

$$V = V_{\circ} - \beta \int_0^t \left(R\omega A + vB\right)\mathrm{d}t$$

$$R\omega = R\omega_{\circ} - \beta \int_0^t \left(R\omega B + vA\right)\mathrm{d}t$$

اگر $v_{\circ} = R\omega_{\circ}$ باشد، چون $a_{\circ} = R\alpha_{\circ}$ است، در لحظه‌ی بعد نیز $V = R\omega$ می‌شود و به همین ترتیب در لحظات بعد نیز $V = R\omega$ خواهد شد.

۳)

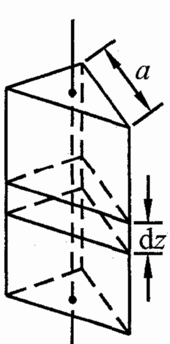


الف) اگر وسط اضلاع مثلث ABC را به هم وصل کنیم، چهار مثلث یکسان به وجود می‌آید. مرکز جرم مثلث MNP بر روی مرکز جرم مثلث ABC منطبق است.

حال فرض می‌کنیم لختی دورانی حول مرکز جرم مثلث اصلی $\alpha m a^2$ باشد. باید α را پیدا کنیم. از طرف دیگر لختی دورانی کل، مجموع لختی دورانی چهار مثلث به وجود آمده حول همان محور است. بنابراین داریم:

$$4\times\alpha\left(\frac{m}{4}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3\times\left(\frac{m}{4}\right)\left(\frac{a}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}\right)^2 = \alpha m a^2$$

که در آن جمله‌ی اول سمت چپ لختی دورانی چهار مثلث کوچک حول مرکز جرم خودشان است و در جمله‌ی دوم نیز از قضیه‌ی محورهای موازی استفاده شده تا لختی دورانی سه مثلث کوچک بیرونی حول مرکز جرم مثلث MNP محاسبه شود.

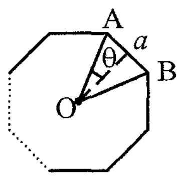


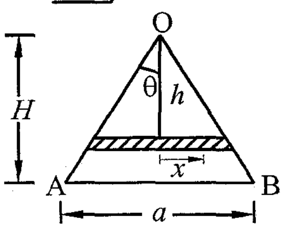
جمله‌ی سمت راست رابطه نیز لختی دورانی مثلث ABC است. از تساوی به دست آمده، مقدار α برابر $\frac{1}{12}$ می‌شود. بنابراین لختی دورانی یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، چگالی یکنواخت و جرم m برابر $\frac{1}{12}ma^2$ است.

ب) عنصر جزئی به جرم $\mathrm{d}m = A\rho\,\mathrm{d}z$ را که در آن A سطح مقطع، $\mathrm{d}z$ ارتفاع و ρ چگالی منشور است درنظر می‌گیریم. در قسمت (الف)

دیدیم $\mathrm{d}I = \frac{1}{12}\mathrm{d}ma^2$ است. بنابراین لختی دورانی منشور به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$I = \int \mathrm{d}I = \int_0^l \frac{1}{12} A\rho a^2\,\mathrm{d}z = \frac{1}{12}A\rho a^2 l = \frac{1}{12}ma^2$$





یک n ضلعی منتظم را می‌توان شامل n مثلث متساوی‌الساقین درنظر گرفت. بنابراین می‌توان لختی دورانی یک مثلث متساوی‌الساقین را حول راس آن به دست آورد و آن را n برابر کرد تا لختی دورانی n ضلعی منتظم حول مرکز جرمش به دست آید. یک مثلث متساوی‌الساقین به طول قاعده‌ی a درنظر می‌گیریم. لختی دورانی حول نقطه‌ی O راس مثلث به صورت زیر به دست می‌آید:

$$I = \int r^2\,\mathrm{d}m = \int_{h=0}^{h=H}\int_{x=-h\tan\theta}^{x=h\tan\theta}\left(h^2+x^2\right)\sigma\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}x = \frac{\sigma a^4}{32\tan^3\theta}\left(1+\frac{\tan^2\theta}{3}\right)$$

روشن است که در n ضلعی منتظم $\theta = \frac{\pi}{n}$ می‌شود. بنابراین برای n ضلعی منتظم داریم:

$$I_n = \frac{n\sigma a^4}{32\tan^3\left(\frac{\pi}{n}\right)}\left(1+\frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{3}\right)$$

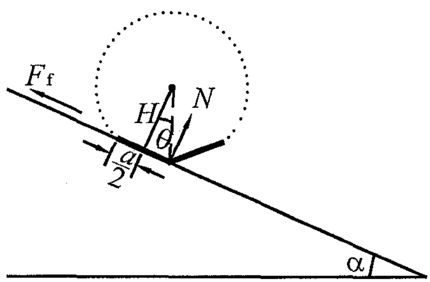
همچنین جرم n ضلعی از $m = n\sigma\frac{a^2}{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$ به دست می‌آید. بنابراین I_n برحسب m می‌شود:

$$I_n = \frac{ma^2}{8\tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}\left(1+\frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{3}\right) = \frac{ma^2}{24}\left(3\cot\text{an}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+1\right)$$

لختی دورانی یک منشور با قاعده‌ی n ضلعی نیز در صورتی که جرم منشور را m بگیریم همین مقدار خواهد بود.

$$I_{\text{منشور}} = \frac{ma^2}{24}\left(3\cot an^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+1\right)$$

ت) شرط نلغزیدن این است که $\mu_S > \frac{F_f}{N}$ باشد، که در آن $F_f = mg\sin\alpha$ و $N = mg\cos\alpha$ است. بنابراین $\mu_S > \tan\alpha$ به دست می‌آید.



شرط نغلتیدن این است که گشتاور نیروی اصطکاک حول مرکز جرم کمتر از گشتاور نیروی عمود بر سطح باشد. نقطه اثر نیروی عمودی بر سطح، N حداکثر می‌تواند به فاصله‌ی $\frac{a}{2}$ از خط عمود بر سطح و گذرنده از مرکز جرم منشور باشد.

بنابراین داریم:

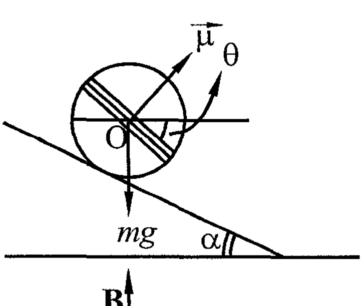
$$F_f H \le N\frac{a}{2} \;\Rightarrow\; mg\sin\alpha\frac{a}{2\tan\theta} \le mg\cos\alpha\frac{a}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \tan\alpha \le \tan\theta$$

$$\alpha \le \theta = \frac{\pi}{n}$$

بنابراین شرط نغلتیدن $\alpha \le \frac{\pi}{n}$ است.

۴)

الف) برای تعادل باید گشتاور گرانش با گشتاور مغناطیسی برابر باشد.



$$\frac{D}{2}mg\sin\alpha = \mu B\sin\theta$$

$$\frac{D}{2}mg\sin\alpha = niDLB\sin\theta$$

$$B = \frac{mg\sin\alpha}{2niL\sin\theta}$$

ماکزیمم $\sin\theta$ برابر یک است. بنابراین $B_{\min}$ برابر است با:

$$\therefore B_{\min}=\frac{mg\sin\alpha}{2niL}$$

ب) فرض کنید نقطه‌ی تعادل در $\theta=\theta_{\circ}$ باشد. معادله‌ی حرکت استوانه به صورت زیر است:

$$I_{\circ}\ddot{\theta}=mg\frac{D}{2}\sin\alpha-niDLB\sin(\theta_{\circ}+\theta)\qquad(1)$$

که در آن θ زاویه‌ی خیلی کوچک است. بنابراین می‌توانیم $\sin(\theta_{\circ}+\theta)$ را بسط دهیم و از $\sin\theta\approx\theta$ و $\cos\theta=1$ استفاده کنیم.

$$I_{\circ}\ddot{\theta}=mg\frac{D}{2}\sin\alpha-niDLB(\sin\theta_{\circ}+\theta\cos\theta_{\circ})$$

چون $\theta_{\circ}$ نقطه‌ی تعادل است، بنابراین $mg\frac{D}{2}\sin\alpha=niDLB\sin\theta_{\circ}$ است و در نتیجه به دست می‌آوریم:

$$I_{\circ}\ddot{\theta}+(niDLB\cos\theta_{\circ})\theta=0$$

از این معادله پیداست که فرکانس نوسانات کوچک $\omega=\sqrt{\frac{niDLB\cos\theta_{\circ}}{I_{\circ}}}$ می‌شود.

پ) معادله‌ی حرکت استوانه به صورت زیر است:

$$I_{\circ}\ddot{\theta}=mg\frac{D}{2}\sin\alpha-niDLB\sin\theta$$

اگر طرفین رابطه‌ی اخیر را در $\dot{\theta}$ ضرب کنیم و سپس از طرفین انتگرال بگیریم به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2}I_{\circ}\dot{\theta}^{2}=mg\frac{D}{2}\theta\sin\alpha+niDLB\cos\theta+\text{ثابت}$$

$$E=\frac{1}{2}I_{\circ}\dot{\theta}^{2}-\left(mg\frac{D}{2}\sin\alpha\right)\theta-niDLB\cos\theta=\text{ثابت}$$

بنابراین انرژی پتانسیل سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$U=\left(-mg\frac{D}{2}\sin\alpha\right)\theta-niDLB\cos\theta$$

نقاط تعادل سیستم را با مشتق‌گیری از U به دست می‌آوریم.

$$\frac{dU}{d\theta}=-mg\frac{D}{2}\sin\alpha+niDLB\sin\theta=0$$

$$\sin\theta = \frac{mg\frac{D}{2}\sin\alpha}{niDLB} < 1$$

مشتق دوم انرژی پتانسیل نیز عبارت است از:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = niDLB\cos\theta$$

بنابراین $\theta_o = \sin^{-1}\left(\frac{mg\sin\alpha}{2niLB}\right)$ نقطه‌ی تعادل پایدار و $\theta'_o = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{mg\sin\alpha}{2niLB}\right) = \pi - \theta_o$ نقطه‌ی تعادل ناپایدار است. از این رو مقدار ω_o باید طوری باشد که حداکثر، وقتی استوانه به حالت θ'_o یعنی تعادل ناپایدار می‌رسد انرژی جنبشی‌اش صفر شود. بنابراین حداکثر ω_o عبارت است از:

$$\frac{1}{2}I_o\omega_P{}^2 - \left(mg\frac{D}{2}\sin\alpha\right)\theta_o - niDLB\cos\theta_o =$$

$$-mg\frac{D}{2}\sin\alpha(\pi-\theta_o) - niDLB\cos(\pi-\theta_o)$$

$$\omega_P{}^2 = \frac{2}{I_o}\left[mg\frac{D}{2}\sin\alpha(2\theta_o-\pi) + 2niDLB\cos\theta_o\right]$$

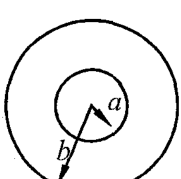
بنابراین ω_o باید کمتر از ω_P به دست آمده باشد.

۵)

الف) اختلاف پتانسیل دو کره V است. بنابراین داریم:

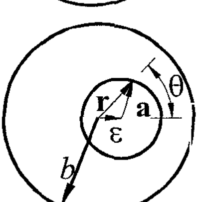
$$V = \phi_b - \phi_a = \left(\frac{A}{b}+B\right) - \left(\frac{A}{a}+B\right) = A\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

$$\therefore A = \frac{V}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$$



شکل (1)

ب) مطابق شکل (2) داریم:



شکل (2)

$$\mathbf{r} = \epsilon + \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{r} - \epsilon$$

$$a^2 = r^2 + \epsilon^2 - 2r\epsilon\cos\theta$$
$$r = \epsilon\cos\theta \pm \sqrt{\epsilon^2\cos^2\theta - \left(\epsilon^2 - a^2\right)}$$
$$\therefore r = \epsilon\left(\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta + \frac{a^2}{\epsilon^2} - 1}\right)$$

پ) کره‌ی داخلی، سطحی هم‌پتانسیل است و کره‌ی خارجی نیز سطحی هم‌پتانسیل می‌باشد. برای کره‌ی خارجی داریم:

$$\phi_b = \frac{A}{b} + B + \epsilon\left(\frac{C}{b^2} + Db\right)\cos\theta + \epsilon^2\left(\frac{E}{b^3} + Fb^2\right)\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} = \text{ثابت} = V$$

چون ϕ_b باید مستقل از θ باشد، پس ضرایب $\cos^n\theta$ صفرند.

$$\frac{C}{b^2} + Db = 0 \Rightarrow C = -Db^3 \qquad (1)$$
$$\frac{E}{b^3} + Fb^2 = 0 \Rightarrow E = -Fb^5 \qquad (2)$$

برای کره‌ی داخلی، ابتدا فاصله‌ی r را که در قسمت (ب) به دست آوردیم تا مرتبه‌ی دوم نسبت به ϵ ساده می‌کنیم. چون $a >> \epsilon$ است، تنها علامت مثبت را در رابطه‌ی r درنظر می‌گیریم.

$$r \approx \varepsilon\left[\cos\theta + \frac{a}{\varepsilon}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2a^2}\sin^2\theta\right)\right] =$$
$$a + \varepsilon\cos\theta - \frac{\varepsilon^2}{2a}\sin^2\theta = a\left(1 + \frac{\epsilon}{a}\cos\theta - \frac{\varepsilon^2}{2a^2}\sin^2\theta\right)$$

حال این r را در پتانسیل ϕ قرار می‌دهیم. این مقدار ثابت صفر است، چون پتانسیل کره‌ی خارجی را V گرفته‌ایم.

بنابراین با توجه به روابط (1) و (2) داریم:

$$\phi_a = \frac{A}{a\left(1 + \frac{\epsilon}{a}\cos\theta - \frac{\epsilon^2}{2a^2}\sin^2\theta\right)} + B +$$
$$\epsilon D\left[\frac{-b^3}{a^2\left(1 + \frac{\epsilon}{a}\cos\theta - \frac{\epsilon^2}{2a^2}\sin^2\theta\right)^2} + a + \epsilon\cos\theta - \frac{\epsilon^2}{2a}\sin^2\theta\right]\cos\theta +$$

$$+\epsilon^2 F\left[\frac{-b^5}{a^3\left(1+\frac{\epsilon}{a}\cos\theta-\frac{\epsilon^2}{2a}\sin^2\theta\right)^3}+\right.$$

$$\left. a^2\left(1+\frac{\epsilon}{a}\cos\theta-\frac{\epsilon^2}{2a^2}\sin^2\theta\right)^2 \right]\frac{3\cos^2\theta-1}{2}=0$$

با حفظ‌کردن جملات تا مرتبه‌ی دو نسبت به ϵ داریم:

$$\phi_a=\frac{A}{a}\left(1-\frac{\epsilon}{a}\cos\theta+\frac{\epsilon^2}{2a^2}\sin^2\theta+\frac{\epsilon^2}{a^2}\cos^2\theta\right)+B+$$

$$\epsilon D\left[-\frac{b^3}{a^2}\left(1-\frac{2\epsilon}{a}\cos\theta\right)+a+\epsilon\cos\theta\right]\cos\theta+$$

$$F\epsilon^2\left[-\frac{b^5}{a^3}+a^2\right]\frac{3\cos^2\theta-1}{2}=0$$

چون ϕ_a نیز مستقل از θ است، ضرایب $\cos^n\theta$ صفرند. بنابراین داریم:

$$\cos\theta\ \text{ضریب}=-\frac{A\epsilon}{a^2}-\epsilon D\left(\frac{b^3}{a^2}-a\right)=0$$

لذا داریم:

$$\frac{A}{D}=a^3-b^3 \qquad (3)$$

$$\cos^2\theta\ \text{ضریب}=\frac{A}{2a^3}\epsilon^2+\epsilon D\left[\frac{2\epsilon b^3}{a^3}+\epsilon\right]+\frac{3}{2}F\epsilon^2\left(-\frac{b^5}{a^3}+a^2\right)=0$$

$$D\left[\frac{a^3-b^3}{2a^3}+\frac{2b^3}{a^3}+1\right]+\frac{3}{2}F\left(\frac{a^5-b^5}{a^3}\right)=0$$

که از رابطه‌ی اخیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{F}{D}=\frac{b^3+a^3}{b^5-a^5} \qquad (4)$$

جملات مستقل از θ در ϕ_a نیز صفرند. پس:

$$\frac{A}{a}\left(1+\frac{\epsilon^2}{2a^2}\right)+B-\frac{1}{2}F\epsilon^2\left(\frac{a^5-b^5}{a^3}\right)=0 \qquad (5)$$

از طرفی بار کل روی کره‌ی خارجی برابر q است. از قانون گاؤس داریم:

$$\oint \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}=\frac{q}{\epsilon_o}$$

$$E_r=-\frac{\partial\phi}{\partial r}\bigg|_{r=b}=\frac{A}{b^2}-\epsilon\cos\theta\left(\frac{-2C}{b^3}+D\right)-\epsilon^2\left(\frac{-3E}{b^4}+2Fb\right)\frac{3\cos^2\theta-1}{2}$$

$$\oint \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}=\int_0^\pi E_r 2\pi b^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=2\pi b^2\left(\frac{2A}{b^2}\right)=\frac{q}{\epsilon_o}$$

$$A=\frac{q}{4\pi\epsilon_o} \qquad (6)$$

بنابراین از رابطه‌ی (3) داریم:

$$D=\frac{q}{4\pi\epsilon_o}\frac{1}{\left(a^3-b^3\right)}$$

از رابطه‌ی (4) به دست می‌آوریم:

$$F=\frac{q}{4\pi\epsilon_o}\frac{b^3+a^3}{\left(a^3-b^3\right)\left(b^5-a^5\right)}$$

و از رابطه‌ی (5) داریم:

$$B=\frac{q}{4\pi\epsilon_o}\left[\frac{\epsilon^2}{2a^3}\frac{b^3+a^3}{b^3-a^3}-\frac{1}{a}\left(1+\frac{\epsilon^2}{2a^2}\right)\right]=\frac{q}{4\pi\epsilon_o}\left(\epsilon^2\frac{1}{b^3-a^3}-\frac{1}{a}\right)$$

بنابراین ظرفیت خازن تا مرتبه‌ی دوم نسبت به ϵ برابر است با:

$$C=\frac{q}{\phi_a-\phi_b}=\frac{q}{-\phi_b}=$$

$$\frac{q}{-\frac{q}{4\pi\epsilon_o}\left(\frac{1}{b}+\epsilon^2\frac{1}{b^3-a^3}-\frac{1}{a}\right)}\approx\frac{4\pi\epsilon_o}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}\left(1-\frac{\epsilon^2}{b^3-a^3}\frac{ab}{a-b}\right)$$

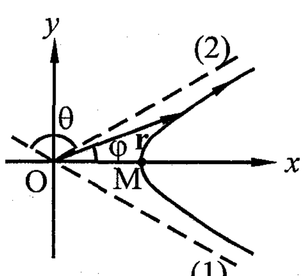
آزمون‌های
دوره‌ی تابستان
سال ۱۳۷۸

آزمون اول

۱)

الف) اگر جسمی به جرم m تحت تأثیر نیروی $\mathbf{F}=\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ قرار دارد که در آن k مقداری ثابت و r فاصله‌ی جسم از مرکز نیرو است. نشان دهید که بردار $\mathbf{A}=\mathbf{V}\times\mathbf{L}+k\,\hat{\mathbf{r}}$ برداری ثابت در زمان است.

$\mathbf{V}$ سرعت جسم و $\mathbf{L}=m\mathbf{r}\times\mathbf{V}$ بردار اندازه حرکت زاویه‌ای است که ثابت است. بردار $\mathbf{A}$ به بردار رانگ لنز معروف است.



ب) مطابق شکل زیر مرکز نیرو در نقطه‌ی O واقع است و جسمی به جرم m تحت تأثیر همان نیروی قسمت (الف) روی مسیری مطابق شکل حرکت می‌کند. (این مسیر هذلولی است.) با توجه به ثابت بودن برداو $\mathbf{A}$، مقدار این بردار را در نقطه‌ی M (نقطه‌ی کمترین فاصله از نقطه‌ی O) به دست آورید و جهت $\mathbf{A}$ را تعیین کنید.

پ) می‌دانیم سرعت ذره در نقاط خیلی دور در امتدادهای (1) و (2) است و اندازه‌ی آن با هم یکسان و برابر V است. $\Delta\mathbf{V} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$ را برحسب V و θ (مطابق شکل) در دستگاه مختصات xy به دست آورید. $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$ سرعت جسم در نقاط دور به ترتیب در امتدادهای (1) و (2) است.

ت) بردار $\Delta\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_2 - \hat{\mathbf{r}}_1$ را برحسب θ در دستگاه مختصات xy به دست آورید. $\hat{\mathbf{r}}_1$ و $\hat{\mathbf{r}}_2$ به ترتیب بردارهای واحد شعاعی در نقاط دور هستند.

ث) با استفاده از بقاء بردار $\mathbf{A}$ و روابط قسمت (پ) و (ت)، و اینکه بردار $\mathbf{L} = L\,\hat{\mathbf{z}}$ برداری ثابت درجهت $\hat{\mathbf{z}}$ است، زاویه‌ی پراکندگی θ را برحسب k، V و L به دست آورید.

ج) حاصل‌ضرب $\mathbf{A.r}$ را به دست آورید، و از روی آن مسیر جسم را بر حسب ثابتهای ذکر شده در بالا در مختصات قطبی (φ و r) تعیین کنید.

راهنمایی: به بردار $\mathbf{A}$ در قسمت (الف) و مقدار به دست آمده برای آن در قسمت (ب) توجه کنید.

۲) در این مسئله می‌خواهیم خطای حاصل از پیوسته در نظر گرفتن بار الکتریکی را به دست آوریم. برای سادگی یک توزیع بار خطی و نیم دایره‌ای را در نظر می‌گیریم. ابتدا توزیع بار روی آن را پیوسته و سپس گسسته در نظر می‌گیریم. در هر مرتبه میدان الکتریکی را به دست آورده و خطای نسبی آن را اندازه می‌گیریم.

الف) یک نیم‌دایره را که توزیع بار خطی λ روی آن به صورت یکنواخت قرار گرفته است، در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در مرکز نیم دایره حساب کنید. (شعاع نیم دایره را R در نظر بگیرید.)

ب) حال توزیع بار را گسسته بگیرید و برای سادگی توزیع بار گسسته را الکترونهایی با بار e فرض کنید که در فاصله‌ی a از هم روی نیم‌دایره قرار دارند. میدان الکتریکی در این حالت در مرکز نیم‌دایره چقدر است؟

پ) خطای نسبی را برای مقادیر واقعی به دست آورید. (تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{a}{R}$)

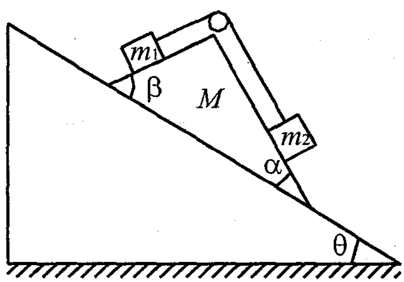
مقادیر a و R را خودتان باید یک حدس مناسب بزنید.

راهنمایی: می‌دانیم:

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin Nx=\frac{2\sin\left(\frac{N+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{N}{2}x\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x}$$

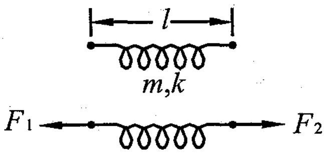
آزمون دوم

۱) در شکل مقابل سطح شیبدار با زاویه‌ی شیب θ ثابت است. گوه‌ای به جرم M و زوایای α و β مطابق شکل روی سطح شیبدار قرار دارد و جرم‌های m_1 و m_2 به وسیله‌ی قرقره‌ای به یکدیگر متصلند. معادلاتی را بنویسید که با استفاده از آنها بتوان شتاب‌های m_1 و m_2 و گوه (M) را به دست آورد. (حل معادلات لازم نیست.) تمام سطوح بدون اصطکاک هستند.



۲) محور یک استوانه‌ی چوبی به شعاع R درجهت $\hat{z}$ است. یک طناب را به طور مارپیچ حول استوانه پیچیده‌ایم طوری‌که محور $\hat{z}$ در هر نقطه با مماس بر طناب زاویه‌ی ثابت α می‌سازد. با در نظر گرفتن این‌که ضریب اصطکاک ایستایی میان استوانه و طناب μ باشد، وقتی یک طرف طناب را می‌کشیم و طناب در آستانه‌ی لغزیدن قرار می‌گیرد کشش در طناب را برحسب z پیدا کنید.

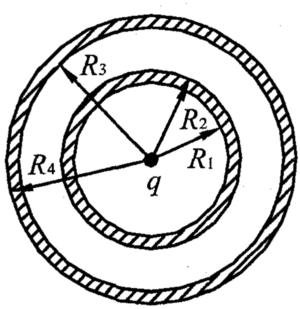
۳) فنری به جرم m ، ثابت k و طول اولیه‌ی l داریم. این فنر از دو طرف با نیروهای F_1 و F_2 کشیده می‌شود ($F_2 > F_1$).



الف) مقدار کشیدگی فنر را به صورت تابعی از فاصله‌ی x به دست آورید. (فاصله‌ی x از سمتی که نیروی F_1 وارد شده در نظر گرفته می‌شود.)

ب) مقدار کشیدگی کل فنر چقدر است؟

۴) در مرکز دو پوسته‌ی کروی هادی هم‌مرکز، بار q قرار دارد. اگر بار Q_1 را روی پوسته‌ی داخلی و بار Q_2 را روی پوسته‌ی خارجی قرار دهیم.



الف) توزیع بار روی سطح‌های دو پوسته‌ی کروی چگونه است؟

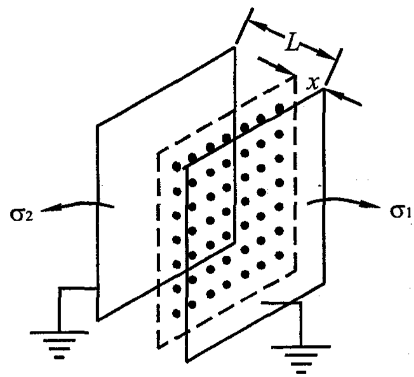
ب) میدان الکتریکی در ناحیه‌های $r < R_1$، $R_1 < r < R_2$، $R_2 < r < R_3$، $R_3 < r < R_4$ و $r > R_4$ را به دست آورید.

پ) اختلاف پتانسیل الکتریکی دو پوسته‌ی کروی چقدر است؟

ت) اگر دو پوسته‌ی کروی توسط سیم هادی به هم متصل شوند، بار نهایی روی هر یک از دو پوسته چقدر است؟

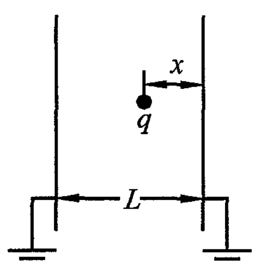
۵) در این مسئله می‌خواهیم اثر یک جسم کوچک خارجی را روی ظرفیت یک خازن بررسی کنیم.

الف) تعداد بی‌نهایت بار q را روی یک صفحه‌ی موازی با صفحات یک خازن مسطح (با سطوح بی‌نهایت) و بین آنها طوری قرار می‌دهیم که اولاً این صفحه مطابق شکل به فاصله‌ی x از یکی از صفحات باشد، ثانیاً تعداد بار q در واحد سطح ثابت و برابر n است. حال با فرض آنکه n به اندازه‌ی کافی بزرگ است، بار سطحی القایی روی صفحات (σ_1 و σ_2) را حساب کنید.

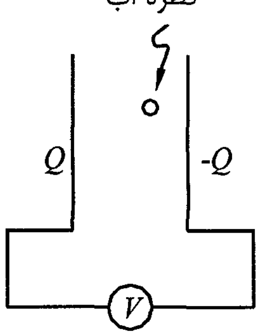


توجه: هر دو صفحه به زمین متصلند و فاصله‌ی بین صفحات خازن مسطح L است.

ب) با توجه به قسمت (الف) و با استفاده از اصل بر هم نهی مقدار باری را که یک تک بار نقطه‌ای q روی هر یک از صفحات القاء می‌کند (q_1 و q_2) به دست آورید.



پ) می‌دانیم که اگر یک کره‌ی فلـزی را در یک محیط با میـدان الکتریکی ثابت E_0 وارد کنیم تأثیر کره‌ی فلزی به صورت یک دوقطبی در مرکز آن وارد می‌شود. مقدار این دوقطبی را برحسب شعاع کره (a) و E_0 به دست آورید. (کافی است شرایط مرزی روی سطح کره درست باشد.)

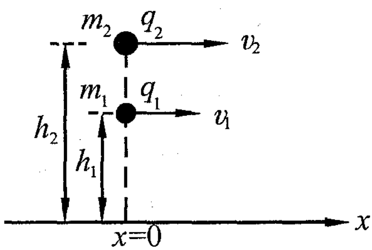


ت) دو صفحه‌ی رسانای دایروی هم محور با شعاع R و فاصله‌ی L ($L\langle\langle R$) از هم یکی با بار Q و دیگری با بار $-Q$ به یک ولت‌سنج متصل است. یک قطره‌ی آب به شعاع a ($a\langle\langle L$) داخل خازن سقوط

می‌کند. ولتاژ چقدر عوض می‌شود؟ (آب را رسانا فرض کنید.)

توجه: تقریب را تا مرتبه‌ی اول غیر صفر انجام دهید. از قسمتهای (ب) و (پ) استفاده کنید.

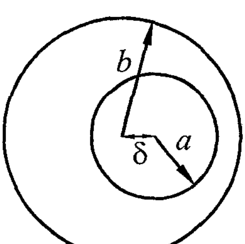
آزمون سوم



۱) دو ذره‌ی باردار با بار q_1 و q_2 و جرم m_1 و m_2 از ارتفاع h_1 و h_2 با سرعتهای اولیه‌ی v_1 و v_2 $(v_2 > v_1)$ مطابق شکل پرتاب می‌شوند. در زمان t_0 ذره‌ی ۱ در فاصله‌ی افقی l از نقطه‌ی پرتاب با زمین برخورد می‌کند. در این لحظه ذره‌ی 2 کجاست؟

۲)

الف) ثابت کنید که همه‌ی سطوح هم‌پتانسیل بین دو خط بار موازی با اندازه‌ی λ و $-\lambda$ استوانه هستند.



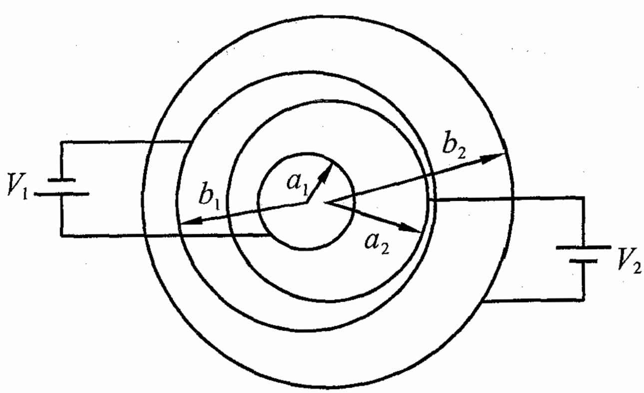
ب) یک خازن استوانه‌ای هم‌محور داریم که استوانه‌ی داخلی آن به اندازه‌ی کوچک δ جابه‌جا می‌شود. ثابت کنید تغییر ظرفیت خازن تا مرتبه‌ی دوم نسبت به δ برابر مقدار زیر است. شعاع استوانه‌ها برابر b و a بوده که $a<b$ و $\delta \ll a$ است. طول خازن L و بار اولیه‌ی آن Q

می‌باشد.

$$\Delta c = \frac{c\delta^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)\left(b^2 - a^2\right)}$$

پ) در مورد خازن قسمت قبل چه نیرویی بین دو استوانه وجود دارد؟ (مقدار و جهت نیرو را بیابید.)

ت) دو خازن استوانه‌ای در نظر بگیرید که اولی با شعاعهای a_1 و b_1 و دیگری با شعاعهای a_2 و b_2 و هر دو به طول L هستند. اگر $a_1 \langle a_2 \langle b_1 \langle b_2$ باشد، می‌توان خازن اول را داخل خازن دوم قرار داد. (توجه کنید که هم‌محور هستند.) اگر خازن اول به اندازه‌ی x از موضع خود حرکت کند، نیروی بین دو خازن را بیابید. صفحات مربوط به هر خازن نسبت به هم جابه‌جا نمی‌شوند. ضمناً خازن اول به اختلاف پتانسیل V_1 و خازن دوم به اختلاف پتانسیل V_2 متصل است.



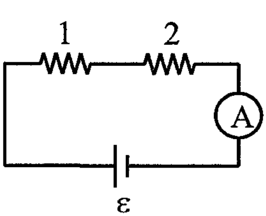
آزمون چهارم

۱)

الف) سیمی را که مقاومت آن به صورت $R = R_0(1+\alpha\theta)$ با دما تغییر می‌کند، به یک منبع ولتاژ با نیروی محرکه‌ی ε وصل می‌کنیم. دمای سیم و جریان عبوری از آن را برحسب زمان پیدا کنید.

ب) سیم قسمت قبل را به یک منبع جریان با جریان i وصل می‌کنیم. دمای سیم را برحسب زمان و ولتاژ دو سر مقاومت را بیابید.

(در هر دو قسمت (الف) و (ب) توجه کنید که جرم سیم m و ظرفیت گرمایی ویژه‌ی آن را C در نظر بگیرید. دمای اولیه را صفر بگیرید.)



پ) با توجه به مدار شکل روبه‌رو و قسمتهای قبل ابتدا یک شرط لازم و کافی پیدا کنید که سیمهای 1 و 2 در مدار روبه‌رو همدما باشند و سپس جریانی را که آمپرسنج برحسب زمان نشان می‌دهد، به دست آورید.

مشخصات سیم 1: $R_1 = R_{01}(1+\alpha_1\theta_1)$، $C_1 =$ ظرفیت گرمایی ویژه، $m_1 =$ جرم

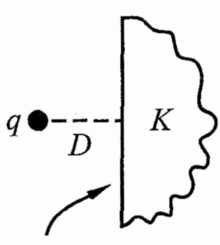
مشخصات سیم 2: $R_2 = R_{o2}\left(1+\alpha_2\theta_2\right)$، C_2 = ظرفیت گرمایی ویژه، m_2 = جرم

۲) می‌خواهیم یک کلاهک ۱۰۰ کیلوگرمی را با یک موشک دو مرحله‌ای به بیرون از میدان ثقل زمین پرتاب کنیم به طوری که سرعت آن به $6000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ برسد. فرض کنید که سوخت موشک بتواند به سرعت خروجی $1500\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ برسد. ضمناً یک موشک خالی (بی‌سوخت و کلاهک) ده درصد وزن سوختی را که حمل می‌کند وزن دارد. مناسب‌ترین جرم برای هر مرحله چقدر باشد که وزن کل موشک در هنگام برخاستن کمترین مقدار باشد؟

(توجه: در یک موشک دو مرحله‌ای، مرحله‌ی اول پس از تمام کردن سوخت خود و پیش از روشن شدن مرحله‌ی دوم جدا می‌شود.)

آیا می‌توان با یک موشک یک مرحله‌ای منظور بالا را عملی ساخت؟

۳) بار نقطه‌ای q در جلوی یک قطعه نیمه بی‌نهایت دی الکتریکی همسانگرد، همگن و خطی با ضریب دی الکتریک K و به فاصله‌ی D از آن قرار دارد.



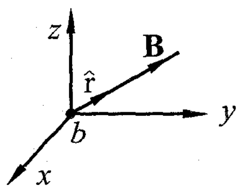
الف) چگالی بار سطحی القاء شده در نقاط مختلف مرز دی‌الکتریک را به‌دست آورید.

ب) مؤلفه‌ی عمودی میدان الکتریکی را در نقاط مجاور مرز دی‌الکتریک (یک مرتبه برای نقاط مجاور و داخل دی‌الکتریک و یک مرتبه نیز برای نقاط مجاور و خارج دی‌الکتریک) به دست آورید.

پ) با استفاده از شرایط مرزی فوق و استفاده از روش تصویر، پتانسیل الکتریکی را در نقاط مختلف دی‌الکتریک به دست آورید.

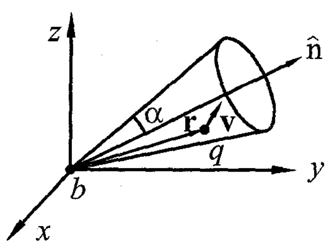
آزمون پنجم

۱) میدان مغناطیسی حاصل از یک تک‌قطبی مغناطیسی چنین است: $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{b}{r^2}\hat{\mathrm{r}}$ که b مقدار بار مغناطیسی است. برای کشف این ذره (که تا به حال دیده نشده است) لازم است اثر آن را روی دیگر ذرات پیدا کنیم.



فرض کنید بار الکتریکی q در میدان مغناطیسی حاصل از این تک‌قطبی مغناطیسی حرکت می‌کند. جرم بار الکتریکی را m و مکان و سرعت اولیه‌ی آن را $\mathbf{r}_0$ و $\mathbf{v}_0$ (می‌توانید از مولفه‌های اینها استفاده کنید.) در نظر بگیرید که دلخواه هستند. در حالتی که b همواره ثابت و در مرکز مختصات است نشان دهید:

الف) چون نیرو مرکزی نیست بردار اندازه حرکت زاویه‌ای $\mathbf{L} = m\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ ثابت نخواهد بود، به جای آن بردار $\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \mathbf{A}$ ثابت است. $\mathbf{A}$ را پیدا کنید. (توجه: نیروی وارد بر q همان نیروی لورنتس است.)



ب) ثابت کنید که ذره‌ی q روی یک مخروط حرکت می‌کند. (ثابت کنید زاویه‌ی $\mathbf{r}$ همواره با یک راستای ثابت، مقداری ثابت است.)

سپس زاویه‌ی نیم‌رأس مخروط (α) و $\hat{\mathrm{n}}$ راستای محور مخروط را برحسب شرایط اولیه بیابید.

پ) ثابت کنید اندازه‌ی بردار $\mathbf{L}$ ثابت است.

ت) ثابت کنید که ذره تا فاصله‌ی محدودی می‌تواند به b نزدیک شود و در این فاصله، ذره باز می‌گردد (r_{C}).

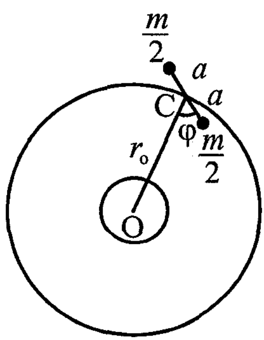
(برای حل این قسمت $\hat{\mathrm{n}}$ را در راستای z بگیرید و حرکت ذره را با r و φ توصیف کنید.)

مقدار r_{C} را به دست آورید. سرعت چرخش ذره (ω) در این مکان چقدر است؟

ث) رابطه‌ی r و φ را بر حسب زمان به دست آورید. (مبدا زمان را زمان $r = r_C$ فرض کنید.)

روابط لازم: $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(x)$ ، $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}$

۲) ماهواره‌ای به شکل دمبل متشکل از دو کره‌ی کوچک که جرم هر



کره $\frac{m}{2}$ است. با میله‌ی سبکی به طول $2a$ به هم متصل‌اند. این ماهواره در مداری دایره‌ای شکل حرکت می‌کند. فاصله‌ی مرکز جرم ماهواره تا مرکز زمین (O) برابر r_o است و زاویه‌ی φ زاویه‌ی بین دمبل با بردار شعاعی **OC** است که O مرکز زمین است. دو کره‌ی انتهایی میله را به عنوان دو ذره در نظر بگیرید و فرض کنید حرکت در یک صفحه صورت می‌گیرد. جرم زمین را M_e بگیرید.

الف) تابع انرژی پتانسیل ماهواره را برحسب r_o، a، φ و ثابتهای دیگر بنویسید.

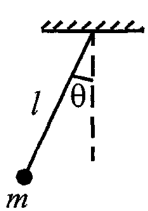
ب) در حالت $a << r_o$ تابع انرژی پتانسیل را تا رتبه‌ی دوم بنویسید.

پ) نقاط تعادل سیستم را به دست آورید و پایداری یا ناپایداری آن را تعیین کنید. (حالت $a << r_o$ را درنظر بگیرید.)

ت) در حالت تعادل پایدار فرکانس زاویه‌ای نوسانات کوچک (ω) آن را تعیین کنید.

ث) اگر فرکانس زاویه‌ای ماهواره به دور زمین ω_o باشد، نسبت $\frac{\omega}{\omega_o}$ را به دست آورید.

۳) آونگی به طول l و جرم m در نظر بگیرید.



الف) معادله‌ی دینامیک سیستم را بنویسید و دوره‌ی تناوب آونگ را پیدا کنید. شتاب گرانش g، و میرایی را در این قسمت صفر بگیرید. دامنه را خیلی کوچک بگیرید(تا مرتبه‌ی صفرم نسبت به θ_o). این دوره‌ی تناوب (ω_o) را حساب کنید.

ب) حال دامنه را دوباره خیلی کوچک فرض کنید. ضریب میرایی (γ) را غیر صفر اما کوچک بگیرید. ثابت کنید که رابطه‌ی θ برحسب زمان به صورت $\theta(t) = \theta_o e^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t + \varphi)$ است.

ω_1 را بر حسب ω_0 و γ حساب کنید.

توجه: ضریب میرایی γ به این صورت تعریف می‌شود که نیروی مقاوم در برابر حرکت در امتداد مخالف حرکت برابر $f_f = 2\gamma mv$ است.

پ) ثابت کنید رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$\gamma = -\frac{1}{2E} < \frac{dE}{dt} >$$

که E انرژی سیستم، $\frac{dE}{dt}$ تغییرات زمانی آن و $< \frac{dE}{dt} >$ متوسط تغییرات زمانی آن است.

ت) حال در این قسمت دوباره ضریب میرایی را صفر در نظر بگیرید و دامنه را به جای خیلی کوچک، کوچک در نظر بگیرید (اولین تقریب غیر صفر بعد از مرتبه‌ی صفر). ω_2 و دوره‌ی تناوب T_2 را در این شرایط به دست آورید (برحسب g، l و θ_0).

راهنمایی: رابطه‌ی $\theta = \theta_0 \sin(\omega_2 t)$ را در معادله‌ای که به دست می‌آورید جایگزین کنید و به رابطه‌ی زیر توجه نمایید.

$$\sin^3 \alpha = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha$$

سپس ضریب $\sin(\omega_2 t)$ را در دو طرف معادله برابر قرار دهید.

ث) حال فرض کنید هم ضریب میرایی غیر صفر است و هم دامنه خیلی کوچک نیست، بلکه هر دو فقط کوچک هستند ولی قابل صرفنظر نیستند. در این حال ضریب میرایی معادل γ_1 (که با γ ضریب میرایی واقعی فرق دارد) را از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم.

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2E} < \frac{dE}{dt} >$$

$$< \frac{dE}{dt} > = \frac{\int_0^T \frac{dE}{dt} dt}{\int_0^T dt}$$

که T دوره‌ی تناوب است.

مقدار γ_1 را برحسب θ_0 به دست آورید.

آزمون نهایی

۱) سه جرم یکسان M بر رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند و در صفحه‌ای این مثلث حرکت می‌کنند. مرکز جرم این مجموعه ساکن است و شرایط اولیه چنان است که این سه جرم همیشه روی راسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌مانند. تنها نیرویی که بر این جرم‌ها اثر می‌کند نیروی گرانش بین خودشان است.

الف) نیروی وارد بر هر یک از این سه جرم را بر حسب فاصله‌ی جرم تا مرکز مثلث به دست آورید.

ب) چه رابطه‌ای بین طول ضلع مثلث و سرعت زاویه‌ای دوران آن باشد تا طول ضلع مثلث ثابت بماند؟

پ) مختصات قطبی یکی از جرم‌ها نسبت به مرکز مثلث را r و θ بنامید. انرژی پتانسیل مجموعه را به دست آورید.

ت) تکانه‌ی زاویه‌ای مجموعه را حساب کنید.

ث) انرژی کل سیستم را برحسب r، $\dot{r}$، L (تکانه‌ی زاویه‌ای) و ثابتهای مسئله به دست آورید.

ج) فرض کنید شرط (ب) برقرار نباشد، به این معنی که r اولیه با مقدار حالت تعادل r_0 (که به ازای آن اندازه‌ی مثلث ثابت می‌ماند) تفاوت داشته باشد. بسامد نوسانهای کوچک r حول r_0 را به دست آورید.

۲) جریان ثابت I از حلقه‌ای به شعاع a می‌گذرد. صفحه‌ی حلقه را صفحه‌ی $z = 0$ و مرکز حلقه را مبدا مختصات بگیرید.

الف) شدت میدان مغناطیسی در نقاط روی محور حلقه را حساب کنید.

ب) در نزدیکی محور حلقه، B_ρ را تا مرتبه‌ی یک نسبت به ρ حساب کنید. (ρ,φ,z) مختصات استوانه‌ای هستند.

پ) حلقه‌ی کوچکی موازی با حلقه‌ی اولیه در نظر بگیرید که مختصات مرکز آن نقطه‌ی $(0,0,z)$ باشد. شعاع حلقه را r $(r << a)$ بگیرید. فرض کنید جریان i از این حلقه می‌گذرد. نیروی وارد بر این حلقه را حساب کنید. جهت این نیرو در حالتی که I و i هم‌جهت یا در جهت مخالف یکدیگرند چگونه است؟

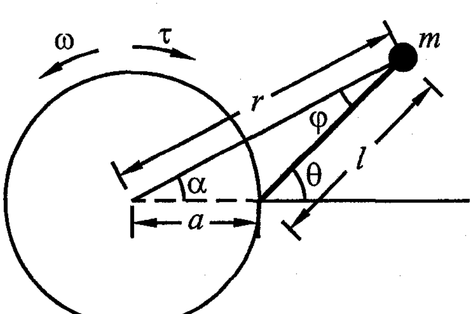
ت) ذره‌ای با بار q تحت تاثیر میدان مغناطیسی حلقه‌ی به شعاع a، روی دایره‌ای به شعاع r حرکت می‌کند. صفحه‌ی دایره موازی با صفحه‌ی $z=0$ و مختصات مرکز دایره $(0,0,z)$ است و $r << a$. سرعت زاویه‌ای بار را به دست آورید.

ث) نیروی وارد بر این ذره را حساب کنید. (راهنمایی: مدار دایره‌ای ذره را مشابه یک حلقه‌ی جریان بگیرید.)

ج) برای z های کوچک، نیروی وارد بر این حلقه را تا مرتبه‌ی یک نسبت به z بسط دهید.

ز) نقطه‌ی تعادل $z=0$، نقطه‌ی تعادل پایدار است یا ناپایدار؟

۳) جرم m به وسیله‌ی یک میله‌ی افقی به یک استوانه متصل است. سر میله به محیط استوانه لولا شده است. استوانه با سرعت زاویه‌ای ω حول محور خود (که عمودی است) می‌چرخد. در حالت تعادل، میله در راستای شعاع استوانه قرار می‌گیرد و مجموعه به طور صلب می‌چرخد.



اکنون فرض کنید گشتاور کندکننده‌ی کوچکی (τ) به استوانه وارد می‌شود. مطابق شکل، میله از راستای شعاعی منحرف می‌شود و با آن زاویه‌ی θ می‌سازد. فرض کنید مجموعه هم‌چنان به طور صلب می‌چرخد، اما سرعت زاویه‌ای آن کم می‌شود. لختی دورانی استوانه I است.

الف) با توجه به شکل، رابطه‌ای بین r، θ و کمیتهای ثابت مسئله به دست آورید.

ب) رابطه‌ای بین α و θ به دست آورید.

پ) روابط دینامیکی (معادلات حرکت) برای جرم m و استوانه را به دست آورید.

ت) با استفاده از این روابط، معادله‌ای بین θ، α و φ به دست آورید (برحسب τ، ω و ثابتهای مسئله).

ث) با فرض اینکه τ کوچک است، θ را تا مرتبه‌ی یک نسبت به τ حساب کنید.

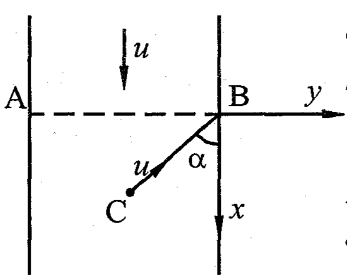
۴) یک دوقطبی مغناطیسی در مرکز یک پوسته‌ی کروی ابررسانا قرار دارد. خاصیت ابررسانا آن است که میدان مغناطیسی درون آن صفر است. به این ترتیب، یک جریان سطحی روی سطح داخلی پوسته‌ی ابررسانا ایجاد می‌شود تا میدان مغناطیسی درون ابررسانا صفر شود. این جریان سطحی یک میدان مغناطیسی یکنواخت (علاوه بر میدان دوقطبی) درون کره ایجاد می‌کند. فرض کنید مقدار دوقطبی مغناطیسی μ و جهت آن $\hat{z}$ باشد. شعاع کره a است. میدان مغناطیسی حاصل از جریان سطحی نیز در راستای z است.

الف) شرایط مرزی میدان مغناطیسی کل در $r = a$ را بر حسب جریان سطحی به دست آورید.

ب) میدان مغناطیسی حاصل از دوقطبی مغناطیسی را به دست آورید.

پ) میدان مغناطیسی یکنواخت حاصل از جریان سطحی را حساب کنید.

ت) نیروی وارد بر نیم‌کره‌ی شمالی ابررسانا (نیم‌کره‌ی $z > 0$) را به دست آورید.



۵) فردی می‌خواهد با قایق از نقطه‌ی A در یک سمت رودخانه، به سمت دیگر آن برود. عرض رودخانه l و سرعت آب رودخانه مقدار ثابت u است.

فرض کنید این فرد همواره به سمت نقطه‌ی B پارو می‌زند و سرعت پارو زدن او نسبت به آب همان مقدار u است. دستگاه مختصات را مطابق شکل به گونه‌ای بگیرید که مرکز دستگاه در نقطه‌ی B و نقطه‌ی A روی محور y باشد. C نقطه‌ای از مسیر قایق است. فاصله‌ی CB را S بگیرید. هنگامی که قایق به نقطه‌ی C می‌رسد:

الف) مولفه‌ی سرعت قایق در راستای CB، در راستای محور x و در راستای محور y را بر حسب α به دست آورید.

ب) سرانجام قایق در چه نقطه‌ای از محور xها به سمت دیگر رودخانه می‌رسد.

پ) معادله‌ی مسیر یعنی $y = y(x)$ را به دست آورید.

ت) $\frac{d\alpha}{dt}$ را بر حسب α به دست آورید.

ث) زمان لازم برای رسیدن قایق از نقطه‌ی A به سمت دیگر رودخانه چقدر است؟

راهنمایی: برای محاسبه‌ی این زمان، ابتدا زمان رسیدن قایق به ساحل را هنگامی که به ساحل خیلی نزدیک است محاسبه کنید.

پاسخ آزمون‌های

دوره‌ی تابستان

سال ۱۳۷۸

پاسخ آزمون اول

۱)

الف) برای اینکه $\mathbf{A}$ برداری ثابت با زمان باشد، باید $\frac{d\mathbf{A}}{dt}=0$ باشد. داریم:

$$\mathbf{A}=\mathbf{V}\times\mathbf{L}+k\,\hat{\mathbf{r}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{L}+\mathbf{V}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}+k\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{a}\times\mathbf{L}+\mathbf{V}\times\left[m\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{V}+m\mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t}\right]+k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

عبارت داخل کروشه به جای $\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}$ قرار گرفته است که صفر است زیرا $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{V}=\mathbf{V}\times\mathbf{V}=0$

و همچنین $\frac{\mathbf{F}}{m}=\mathbf{a}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t}$ در راستای $\mathbf{r}$ است و بنابراین $\mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t}=0$ خواهد بود. پس داریم:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{a}\times\mathbf{L}+k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{a}\times\left(m\mathbf{r}\times\mathbf{V}\right)+k\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{r^2}\dot{r}\,\mathbf{r}\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{F}\times\left(\mathbf{r}\times\mathbf{V}\right)+k\left(\frac{1}{r}\mathbf{V}-\frac{\dot{r}}{r^2}\mathbf{r}\right)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=(\mathbf{F}.\mathbf{V})\mathbf{r}-(\mathbf{F}.\mathbf{r})\mathbf{V}+\frac{k}{r}\mathbf{V}-k\frac{\dot{r}}{r^2}\mathbf{r} \qquad (1)$$

چون $\mathbf{F}=\frac{k}{r^3}\mathbf{r}$ است، بنابراین $\mathbf{F}.\mathbf{r}=\frac{k}{r}$ و همچنین $\mathbf{F}.\mathbf{V}=\frac{k}{r^3}\mathbf{r}.\left(\dot{r}\,\hat{e}_r+r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta\right)=\frac{k}{r^2}\dot{r}$ خواهد بود. بنابراین در عبارت (1) جمله‌ی اول با جمله‌ی چهارم و جمله‌ی دوم با جمله‌ی سوم یکدیگر را حذف می‌کنند و داریم:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=0$$

$\therefore\ \mathbf{A}=$ ثابت

ب) مطابق شکل صورت مسئله، بردار $\mathbf{A}$ در نقطه‌ی M که نزدیکترین نقطه به مرکز نیرو است، عبارت است از:

$$\mathbf{A}=V\,\hat{j}\times\left(mr_M\,\hat{i}\times V\,\hat{j}\right)+k\,\hat{i}$$

$$\mathbf{A}=mr_M V^2\,\hat{i}+k\,\hat{i}$$

$$\mathbf{A}=\left(mr_M V^2+k\right)\hat{i}$$

که در آن r_M فاصله‌ی نقطه‌ی M تا مرکز نیرو و $V=r_M\dot{\theta}$ است زیرا در نقطه‌ی M، $\dot{r}$ برابر صفر است. چون بردار $\mathbf{A}$ برداری ثابت است، پس همواره جهت $\mathbf{A}$ درجهت محور x است و مقدار آن نیز همواره برابر $mr_M V^2+k$ است.

پ) به علت تقارن نسبت به محور x زاویه‌ی امتدادهای بردارهای $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$ با محور x برابر $\frac{\pi-\theta}{2}$ است. بنابراین داریم:

$$\mathbf{V}_1 = V\left(-\cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)\hat{\mathrm{i}} + \sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)\hat{\mathrm{j}}\right)$$

$$\mathbf{V}_1 = V\left(-\sin\frac{\theta}{2}\hat{\mathrm{i}} + \cos\frac{\theta}{2}\hat{\mathrm{j}}\right)$$

به همین ترتیب بردار $\mathbf{V}_2$ می‌شود:

$$\mathbf{V}_2 = V\left(\sin\frac{\theta}{2}\hat{\mathrm{i}} + \cos\frac{\theta}{2}\hat{\mathrm{j}}\right)$$

بنابراین $\Delta\mathbf{V}$ می‌شود:

$$\Delta\mathbf{V} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 = 2V\sin\frac{\theta}{2}\hat{\mathrm{i}}$$

ت) بردارهای $\hat{\mathrm{r}}_1$ و $\hat{\mathrm{r}}_2$ نیز به ترتیب عبارتند از:

$$\hat{\mathrm{r}}_1 = \sin\frac{\theta}{2}\hat{\mathrm{i}} - \cos\frac{\theta}{2}\hat{\mathrm{j}}$$

$$\hat{\mathrm{r}}_2 = \sin\frac{\theta}{2}\hat{\mathrm{i}} + \cos\frac{\theta}{2}\hat{\mathrm{j}}$$

بنابراین $\Delta\mathbf{r}$ می‌شود:

$$\Delta\mathbf{r} = \hat{\mathrm{r}}_2 - \hat{\mathrm{r}}_1 = 2\cos\frac{\theta}{2}\hat{\mathrm{j}}$$

ث) چون $\mathbf{A}$ برداری ثابت است، بنابراین $\Delta\mathbf{A} = 0$ خواهد بود. اگر در نقاط دور، بردار $\mathbf{A}$ را بنویسیم، باید اختلاف آنها صفر شود. در این نقاط بردارهای $\mathbf{A}_1$ و $\mathbf{A}_2$ عبارتند از:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{V}_1 \times \mathbf{L}_1 + k\,\hat{\mathrm{r}}_1$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{V}_2 \times \mathbf{L}_2 + k\,\hat{\mathrm{r}}_2$$

چون $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = L\hat{k}$ است، داریم:

$$\Delta\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1^{\bullet} = (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)\times\mathbf{L} + k(\hat{r}_2 - \hat{r}_1)$$

که مطابق با قسمتهای (پ) و (ت) داریم:

$$\Delta\mathbf{A} = 2V\sin\frac{\theta}{2}\,\hat{\mathrm{i}}\times L\,\hat{\mathrm{k}} + k\left(2\cos\frac{\theta}{2}\,\hat{\mathrm{j}}\right)$$

$$\Delta\mathbf{A} = \left(-2VL\sin\frac{\theta}{2} + 2k\cos\frac{\theta}{2}\right)\hat{\mathrm{j}}$$

چون $\Delta\mathbf{A} = 0$ است، بنابراین داریم:

$$2VL\sin\frac{\theta}{2} = 2k\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{k}{VL} \Rightarrow \theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{k}{VL}\right)$$

ج) حاصلضرب $\mathbf{A.r} = Ar\cos\alpha$ است که در آن α زاویه‌ی بین بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{r}$ است. چون $\mathbf{A}$ مطابق قسمت (ب) در راستای $\hat{\mathrm{i}}$ است پس α همان زاویه‌ی قطبی φ است که از محور x سنجیده می‌شود. پس $\mathbf{A.r} = Ar\cos\varphi$ است. از طرفی مطابق قسمت (الف) داریم:

$$\mathbf{A.r} = \mathbf{r}.(\mathbf{V}\times\mathbf{L} + k\,\hat{\mathbf{r}})$$

$$\mathbf{A.r} = \mathbf{r}.(\mathbf{V}\times\mathbf{L}) + \mathbf{r}.k\,\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{A.r} = \mathbf{L}.(\mathbf{r}\times\mathbf{V}) + k\,r$$

$$\mathbf{A.r} = \mathbf{L}.\frac{\mathbf{L}}{m} + kr = \frac{L^2}{m} + kr$$

که در آن از روابط $\mathbf{r}.(\mathbf{V}\times\mathbf{L}) = \mathbf{L}.(\mathbf{r}\times\mathbf{V})$ و $\mathbf{r}\times\mathbf{V} = \dfrac{\mathbf{L}}{m}$ استفاده شده است. بنابراین داریم:

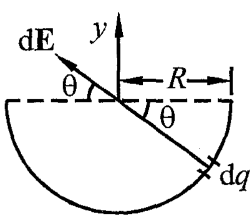
$$Ar\cos\varphi = \frac{L^2}{m} + k\,r$$

$$\therefore r = \frac{\dfrac{L^2}{m}}{-k + A\cos\varphi}$$

که معادله‌ی حرکت جسم در مختصات قطبی است که معادله‌ی یک هذلولی است.

۲)

الف) با توجه به شکل (۱)، میدان الکتریکی در مرکز نیم دایره به صورت زیر به دست می‌آید.



شکل (۱)

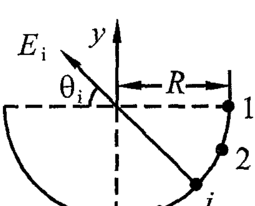
$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{dq}{R^2}$$

$$\therefore dE_y = dE\sin\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{\lambda R d\theta}{R^2} \sin\theta$$

$$\therefore E_y = \int dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o R} \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o R}(-\cos\pi + \cos 0)$$

$$\therefore E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o R}$$

ب) مطابق شکل (۲)، میدان الکترون iام عبارت است از:



شکل (۲)

$$E_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{e}{R^2}$$

با جمع زدن میدان الکتریکی ناشی از (N+1) الکترون در جهت y

داریم:

$$E'_y = \sum_{i=0}^{N} E_i \sin\theta_i$$

که در آن $\theta_i = i\delta\theta = i\dfrac{a}{R}$ است. بنابراین داریم:

$$E'_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\text{o}} \cdot \frac{e}{R^2}\left(\sin\frac{a}{R} + \sin\frac{2a}{R} + \cdots + \sin\frac{\mathrm{N}a}{R}\right)$$

که در آن $\mathrm{N}\delta\theta = \pi$ است، یعنی $\mathrm{N} = \dfrac{\pi R}{a}$. بنابراین داریم:

$$E'_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\text{o}} \cdot \frac{e}{R^2} \cdot \frac{2\sin\left(\dfrac{\mathrm{N}+1}{2}x\right)\sin\left(\dfrac{\mathrm{N}x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\sin x}$$

که در آن $x = \dfrac{a}{R} = \delta\theta$ است. بنابراین به دست می‌آوریم:

$$E'_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\text{o}} \cdot \frac{e}{R^2} \cdot \frac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{a}{2R}\right)\sin\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{a}{2R}}{\sin\dfrac{a}{R}} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_\text{o}R^2}\operatorname{cotan}\left(\frac{a}{2R}\right)$$

پ) خطای نسبی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\eta = \frac{E'_y - E_y}{E'_y} = 1 - \frac{E_y}{E'_y} = 1 - \frac{\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_\text{o}R}}{\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_\text{o}R^2}\operatorname{cotan}\dfrac{a}{2R}}$$

حال اگر بار الکتریکی در دو حالت در نظر گرفته شده در (الف) و (ب) را برابر بگیریم داریم:

$$\lambda\pi\mathrm{R} = (\mathrm{N}+1)e$$

بنابراین به جای λ می‌توانیم قرار دهیم:

$$\lambda = \frac{e}{\pi R}(\mathrm{N}+1) = \frac{e}{\pi R}\left(\frac{\pi R}{a}+1\right) = \frac{e}{a}\left(1+\frac{a}{\pi R}\right)$$

بنابراین خطای نسبی می‌شود:

$$\eta = 1 - \frac{\frac{e}{a}\left(1+\frac{a}{\pi R}\right)}{\frac{e}{2R}\operatorname{cotan}\frac{a}{2R}} = 1 - \frac{2R}{a}\left(1+\frac{a}{\pi R}\right)\tan\frac{a}{2R} \approx 1 - \frac{2R}{a}\left(1+\frac{a}{\pi R}\right)\frac{a}{2R} = -\frac{a}{\pi R}$$

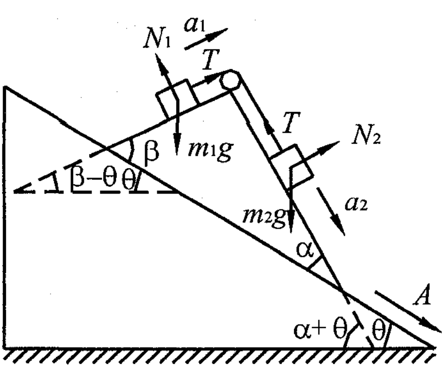
که البته خطای نسبی قدر مطلق مقدار اخیر است.

برای مقادیر واقعی داریم:

$$a = 1\mathrm{A}^\circ = 10^{-10}\,\mathrm{m}$$
$$R = 0.1\mathrm{m}$$
$$\Rightarrow \eta \approx 10^{-10}$$

پاسخ آزمون دوم

۱) مطابق شکل، سطوحی که جرم‌های m_1 و m_2 روی آنها واقع‌اند به ترتیب با افق زاویه‌ی $(\beta-\theta)$ و $(\alpha+\theta)$ می‌سازند . نیروهایی که به جرمهای m_1 و m_2 وارد می‌شوند در شکل نشان داده شده است. اگر A شتاب گوه و a_1 و a_2 به ترتیب شتاب m_1 و m_2 نسبت به M باشند، در دستگاه مرجع نالخت M معادلات حرکت m_1 و m_2 می‌شوند:



$$\begin{cases} T - m_1 A\cos\beta - m_1 g\sin(\beta-\theta) = m_1 a_1 \\ m_1 A\sin\beta + N_1 - m_1 g\cos(\beta-\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 g\sin(\alpha+\theta) - T - m_2 A\cos\alpha = m_2 a_2 \\ m_2 g\cos(\alpha+\theta) + m_2 A\sin\alpha - N_2 = 0 \end{cases}$$

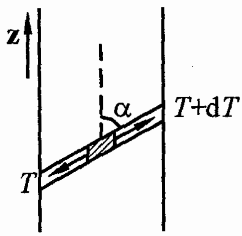
همچنین معادله‌ی حرکت گوه نسبت به سطح شیبدار عبارت است از:

$$\begin{cases} -T\cos\beta + T\cos\alpha + Mg\sin\theta + N_1\sin\beta - N_2\sin\alpha = MA \\ Mg\cos\theta + T\sin\alpha + T\sin\beta + N_1\cos\beta + N_2\cos\alpha - N = 0 \end{cases}$$

همچنین قید روی m_1 و m_2 ایجاب می‌کند که $a_1 = a_2$ باشد. با استفاده از ۵ معادله‌ی اول می‌توان a_1، a_2، T، N_1، N_2 و A را با توجه به رابطه‌ی $a_1 = a_2$ به دست آورد.

۲) اگر نیروی اصطکاک ایستایی را با F_S نشان دهیم، در آستانه‌ی لغزش طناب $F_S = \mathrm{d}T$ است.

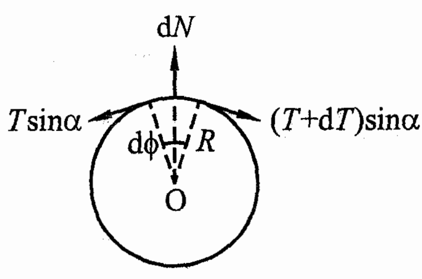
از طرفی می‌دانیم که $F_S = \mu \mathrm{d}N$ است، بنابراین مؤلفه‌های آن درجهت $\hat{z}$ و $\hat{\phi}$ می‌شود:



$$F_S(\hat{z}) = \cos\alpha \mathrm{d}T$$

$$F_S(\hat{\varphi}) = \sin\alpha \mathrm{d}T$$

مقطع استوانه، یک دایره به شعاع R است. پس:



$$\mathrm{d}N = T\sin\alpha\frac{\mathrm{d}\phi}{2} + (T+\mathrm{d}T)\sin\alpha\frac{\mathrm{d}\phi}{2}$$
$$\mathrm{d}N = T\sin\alpha \mathrm{d}\phi$$

بنابراین با جایگزین کردن رابطه‌ی اخیر در رابطه‌ی $\mathrm{d}N = \frac{F_S}{\mu} = \frac{\mathrm{d}T}{\mu}$ داریم:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mu} = T\sin\alpha \mathrm{d}\phi$$

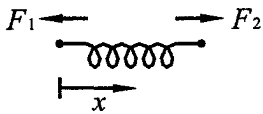
$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = \mu\sin\alpha\frac{\mathrm{d}z\tan\alpha}{R}$$

که در آن از رابطه‌ی $\tan\alpha = \frac{R\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z}$ استفاده شده است. بنابراین داریم:

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{\mu}{R}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\mathrm{d}z$$

$$T = T_o e^{\frac{\mu\sin^2\alpha}{R\cos\alpha}z}$$

۳) عنصری از فنر را که به فاصله‌ی x از انتهای سمت چپ است در نظر می‌گیریم . نیرویی که به این عنصر وارد می‌شود $F(x)$ است. با توجه به قانون هوک این نیرو برابر $Kl\dfrac{dz}{dx}$ است که در آن dz افزایش طول این عنصر بر اثر نیروی $F(x)$ و $K\dfrac{l}{dx}$ ثابت فنری این عنصر است. بنابراین داریم:



$$Kl\frac{dz}{dx}=F(x) \qquad (1)$$

از طرفی شتاب فنر برابر $a=\dfrac{F_2-F_1}{m}$ است و قانون دوم نیوتن برای بخشی از فنر به طول x می‌شود:

$$F(x)-F_1=\left(m\frac{x}{l}\right)a$$

$$F(x)-F_1=\left(m\frac{x}{l}\right)\left(\frac{F_2-F_1}{m}\right)$$

$$F(x)=(F_2-F_1)\frac{x}{l}+F_1$$

با جایگزین کردن رابطه‌ی اخیر در رابطه‌ی (۱) به دست می‌آوریم:

$$Kl\frac{dz}{dx}=(F_2-F_1)\frac{x}{l}+F_1$$

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی اخیر به دست می‌آوریم:

$$z(x)-z(0)=\left(\frac{F_1}{K}\right)\frac{x}{l}+\left(\frac{F_2-F_1}{2K}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2$$

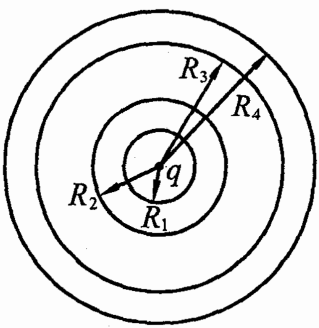
یعنی افزایش طول تابعی درجه‌ی دوم نسبت به x است.

در حالت $x = l$ یعنی افزایش طول کل فنر بر اثر نیروهای F_1 و F_2 می‌شود:

$$z(l) - z(0) = \frac{1}{2K}(F_1 + F_2)$$

۴)

الف) چون میدان الکتریکی داخل پوسته‌های رسانا صفرند، بنابراین برای پوسته‌ی داخلی روی سطح داخلی بار $-q$ و روی سطح خارجی‌اش بار $Q_1 + q$ قرار می‌گیرد. همچنین برای پوسته‌ی خارجی روی سطح داخلی‌اش بار $-q - Q_1$ قرار می‌گیرد و روی سطح خارجی‌اش بار $Q_1 + Q_2 + q$ قرار خواهد گرفت.



ب) با گرفتن یک سطح گوسی کروی روی محدوده‌های خواسته شده در صورت مسئله می توان میدان‌الکتریکی در آن ناحیه‌ها را تعیین کرد. به ترتیب داریم:

1) $E \cdot 4\pi r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad , \quad r < R_1$

2) $\mathbf{E} = 0 \quad , \quad R_1 < r < R_2$

3) $E \cdot 4\pi r^2 = \dfrac{q + Q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = \dfrac{q + Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad , \quad R_2 < r < R_3$

4) $\mathbf{E} = 0 \quad , \quad R_3 < r < R_4$

$$5)\quad E\cdot 4\pi r^2=\frac{q+Q_1+Q_2}{\varepsilon_0}\Rightarrow \mathbf{E}=\frac{q+Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}\quad,\quad R_4<r$$

پ) برای محاسبه‌ی اختلاف پتانسیل از انتگرال میدان الکتریکی استفاده می‌کنیم .

$$V_o-V_i=-\int_{R_2}^{R_3}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\frac{q+Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_2}\right)$$

بنابراین اختلاف پتانسیل برابر قدر مطلق مقدار فوق است یعنی:

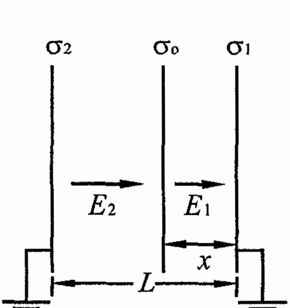
$$\Delta V=\frac{q+Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_3-R_2}{R_2R_3}\right)$$

ت) وقتی دو کره به هم متصل می‌شوند، هم پتانسیل شده و میدان در فضای $R_2<r<R_3$ نیز صفر می شود. بنابراین بار $-q$ روی سطح داخلی پوسته‌ی داخلی قرار می‌گیرد و بار $q+Q_1+Q_2$ روی سطح خارجی پوسته‌ی خارجی قرار خواهد گرفت.

۵)

الف) بار سطحی صفحه‌ی داخلی $\sigma_0=nq$ است. اگر مطابق شکل (۱) بار سطحی هر یک از صفحات بیرونی به ترتیب σ_1 و σ_2 باشد، مطابق قانون گاؤس داریم:

$$\begin{cases}E_1=-\dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\\[2mm] E_2=\dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\end{cases}\qquad(1)$$



شکل (۱)

از طرفی اختلاف پتانسیل دو صفحه‌ی بیرونی صفر است، بنابراین داریم:

$$E_2(L-x)+E_1x=0 \qquad (2)$$

همچنین اگر قانون گاؤس را برای صفحه‌ی داخلی با بار σ_o بنویسیم، داریم:

$$E_1-E_2=\frac{\sigma_o}{\varepsilon_o}=\frac{nq}{\varepsilon_o} \qquad (3)$$

از سه معادله‌ی (۱)، (۲) و (۳) به دست می‌آوریم:

$$\sigma_1=-\left(\frac{L-x}{L}\right)nq$$

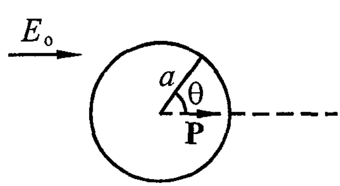
$$\sigma_2=-\left(\frac{x}{L}\right)nq$$

ب) با توجه به اصل بر هم نهی اگر بار القایی ناشی از n بار q برابر σ_1 و σ_2 باشد، بنابراین بار القایی روی صفحات بیرونی که از یک بار نقطه‌ای q ناشی می شود به صورت زیر خواهند بود.

$$q_1=-\left(\frac{L-x}{L}\right)q$$

$$q_2=-\left(\frac{x}{L}\right)q$$

پ) پتانسیل روی کره‌ی فلزی را صفر می‌گیریم. در این حالت پتانسیل کل می‌شود:



$$V=V_o+V_p=-E_oa\cos\theta+\frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_oa^2}=0$$

$$\therefore P=4\pi a^3\varepsilon_oE_o$$

البته می توان با صفر قرار دادن میدان E_θ روی سطح کره به همین نتیجه رسید.

ت) ورود قطره‌ی آب به داخل خازن باعث می‌شود که روی آن یک دوقطبی P القا شود. این دو قطبی به نوبه‌ی خود باعث ایجاد یک بار القایی درون خازن می‌شود که مطابق با قسمت (ب) برابر $\Delta Q = \dfrac{P}{L}$ است. بنابراین ظرفیت خازن به اندازه‌ی $\Delta C = \dfrac{P}{LV}$ افزایش می‌یابد، یعنی:

$$\Delta C = \frac{4\pi a^3 \varepsilon_0}{L^2}$$

حال اگر بار Q روی خازن ثابت باشد، با استفاده از $V = \dfrac{Q}{C}$ تغییر ظرفیت باعث تغییر ولتاژ می‌شود، که داریم:

$$\Delta V = -\frac{Q}{C^2}\Delta C$$

که در آن $C = \varepsilon_0 \dfrac{\pi R^2}{L}$ است. بنابراین داریم:

$$\Delta V = -\frac{Q}{\left(\varepsilon_0 \dfrac{\pi R^2}{L}\right)^2} \cdot \frac{4\pi a^3 \varepsilon_0}{L^2}$$

$$\Delta V = -\frac{4Qa^3}{\pi \varepsilon_0 R^4}$$

پاسخ آزمون سوم

۱) نیروی دافعه (یا جاذبه) کولنی یک نیروی داخلی است پس در حرکت مرکز جرم اثری ندارد و مرکز جرم مشترک دو ذره تحت نیروی خارجی گرانش مانند یک پرتابه‌ی معمولی روی مسیر سهمی حرکت می‌کند. در لحظه‌ی اولیه داریم:

$$x_{\text{ocm}} = x_1 = x_2 = 0$$

$$y_{\text{ocm}} = \frac{m_1 h_1 + m_2 h_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_{\text{ocm}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

بنابراین برای حرکت مرکز جرم داریم:

$$x_{\text{cm}} = v_{\text{ocm}} t = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} t$$

$$y_{\text{cm}} = y_{\text{ocm}} - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{m_1 h_1 + m_2 h_2}{m_1 + m_2} - \frac{1}{2} g t^2$$

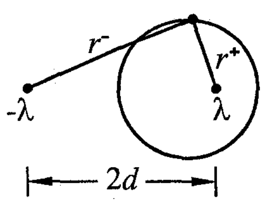
در لحظه‌ی t_0 مکان مرکز جرم را از معادلات بالا به دست می‌آوریم. مکان m_1 را با توجه به صورت مسئله در زمان t_0 عبارت است از $x_1 = l$ و $y_1 = 0$. بنابراین با توجه به این مقادیر x_2 و y_2 محاسبه می‌شود.

$$\begin{cases} x_2 = \left(\dfrac{m_2+m_1}{m_2}\right)x_{cm} - \dfrac{m_1}{m_2}x_1 \\ y_2 = \left(\dfrac{m_2+m_1}{m_2}\right)y_{cm} - \dfrac{m_1}{m_2}y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \left(\dfrac{m_2+m_1}{m_2}\right)\left(\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\right)t_o - \dfrac{m_1}{m_2}l \\ y_2 = \left(\dfrac{m_2+m_1}{m_2}\right)\left[\dfrac{m_1h_1+m_2h_2}{m_1+m_2} - \dfrac{1}{2}gt_o{}^2\right] \end{cases}$$

۲)

الف) پتانسیل ناشی از دو خط بار موازی با اندازه‌ی λ و $-\lambda$ عبارت است از:



$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{r^+}{r_o}\right) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{r^-}{r_o}\right)$$

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{r^-}{r^+}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\ln\frac{(x+\mathrm{d})^2+y^2}{(x-\mathrm{d})^2+y^2}$$

که در آن مبداء مختصات را روی نقطه‌ی وسط بین دو خط بار $+\lambda$ و $-\lambda$ در نظر گرفته‌ایم.

با ساده کردن رابطه‌ی اخیر داریم:

$$y^2 + (x-\mathrm{dB})^2 = \mathrm{d}^2(\mathrm{B}^2-1)$$

که در آن $\mathrm{B} = \dfrac{\beta+1}{\beta-1}$ و $\beta = e^{\frac{4\pi\varepsilon_o V}{\lambda}}$. معادله‌ی اخیر معادله‌ی دایره‌ای است که مختصات مرکز آن $(\mathrm{dB},0)$ و شعاع آن $R = \mathrm{d}\sqrt{\mathrm{B}^2-1}$ است.

ب) با توجه به قسمت (الف) می‌توانیم این استوانه‌ها را سطوح هم پتانسیل ناشی از دو خط بار λ و $-\lambda$ در نظر بگیریم که شعاع و فاصله‌ی بین مراکز آنها از روابط زیر به دست می‌آید.

$$a = d\sqrt{B_1^{\,2} - 1}$$

$$b = d\sqrt{B_2^{\,2} - 1}$$

$$\delta = dB_2 - dB_1 = d(B_2 - B_1)$$

در مسئله‌ی ۶ امتحان نهایی تابستان ۷۶ ظرفیت این چنین خازنی در حالت کلی به دست آمد که مقدار آن برابر است با:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_o}{\left|\ln\dfrac{\delta^2 - (a^2 + b^2) + \sqrt{(b^2 - a^2)^2 + \delta^4 - 2\delta^2(a^2 + b^2)}}{\delta^2 - (a^2 + b^2) - \sqrt{(b^2 - a^2)^2 + \delta^4 - 2\delta^2(a^2 + b^2)}}\right|}$$

در حالت $\delta = 0$ ظرفیت خازن هم‌محور به دست می‌آید که برابر است با:

$$C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_o}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)^2} = \frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}$$

در حالتی که δ کوچک باشد و تا رتبه‌ی دوم نسبت به δ ظرفیت خازن می‌شود:

$$C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}\left(1 - \frac{\delta^2}{(b^2 - a^2)\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}\right) = C_1\left(1 - \frac{\delta^2}{(b^2 - a^2)\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}\right)$$

بنابراین ΔC می‌شود:

$$\Delta C = C_1 - C_2 = \frac{C_1\delta^2}{\left(b^2 - a^2\right)\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

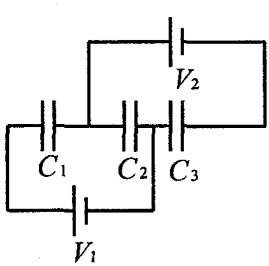
که در آن C_1 ظرفیت خازن هم‌محور است.

پ) چون انرژی خازن برابر $U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ است، بنابراین نیروی بین آنها می‌شود:

$$F = -\frac{dU}{dx}\Big|_Q = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{\Delta C}{\delta} = \frac{Q^2}{2C_1^{\,2}}\frac{C_1\delta^2}{\left(b^2 - a^2\right)\ln\left(\frac{b}{a}\right)\delta}$$

$$F = \frac{Q^2\delta}{2C_1\left(b^2 - a^2\right)\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{Q^2\delta}{4\pi\varepsilon_0\left(b^2 - a^2\right)}$$

یعنی نیرو درجهت تغییر مکان است.



ت) سیستم نشان داده شده در صورت مسئله معادل شکل روبروست. نیروی بین دو خازن فقط به توزیع بارهای آنها مربوط است. پس فرقی نمی‌کند که سیستم به باتری وصل باشد یا نه. بنابراین فرض می‌کنیم که سیستم از باتریها جدا باشد. انرژی سیستم برابر با مقدار زیر بوده و از آنجا نیرو به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{\left(Q + Q'\right)^2}{C_2} + \frac{1}{2}\frac{Q'^2}{C_3}$$

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{Q^2}{2C_1^{\,2}}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\left(Q + Q'\right)^2}{2C_2^{\,2}}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{Q'^2}{2C_3^{\,2}}\frac{\partial C_3}{\partial x}$$

که C_1، C_2 و C_3 از قسمتهای قبل به دست می‌آیند.

پاسخ آزمون چهارم

(۱

الف) طبق قانون بقای انرژی داریم:

$$\frac{\varepsilon^2}{R} = mC\dot{\theta} \Rightarrow \frac{\varepsilon^2}{mC} = R\dot{\theta} = R_0(1+\alpha\theta)\dot{\theta}$$

$$\therefore (1+\alpha\theta)d\theta = \frac{\varepsilon^2 \mathrm{d}t}{mCR_0} \Rightarrow \theta + \frac{\alpha}{2}\theta^2 = \frac{\varepsilon^2}{mCR_0}t$$

$$\therefore \theta^2 + \frac{2}{\alpha}\theta - \frac{2\varepsilon^2}{mC\alpha R_0}t = 0 \Rightarrow \theta = -\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2\varepsilon^2}{mC\alpha R_0}t}$$

طبق قانون اهم داریم:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{R_0\left[1+\left(-1+\sqrt{1+\frac{2\alpha\varepsilon^2}{mCR_0}t}\right)\right]} = \frac{\varepsilon}{R_0\sqrt{1+\frac{2\alpha\varepsilon^2}{mCR_0}t}}$$

ب) باز با توجه به قانون بقای انرژی داریم:

$$i^2 R = mC\dot{\theta}$$

$$i^2 R_0(1+\alpha\theta) = mC\dot{\theta}$$

$$\frac{i^2 R_o}{mC}t=\int_0^\theta \frac{d\theta}{1+\alpha\theta}\Rightarrow \ln(1+\alpha\theta)=\frac{i^2 R_o}{mC}t\Rightarrow \theta=\frac{1}{\alpha}\left(e^{\frac{i^2 R_o}{mC}t}-1\right)$$

ولتاژ دو سر مقاومت نیز برابر است با:

$$V=iR=iR_o e^{\frac{i^2 R_o}{mC}t}$$

پ) طبق قانون بقای انرژی داریم:

$$m_1 C_1\dot{\theta}_1=i^2 R_{o1}(1+\alpha_1\theta_1)\qquad (1)$$

$$m_2 C_2\dot{\theta}_2=i^2 R_{o2}(1+\alpha_2\theta_2)\qquad (2)$$

همچنین طبق قانون اهم داریم:

$$i[R_{o1}(1+\alpha_1\theta_1)+R_{o2}(1+\alpha_2\theta_2)]=\varepsilon\qquad (3)$$

از تقسیم روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{m_1 C_1\dot{\theta}_1}{m_2 C_2\dot{\theta}_2}=\frac{R_{o1}(1+\alpha_1\theta_1)}{R_{o2}(1+\alpha_2\theta_2)}$$

$$\frac{m_1 C_1 R_{o2}}{m_2 C_2 R_{o1}}\frac{d\theta_1}{1+\alpha_1\theta_1}=\frac{d\theta_2}{1+\alpha_2\theta_2}$$

$$\frac{m_1 C_1 R_{o2}}{m_2 C_2 R_{o1}}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\ln(1+\alpha_1\theta_1)=\ln(1+\alpha_2\theta_2)$$

$$(1+\alpha_2\theta_2)=(1+\alpha_1\theta_1)^{\frac{m_1 C_1 R_{o2}\alpha_2}{m_2 C_2 R_{o1}\alpha_1}}$$

از معادله‌ی اخیر شرطی که بتواند هم‌دمایی دو سیم یعنی $\theta_1=\theta_2$ را نتیجه دهد به صورت زیر است:

$$\alpha_1=\alpha_2 \quad , \quad \frac{m_1C_1}{R_{o1}}=\frac{m_2C_2}{R_{o2}}$$

در حالت همدمایی داریم:

$$i\left(R_{o1}+R_{o2}\right)\left(1+\alpha\theta\right)=\varepsilon$$

$$m_1C_1\dot{\theta}=i^2R_{o1}\left(1+\alpha\theta\right)\Rightarrow m_1C_1\dot{\theta}=\frac{\varepsilon^2R_{o1}\left(1+\alpha\theta\right)}{\left(R_{o1}+R_{o2}\right)^2\left(1+\alpha\theta\right)^2}$$

$$\therefore\left(1+\alpha\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\varepsilon^2R_{o1}}{m_1C_1\left(R_{o1}+R_{o2}\right)^2}\mathrm{d}t$$

$$\therefore\theta+\frac{\alpha}{2}\theta^2=\frac{\varepsilon^2R_{o1}}{m_1C_1\left(R_{o1}+R_{o2}\right)^2}t$$

$$\therefore\theta=-\frac{1}{\alpha}+\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{2\varepsilon^2R_{o1}t}{m_1C_1\left(R_{o1}+R_{o2}\right)^2\alpha}}$$

بنابراین جریان i می‌شود:

$$i=\frac{\varepsilon}{\left(R_{o1}+R_{o2}\right)\sqrt{1+\frac{2\varepsilon^2R_{o1}t\,\alpha}{m_1C_1\left(R_{o1}+R_{o2}\right)^2}}}$$

۲) فرض کنید از گرانش بتوان صرفنظر کرد، یعنی هیچ نیروی خارجی وارد نمی‌شود. با توجه به رابطه‌ی

$$M\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{F}_{\text{ext}}+\mathbf{V}_{\text{rel}}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

می‌بینیم که $\mathbf{F}_{ext} = 0$ و $\mathbf{V}_{rel} = -u\hat{k}$ است. بنابراین داریم:

$$M\frac{dV}{dt} = -u\frac{dM}{dt}$$

$$dV = -u\frac{dM}{M} \Rightarrow V - V_o = -u\ln\frac{M}{M_o} \Rightarrow V = V_o + u\ln\frac{M_o}{M} \qquad (1)$$

علائم زیر را برای موشک در نظر می‌گیریم:

$M_1 =$ جرم سوخت مرحله‌ی اول + جرم محفظه‌ی مرحله‌ی اول $= m_1 + 0.1m_1 = \frac{11}{10}m_1$

جرم محفظه‌ی مرحله‌ی اول $= \frac{1}{11}M_1$

به همین ترتیب برای مرحله‌ی دوم داریم:

$$M_2 = \frac{11}{10}m_2$$

جرم محفظه‌ی مرحله‌ی دوم $= \frac{1}{11}M_2$

و همچنین جرم کلاهک را m می‌گیریم . بنابراین جرم اولیه‌ی کل موشک عبارتست از:

$$M_o = M_1 + M_2 + m$$

در انتهای سوختن سوخت مرحله‌ی اول جرم می‌شود:

$$M = \frac{1}{11}M_1 + M_2 + m$$

و در انتهای سوختن سوخت مرحله‌ی دوم داریم:

$$M' = \frac{1}{11} M_2 + m$$

ضمناً در شروع مرحله‌ی دوم (که محفظه‌ی مرحله‌ی اول جـدا مـی‌شـود و تـأثیری در سـرعت موشک ندارد) جرم عبارتست از:

$$M_o' = M_2 + m$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی (1) سرعت در انتهای مرحله‌ی اول می‌شود:

$$V_1 = u \ln \frac{M_1 + M_2 + m}{\frac{1}{11} M_1 + M_2 + m}$$

که در آن سرعت اولیه برابر صفر است.

همچنین سرعت در انتهای مرحله‌ی دوم می‌شود:

$$V_2 = V_1 + u \ln \frac{M_2 + m}{\frac{1}{11} M_2 + m}$$

با جایگزین کردن مقدار V_1 در رابطه‌ی اخیر به دست می‌آوریم:

$$V_2 = u \ln \frac{(M_2 + m)(M_1 + M_2 + m)}{\left(\frac{1}{11} M_2 + m\right)\left(\frac{1}{11} M_1 + M_2 + m\right)}$$

اگر قرار دهیم $a = e^{\frac{V_2}{u}}$ که مقدار ثابتی است، به دست می آوریم:

$$a = \frac{(M_2 + m)(M_1 + M_2 + m)}{\left(\frac{1}{11} M_2 + m\right)\left(\frac{1}{11} M_1 + M_2 + m\right)}$$

با حل این معادله برای M_1 برحسب M_2 و ثابتهای دیگر، به دست می‌آوریم:

$$M_1=\frac{(m+M_2)^2-a(m+M_2)\left(m+\frac{M_2}{11}\right)}{\frac{1}{11}a\left(m+\frac{M_2}{11}\right)-(m+M_2)}\qquad(2)$$

بنابراین جرم کل اولیه‌ی موشک عبارتست از:

$$M_0=M_1+M_2+m=\frac{(m+M_2)^2-a(m+M_2)\left(m+\frac{M_2}{11}\right)}{\frac{1}{11}a\left(m+\frac{M_2}{11}\right)-(m+M_2)}+M_2+m$$

$$\therefore M_0=\frac{\frac{10}{11}a\left(m+\frac{M_2}{11}\right)(m+M_2)}{(m+M_2)-\frac{1}{11}a\left(m+\frac{M_2}{11}\right)}$$

حال باید M_0 می‌نیمم شود. برای ساده شدن $f=\frac{1}{M_0}$ باید ماکزیمم شود. پس:

$$f=\frac{1}{M_0}=\frac{11}{10a\left(m+\frac{M_2}{11}\right)}-\frac{1}{10(m+M_2)}$$

$$\frac{df}{dM_2}=0\Rightarrow\frac{11}{10a}\left[\frac{-\frac{1}{11}}{\left(m+\frac{M_2}{11}\right)^2}\right]+\frac{1}{10(m+M_2)^2}=0$$

$$\therefore a\left(m+\frac{M_2}{11}\right)^2=(m+M_2)^2$$

$$\therefore\sqrt{a}\left(m+\frac{M_2}{11}\right)=m+M_2\Rightarrow M_2=m\frac{\sqrt{a}-1}{1-\frac{\sqrt{a}}{11}}=m\frac{e^{\frac{V_2}{2u}}-1}{1-\frac{1}{11}e^{\frac{V_2}{2u}}}$$

که با گذاشتن $m=100\text{kg}$، $V_2=6000\text{m/s}$ و $u=1500\text{m/s}$ به دست می‌آوریم:

$$M_2=1946\text{kg}$$

با گذاشتن مقادیر به دست آمده در رابطه‌ی (۲)، مقدار M_1 به دست می آید:

$$M_1=39800\text{kg}$$

بنابراین جرم کل اولیه‌ی موشک عبارت است از:

$$M_{\circ}=M_1+M_2+m=41846\text{kg}$$

حال اگر موشک یک مرحله‌ای باشد داریم:

$$V_{\text{f}}=u\ln\frac{M_{\circ}}{M}=u\ln\frac{m+M_1}{m+\frac{1}{11}M_1}\Rightarrow\frac{m+M_1}{m+\frac{1}{11}M_1}=e^{\frac{V_{\text{f}}}{u}}$$

مقدار $e^{\frac{V_{\text{f}}}{u}}=e^4\approx 54.6$ است. در حالی که سمت چپ معادله‌ی بالا تابعی همواره صعودی است که برای $M_1\to\infty$ مقدارش عدد ۱۱ می‌شود و اصلاً به مقدار 54.6 نخواهد رسید. بنابراین موشک یک مرحله‌ای نمی تواند عمل مورد نظر را فراهم سازد.

۳)

الف) نقطه‌ای روی سطح دی‌الکتریک و به فاصله‌ی r از بار q در نظر می‌گیریم. اگر بردار قطبش داخل دی الکتریک را با $\mathbf{P}$ نمایش دهیم و $\hat{\text{n}}$ بردار واحد عمود بر سطح دی‌الکتریک باشد چگالی بار القا شده برابر $P_{\perp}=\mathbf{P}.\hat{\text{n}}=\sigma$ است.

میدان الکتریکی داخل دی‌الکتریک دو قسمت دارد که یکی ناشی از بارهای القا شده است و برابر

$-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\hat{\mathrm{n}}$ و دیگری ناشی از بار q و برابر $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{\mathrm{r}}$. بنابراین داریم:

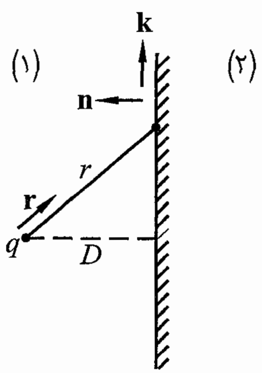
$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{\mathrm{r}}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\hat{\mathrm{n}}=\left[-\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^3}D\right)\hat{\mathrm{n}}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^3}\sqrt{r^2-D^2}\,\hat{\mathrm{k}}\right]$$

از طرفی می‌دانیم که $\mathbf{P}=\varepsilon_o(\mathrm{K}-1)\mathbf{E}$، بنابراین داریم:

$$\sigma=P_\perp=\mathbf{P}.\hat{\mathrm{n}}=\varepsilon_o(\mathrm{K}-1)\mathbf{E}.\hat{\mathrm{n}}=\varepsilon_o(\mathrm{K}-1)\left[-\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^3}D\right)\right]$$

$$\therefore\ \sigma=\frac{-q(\mathrm{K}-1)D}{(\mathrm{K}+1)(2\pi r^3)}$$

ب) مطابق قسمت (الف) مؤلفه‌ی عمودی میدان در دو ناحیـه‌ی ۱ و ۲ می‌شود:



$$E_{\perp 1}=\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^3}D-\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\right)$$

$$E_{\perp 2}=\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^3}D+\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\right)$$

اگر به جای σ مقدار به دست آمده در قسمت (الف) را جایگزین کنیم، به دست می‌آوریم:

$$E_{\perp 1}=\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^3}D+\frac{qD}{4\pi\varepsilon_o r^3}\frac{\mathrm{K}-1}{\mathrm{K}+1}\right)=\frac{qD}{4\pi\varepsilon_o r^3}\frac{2\mathrm{K}}{\mathrm{K}+1}$$

همچنین:

$$E_{\perp 2}=\left(\frac{qD}{4\pi\varepsilon_o r^3}-\frac{qD}{4\pi\varepsilon_o r^3}\frac{\mathrm{K}-1}{\mathrm{K}+1}\right)=\frac{2}{\mathrm{K}+1}\frac{qD}{4\pi\varepsilon_o r^3}$$

یعنی $E_{\perp 1}=\mathrm{K}E_{\perp 2}$ است که قابل پیش‌بینی نیز بود.

پ) فرض می‌کنیم تمام فضا با دی‌الکتریک K پر شده است و بار تصویری q'' در همان محل بار q قرار دارد، طبق یکتایی جواب اگر این بار همان شرایط مرزی را ایجاد کند که در قسمت (ب) به دست آوردیم، بنابراین جواب مسئله را با این بار تصویری یافته‌ایم. در ناحیه‌ی دی‌الکتریک در قسمت (ب) به دست آوردیم که $E_{\perp 2}$ به صورت زیر است:

$$E_{\perp 2}=\frac{qD}{4\pi\varepsilon_{\text{o}}r^3}\frac{2}{\text{K}+1}$$

حال اگر مؤلفه‌ی عمودی میدان در فاصله‌ی D از بار تصویری q'' را در نظر بگیریم، به دست می‌آوریم:

$$E''_{\perp 2}=\frac{q''D}{4\pi\varepsilon_{\text{o}}\text{K}r^3}$$

با برابر قرار دادن $E_{\perp 2}$ و $E''_{\perp 2}$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{qD}{4\pi\varepsilon_{\text{o}}r^3}\frac{2}{\text{K}+1}=\frac{q''D}{4\pi\varepsilon_{\text{o}}\text{K}r^3}\Rightarrow q''=\frac{2\text{K}}{\text{K}+1}q$$

بنابراین پتانسیل الکتریکی در نقاط مختلف دی‌الکتریک می‌شود:

$$\phi=\frac{q''}{4\pi\varepsilon_{\text{o}}\text{K}r}=\frac{2q}{4\pi\varepsilon_{\text{o}}(\text{K}+1)r}$$

که در آن r فاصله از بار نقطه‌ای است. این جواب فقط برای قسمت دی‌الکتریک است. برای اینکه پتانسیل در نقاط سمت چپ را نیز به دست بیاوریم، باید بار نقطه‌ای q' را در ناحیه‌ی سمت راست بگیریم.

پاسخ آزمون پنجم

۱)

الف) برای اینکه بردار $\mathbf{A}$ را پیدا کنیم کافی است که تغییرات زمانی $\mathbf{L}$ را به دست آوریم. داریم:

$$\mathbf{L} = m\left(\mathbf{r}\times\mathbf{v}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = q\mathbf{r}\times\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$$

با $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{b}{r^2}\hat{\mathrm{r}}$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0}{4\pi}bq\left[\mathbf{r}\times\left(\mathbf{v}\times\frac{\hat{\mathrm{r}}}{r^2}\right)\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}bq\left[\frac{r\mathbf{v}-\left(\mathbf{v}.\mathbf{r}\right)\hat{\mathrm{r}}}{r^2}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}bq\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\hat{\mathrm{r}}\right)$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{L}-\frac{\mu_0}{4\pi}bq\,\hat{\mathrm{r}}\right] = 0$$

یعنی بردار $\mathbf{L}' = \mathbf{L}-\frac{\mu_0}{4\pi}bq\,\hat{\mathrm{r}}$ برداری ثابت است. پس بردار $\mathbf{A}$ می‌شود:

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}bq\,\hat{\mathrm{r}}$$

ب) برای اینکه بار q روی یک مخروط حرکت کند کافی است نشان دهیم که زاویه‌ی بردار مکان $q(\mathbf{r})$ همواره با یک راستای مشخص، مقداری ثابت است. زاویه‌ی بین راستای بردار ثابت $\mathbf{L}'$ و بردار مکان $\mathbf{r}$ را به دست می‌آوریم.

$$\hat{\mathrm{r}}.\mathbf{L}' = \hat{\mathrm{r}}.\mathbf{L}+\hat{\mathrm{r}}.\mathbf{A} = \hat{\mathrm{r}}.m\left(\mathbf{r}\times\mathbf{v}\right)+\hat{\mathrm{r}}.\left(-\frac{\mu_0}{4\pi}bq\,\hat{\mathrm{r}}\right) \doteq -\frac{\mu_0}{4\pi}bq = \text{ثابت}$$

یعنی زاویه‌ی بین $\mathbf{r}$ و $\mathbf{L}'$ همواره ثابت است و مقدار آن برابر است با:

$$\cos\alpha = \frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{L}'}{|\mathbf{L}'|} = \frac{-\frac{\mu_0}{4\pi}bq}{|\mathbf{L}'|}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-\frac{\mu_0}{4\pi}bq}{|\mathbf{L}'|}\right)$$

بردار $\hat{\mathbf{n}}$ راستای محور مخروط نیز در همان جهت بردار $\mathbf{L}'$ است. یعنی $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{L}'}{|\mathbf{L}'|}$ که برحسب شرایط اولیه تعیین می‌شود.

پ) چون بردار $\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}bq\,\hat{\mathbf{r}}$ بر بردار $\mathbf{L} = m\left(\mathbf{r}\times\mathbf{v}\right)$ عمود است، پس داریم:

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \mathbf{A}$$

$$L'^2 = L^2 + A^2 \Rightarrow L^2 = L'^2 - A^2$$

چون اندازه‌های L' و A ثابت‌اند پس اندازه‌ی L نیز ثابت خواهد بود.

ت) چون کار نیروی مغناطیس روی بار q صفر است پس انرژی جنبشی ثابت می‌ماند و داریم:

$$K = \frac{1}{2}m\left(r^2\sin^2\alpha\,\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\right)$$

چون $\frac{L}{m} = l = r^2\sin\alpha\dot{\varphi}$ ثابت است، پس داریم:

$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{l^2}{r^2} + \dot{r}^2\right)$$

در نقطه‌ی برگشت ذره $\left(r_C\right)$ داریم: $\dot{r} = 0$. از این رو:

$$r_C^{\,2} = \frac{ml^2}{2K}$$

سرعت زاویه‌ای ذره در محل r_C نیز می‌شود:

$$\omega = \dot{\varphi}\Big|_{r=r_C} = \frac{l}{r_C^{\,2}\sin\alpha}$$

ث) با استفاده از رابطه‌ی انرژی جنبشی داریم:

$$\dot{r}^2 = \frac{2K}{m} - \frac{l^2}{r^2}$$

$$\therefore \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2K}{m}r^2 - l^2}} = \mathrm{d}t \Rightarrow \frac{m}{2K}\sqrt{\frac{2K}{m}r^2 - l^2} = t \Rightarrow r^2 = \left[\left(\frac{2K}{m}\right)^2 t^2 + l^2\right]\frac{m}{2K}$$

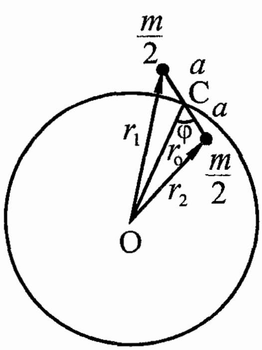
از طرفی داشتیم: $l = r^2 \sin\alpha\, \dot{\varphi}$، بنابراین داریم:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{l}{r^2 \sin\alpha}\mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}\varphi = \frac{l}{\frac{m}{2K}\sin\alpha} \frac{\mathrm{d}t}{\left[\left(\frac{2K}{m}\right)^2 t^2 + l^2\right]}$$

$$\therefore \varphi = \frac{2K}{ml\sin\alpha}\tan^{-1}\left(\frac{2K}{ml}t\right)$$

۲)

الف) تابع انرژی پتانسیل با توجه به شکل روبرو به صورت زیر است.



$$V = -G\frac{M_e m}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

$$r_{1,2} = \left(r_0^2 + a^2 \pm 2r_0 a\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}} = \left(r_0^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 \pm \varepsilon\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\epsilon = \frac{2r_0 a}{r_0^2 + a^2}$$

$$V = -G\frac{M_e m}{2}\frac{1}{\left(r_0^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{\left(1+\varepsilon\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\left(1-\varepsilon\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

ب) در حالت $a \ll r_0$ اولین رتبه‌ای که در آن متغیر φ وارد می‌شود رتبه‌ی دوم است. زیرا مطابق زیر رتبه‌ی اول آن حذف می‌شود. داریم:

$$V = -G\frac{M_e m}{2}\frac{1}{\left(r_0^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\cos\varphi + \frac{3}{8}\varepsilon^2\cos^2\varphi + \ldots\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\cos\varphi + \frac{3}{8}\varepsilon^2\cos^2\varphi + \ldots\right)\right]$$

$$V = -G\frac{M_e m}{2}\frac{1}{\left(r_0^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left(2+\frac{3}{4}\varepsilon^2\cos^2\varphi+\ldots\right)$$

$$V = -G\frac{M_e m}{2}\frac{1}{\left(r_0^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left(2+\frac{3}{4}\frac{4r_0^2a^2}{\left(r_0^2+a^2\right)^2}\cos^2\varphi+\ldots\right)$$

با توجه به اینکه $a << r_0$ است داریم:

$$V = -G\frac{M_e m}{r_0}\left(1-\frac{a^2}{2r_0^2}+\frac{3}{2}\frac{a^2}{r_0^2}\cos^2\varphi+\ldots\right)$$

پ) اگر مشتق اول و دوم را نسبت به φ حساب کنیم، داریم:

$$V'(\varphi)=G\frac{M_e m}{r_0^3}3a^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$V''(\varphi)=G\frac{M_e m}{r_0^3}3a^2\cos(2\varphi)$$

بنابراین با صفر قرار دادن $V'(\varphi)$ به دست می‌آوریم که $\varphi=0$ و $\varphi=\frac{\pi}{2}$ دو وضعیت تعادلی هستند. اولین وضعیت تعادلی $(\varphi=0)$ پایدار است؛ زیرا $V''(0)>0$ می‌باشد. در این حالت گرایش ماهواره به گونه‌ای است که محور ماهواره (خط رابط دو جرم متصل به آن) در جهت بردار شعاعی OC می‌باشد. وضعیت دوم $\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$، تعادل ناپایدار است. زیرا $V''\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ خواهد بود و محور با بردار شعاعی، زاویه‌ی قائمه می‌سازد.

ت) معادله‌ی حرکت نوسانی ماهواره حول وضعیت تعادل پایدار به صورت زیراست:

$$I_{cm}\ddot{\varphi}+V''(0)\varphi=0$$

بنابراین فرکانس زاویه‌ای نوسان عبارت است از:

$$\omega=\sqrt{\frac{V''(0)}{I_{cm}}}=\sqrt{\frac{3a^2G\frac{M_e m}{r_0^3}}{ma^2}}=\sqrt{3G\frac{M_e}{r_0^3}}$$

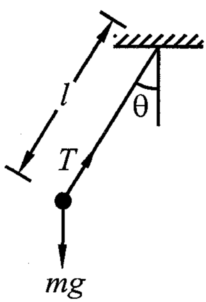
ث) برای به دست آوردن فرکانس زاویه‌ای ماهواره به دور زمین (ω_0) از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم.

$$G\frac{M_e m}{r_o^2} = m r_o \omega_o^2 \Rightarrow \omega_o^2 = G\frac{M_e}{r_o^3} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{G\frac{M_e}{r_o^3}}$$

بنابراین نسبت $\frac{\omega}{\omega_o}$ برابر می‌شود با:

$$\frac{\omega}{\omega_o} = \sqrt{3}$$

۳)



الف) مطابق شکل نیروهای وارد بر جرم m، نیروی T در راستای ریسمان و نیروی وزن mg است. با استفاده از قانون دوم نیوتن مولفه‌های نیرو در راستای شعاعی و مماسی می‌شود:

$$mg\cos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2$$

$$-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$$

برای دامنه‌ی کوچک $\sin\theta \approx \theta$ و از معادله‌ی دوم فوق داریم:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

جواب معادله‌ی دیفرانسیل اخیر می‌شود:

$$\theta = A\cos(\omega_o t + \alpha)$$

که $\omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}}$ فرکانس زاویه‌ای حرکت آونگ است.

ب) نیروی میرایی متناسب با سرعت جرم m است. یعنی برابر $-b\left(l\dot{\theta}\right)$ است که در آن $b = 2m\gamma$ است. بنابراین مولفه‌ی مماسی معادله‌ی حرکت می‌شود:

$$-mg\sin\theta - 2m\gamma l\dot{\theta} = ml\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

جواب معادله‌ی دیفرانسیل اخیر با فرض $\gamma < \omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}}$ می‌شود:

$$\theta = \theta_o e^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t + \varphi)$$

که در آن $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$ است.

پ) تغییر زمانی انرژی سیستم $\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right)$ برابر با کار نیروی اصطکاک است. بنابراین داریم:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=(-2m\gamma)v=2m\gamma l^2\dot{\theta}^2$$

با استفاده از قسمت (ب) می‌توان $\dot{\theta}$ را به دست آورد.

$$\dot{\theta}=\theta_{\circ}\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\left(-\gamma\sin(\omega_1 t+\varphi)+\omega_1\cos(\omega_1 t+\varphi)\right)$$

با جایگزین کردن $\dot{\theta}$ در رابطه‌ی $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ و فرض اینکه $\gamma<<\omega_{\circ}$ و $\omega_1\approx\omega_{\circ}$ به دست می‌آوریم:

$$\left|\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right|=-m\gamma\, l^2\theta_{\circ}^{\ 2}\omega_{\circ}^{\ 2}e^{-2\gamma t}\qquad(1)$$

از طرفی در حالتی که $\gamma<<\omega_{\circ}$ است، $\omega_1\approx\omega_{\circ}=\sqrt{\frac{g}{l}}$ می‌شود. بنابراین داریم:

$$E=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl(1-\cos\theta)\approx\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl\frac{\theta^2}{2}$$

با جایگزین کردن مقادیر θ و $\dot{\theta}$ از روابطی که به دست آوردیم و فرض $\gamma<<\omega_{\circ}$ و $\omega_1\approx\omega_{\circ}$ به دست می‌آوریم:

$$E\approx\frac{1}{2}ml^2\theta_{\circ}^{\ 2}\omega_{\circ}^{\ 2}e^{-2\gamma t}\qquad(2)$$

با مقایسه‌ی معادلات (۱) و (۲) به دست می‌آوریم:

$$<\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}>=-2\gamma E$$

$$\therefore\gamma=-\frac{<\mathrm{d}E/\mathrm{d}t>}{2E}$$

ت) برای دامنه‌ی کوچک تا اولین تقریب بعد از مرتبه‌ی اول نسبت به θ به دست می‌آوریم:

$$-\frac{g}{l}\sin\theta=\ddot{\theta}\Rightarrow-\omega_{\circ}^{\ 2}\left(\theta-\frac{\theta^3}{6}\right)=\ddot{\theta}\qquad(3)$$

با فرض $\theta=\theta_{\circ}\sin\omega_2 t$ و جایگزین کردن آن در معادله‌ی (۳) به دست می‌آوریم:

$$-\omega_{\circ}^{\ 2}\sin\omega_2 t+\frac{\omega_{\circ}^{\ 2}}{6}\theta_{\circ}^{\ 2}\sin^3\omega_2 t=-\omega_2^{\ 2}\sin\omega_2 t$$

$$-\omega_{\circ}^{\ 2}\sin\omega_2 t+\frac{\omega_{\circ}^{\ 2}}{6}\theta_{\circ}^{\ 2}\left[\frac{3}{4}\sin\omega_2 t-\frac{1}{4}\sin 3\omega_2 t\right]=-\omega_2^{\ 2}\sin\omega_2 t$$

$$-\omega_\mathrm{o}^{\,2}+\frac{3}{24}\omega_\mathrm{o}^{\,2}\theta_\mathrm{o}^{\,2}=-\omega_2^{\,2}$$

$$\omega_2\approx\omega_\mathrm{o}\left(1-\frac{\theta_\mathrm{o}^{\,2}}{16}\right)\Rightarrow T\approx T_\mathrm{o}\left[1+\frac{\theta_\mathrm{o}^{\,2}}{16}\right]$$

که در آن $\omega_\mathrm{o}=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ است.

ث) با توجه به اینکه $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=-2m\gamma\, l^2\dot{\theta}^2$ است، میانگین آن می‌شود:

$$<\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}>=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\frac{-2\gamma ml^2}{T}\int_0^T\dot{\theta}^2\mathrm{d}t$$

چون ضریب γ را داریم و می‌خواهیم $<\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}>$ را تا مرتبه‌ی اول نسبت به γ حساب کنیم، همه چیز را تا مرتبه‌ی صفر نسبت به γ حساب می‌کنیم. فقط اثر بزرگ بودن دامنه را درنظر می‌گیریم. یعنی از قسمت (ت) استفاده می‌کنیم. بنابراین:

$$<\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}>=-\gamma\, ml^2\theta_\mathrm{o}^{\,2}\omega_2^{\,2}$$

و انرژی نیز تا مرتبه‌ی صفر نسبت به γ می‌شود:

$$E=mgl(1-\cos\theta_\mathrm{o})=mgl\left[1-\left(1-\frac{\theta_\mathrm{o}^{\,2}}{2}+\frac{\theta_\mathrm{o}^{\,4}}{24}\right)\right]=mgl\frac{\theta_\mathrm{o}^{\,2}}{2}\left(1-\frac{\theta_\mathrm{o}^{\,2}}{12}\right)$$

بنابراین γ_1 می‌شود:

$$\gamma_1=-\frac{1}{2E}<\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}>=-\frac{1}{mgl\theta_\mathrm{o}^{\,2}\left(1-\frac{\theta_\mathrm{o}^{\,2}}{12}\right)}\left(-\gamma\, ml^2\theta_\mathrm{o}^{\,2}\omega_2^{\,2}\right)$$

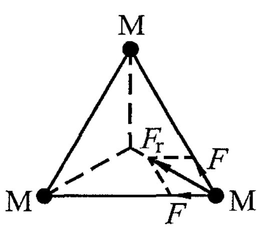
$$\approx\frac{\gamma\, l\omega_2^{\,2}}{g}\left(1+\frac{\theta_\mathrm{o}^{\,2}}{12}\right)=\frac{\gamma\, l}{g}\omega_\mathrm{o}^{\,2}\left(1-\frac{\theta_\mathrm{o}^{\,2}}{16}\right)^2\left(1+\frac{\theta_\mathrm{o}^{\,2}}{12}\right)$$

$$\approx\gamma\left(1-\frac{\theta_\mathrm{o}^{\,2}}{8}\right)\left(1+\frac{\theta_\mathrm{o}^{\,2}}{12}\right)\approx\gamma\left(1-\frac{\theta_\mathrm{o}^{\,2}}{24}\right)$$

پاسخ آزمون نهایی

۱)

الف) به علت تقارن دستگاه و شرایط اولیه‌ی آن، تمام اجرام با شتاب (متغیر با زمان) یکسانی به سمت مرکز مثلث سقوط می‌کنند. برآیند نیروی وارد بر یکی از جرمها، F_r، وقتی در فاصله‌ی r از مرکز است برابر است با:



$$F_r = F\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)} = F\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{6}} = 2F\cos\frac{\pi}{6}$$

$$F_r = 2\left(\frac{GM^2}{\left(2r\cos\frac{\pi}{6}\right)^2}\right)\cos\frac{\pi}{6} = G\frac{M^2}{2r^2\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{GM^2}{\sqrt{3}r^2}$$

ب) برای این که طول ضلع مثلث ثابت بماند، باید نیروی جاذبه‌ی به سمت مرکز مثلث برابر $Mr\omega^2$ باشد، یعنی داریم:

$$F_r = Mr_o\omega^2$$

$$\frac{GM^2}{\sqrt{3}{r_o}^2} = Mr_o\omega^2$$

اگر طول ضلع مثلث را l بگیریم، روشن است که $l = \sqrt{3}r_o$، و داریم:

$$\frac{GM^2}{\sqrt{3}\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2} = M\frac{l}{\sqrt{3}}\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{3GM}{l^3} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3GM}{l^3}}$$

پ) انرژی پتانسیل مجموعه با توجه به قسمت (الف) می‌شود:

$$V(r) = 3\left(-\frac{GM^2}{\sqrt{3}r}\right) = -\sqrt{3}\frac{GM^2}{r}$$

ت) سه جسم با سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}$ در فاصله‌ی r از مرکز مثلث دوران می‌کنند. پس تکانه‌ی زاویه‌ای مجموعه برابر است با:

$$L = 3\left(Mr^2\dot{\theta}\right)$$

ث)

$$E = 3\left(\frac{1}{2}Mv^2\right) + V(r) = \frac{3}{2}M\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r)$$

چون تکانه‌ی زاویه‌ای مجموعه ثابت است، از قسمت (ت) به دست می‌آوریم $\dot{\theta} = \frac{L}{3Mr^2}$. با جایگزین کردن در رابطه‌ی E داریم:

$$E = \frac{3}{2}M\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{9M^2r^2}\right) - \sqrt{3}\frac{GM^2}{r}$$

پ) انرژی کل سیستم را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E = \frac{3}{2}M\dot{r}^2 + \frac{L^2}{6Mr^2} - \sqrt{3}\frac{GM^2}{r} = \frac{3}{2}M\dot{r}^2 + V'(r)$$

که $V'(r)=\frac{L^2}{6Mr^2}-\sqrt{3}\frac{GM^2}{r}$ پتانسیل ظاهری است. بسامد نوسانهای کوچک حول r_0 با رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

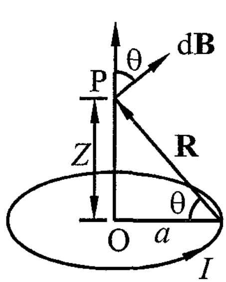
$$\Omega^2=\frac{1}{m}\frac{d^2V'}{dr^2}\bigg|_{r=r_0}=\frac{1}{3M}\left[\frac{L^2}{Mr^4}-2\sqrt{3}\frac{GM^2}{r^3}\right]_{r=r_0}$$

از قسمت (ت) داریم $L=3Mr^2\dot{\theta}$ و از قسمت (ب)، $\dot{\theta}=\omega=\sqrt{\frac{3GM}{l^3}}$ با $l=\sqrt{3}r_0$. با جایگذاری در رابطه‌ی Ω^2ی بالا، به دست می‌آوریم:

$$\Omega^2=\frac{GM}{\sqrt{3}{r_0}^3}\Rightarrow\Omega=\sqrt{\frac{GM}{\sqrt{3}{r_0}^3}}$$

که با مقدار ω یکی است؛ یعنی فرکانس نوسانات کوچک حول r_0 با فرکانس دوران اجرام حول مرکز جرمشان برابر است.

۲)



الف) میدان **B** در نقطه‌ی P روی محور z به صورت زیر به دست می‌آید.

$$d\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\mathbf{l}\times\mathbf{R}}{R^3}$$

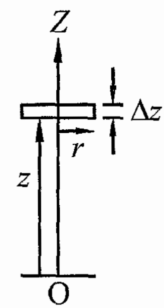
به علت تقارن، میدان **B** در امتداد z است.

$$dB_z=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{R^2}\cos\theta=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{R^3}a$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2\pi a^2}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ب) با استفاده از قانون گاؤس برای یک عنصر استوانه‌ای بـه ارتفـاع Δz و شـعاع کوچـک ρ در فاصله‌ی z از مرکز حلقه به دست می‌آوریم:

$$\oint \mathbf{B}.\mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \Rightarrow B_\rho\left(2\pi\rho\Delta z\right) + B_z\left(z+\mathrm{d}z\right)\pi\rho^2 - B_z\left(z\right)\pi\rho^2 = 0$$

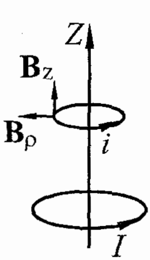


$$B_\rho\left(2\pi\rho\Delta z\right) + \frac{\partial B_z}{\partial z}\Delta z\left(\pi\rho^2\right) = 0$$

$$2B_\rho + \frac{\partial B_z}{\partial z}\rho = 0$$

$$B_\rho = -\frac{1}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}\rho = +\frac{3}{4}\frac{\mu_0 Iza^2\rho}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

پ) تنها مؤلفه‌ی B_ρ ناشـی از حلقـه بـه شـعاع a روی حلقـه‌ی کوچـک مـؤثر اسـت و بـا توجـه به $\mathrm{d}\mathbf{F} = i\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B}$ ، $\mathbf{F}$ نیروی کل درجهت محور z است؛ به طوری که اگر جریانها هم‌جهـت باشـند، نیروی وارد بر حلقه‌ی کوچک جاذبه (درخلاف جهت محور z) است و اگر درجهت مخالف باشند، نیرو دافعه (درجهت محور z) است. اندازه‌ی این نیرو برابر است با:



$$\mathbf{F} = \int i\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B} = i\int \mathrm{d}l\,\hat{\varphi}\times\left(B_\rho\hat{\rho} + B_z\hat{z}\right) = -i\int \mathrm{d}lB_\rho\,\hat{z}$$

$$\mathbf{F} = -2\pi riB_\rho\,\hat{z} = -\frac{3}{2}\frac{\mu_0\pi Iia^2r^2z}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}\hat{z}$$

ت)

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$m\frac{v^2}{r} = qvB_z \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = -\frac{qB_z}{m}\hat{z}$$

زیرا بار q باید درخلاف جهت I حرکت کند.

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{\mu_0 Iqa^2}{2m\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$$

ث) مدار دایره‌ای ذره مشابه با یک حلقه‌ی جریان $i = \frac{q}{T} = \frac{q\omega}{2\pi} = \frac{\mu_0 Iq^2a^2}{4\pi m\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ است. از قسمت (پ) نیز داریم:

$$\mathbf{F} = \frac{3}{2}\frac{\mu_0 \pi I a^2 r^2 z}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} i\ \hat{z} \Rightarrow \mathbf{F} = \frac{3\mu_0^{\,2} I^2 q^2 a^4 r^2}{8m\left(a^2+z^2\right)^4} z\ \hat{z}$$

ج) با استفاده از مقدار $\mathbf{F}$ در قسمت (ث) و صرف‌نظر کردن z در مقابل a در مخرج کسر آن، به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{F} = \frac{3\mu_0^{\,2} I^2 q^2 r^2}{8ma^4} z\ \hat{z}$$

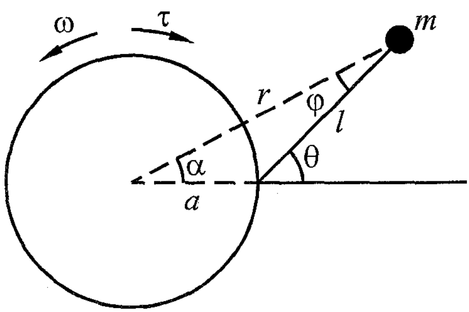
چ) از رابطه‌ی $\mathbf{F}$ در قسمت (ج) روشن است که ذره‌ی q در مرکز حلقه تعادل ناپایدار دارد.

۳)

الف) از روی شکل روشن است که:

$r=\sqrt{a^2+l^2+2al\cos\theta}$

که در آن a شعاع استوانه و l طول میله است.



ب) باز از روی شکل دیده می‌شود که:

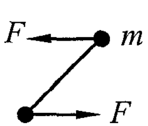
$r\sin\alpha=l\sin\theta$

از قسمت (الف) به جای r برحسب مقادیر ثابت و θ جایگزین می‌کنیم.

$$\sin\alpha=\frac{l\sin\theta}{\sqrt{a^2+l^2+2al\cos\theta}}$$

پ) چون میله را بدون جرم گرفته‌ایم، برآیند نیروهای وارد بر آن صفر است. نیرو در محل لولا و در محل اتصال جرم m به میله وارد می‌شود. بنابراین این دو نیرو باید مساوی و مختلف‌الجهت باشند. همچنین میله‌ی بدون جرم دارای گشتاور لختی صفر است. بنابراین گشتاور نیروی وارد به میله باید صفر باشد. از این رو نیروها باید در امتداد میله باشند. در ضمن اگر θ ثابت نباشد باز روابطی که بین α، θ و φ $(=\theta-\alpha)$ به دست آوردیم صادق است. فقط سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای جرم m برحسب سرعت زاویه‌ای، ω، و شتاب زاویه‌ای، $\dot{\omega}$، استوانه به صورت $\dot{\alpha}+\omega$ و $\ddot{\alpha}+\dot{\omega}$ خواهد بود.

معادلات حرکت جرم m عبارتند از:



لولا

$$\begin{cases}F\cos\varphi=mr(\dot{\alpha}+\omega)^2\\ F\sin\varphi=mr(\ddot{\alpha}+\dot{\omega})\end{cases}$$

معادله‌ی مربوط به استوانه نیز به صورت زیر است:

$Fa\sin\theta - \tau = I\dot{\omega}$

ت) روشن است که $\varphi = \theta - \alpha$ است. ضمناً در حالت $\tau = 0$، داریم $\theta = 0$، بنابراین θ حداقل از مرتبه‌ی τ است. پس معادلات را تا مرتبه‌ی اول نسبت به θ (و همچنین به دلیل مشابه نسبت به α) بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} r\alpha = l\theta \\ r = \sqrt{a^2 + l^2 + 2al} = a + l \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{l}{a+l}\theta$$

$$\therefore \varphi = \theta - \alpha = \frac{a}{a+l}\theta$$

با این تقریبها، معادلات حرکت جرم m به صورت زیر درمی‌آیند (با $\cos\varphi \approx 1$، $\sin\varphi \approx \varphi$):

$$\begin{cases} F = m(a+l)(\dot{\alpha} + \omega)^2 \\ F_{\varphi} = m(a+l)(\ddot{\alpha} + \dot{\omega}) \end{cases}$$

که در تقریب اول نسبت به $\dot{\alpha}$ و استفاده از $\varphi = \frac{a}{a+l}\theta$، این معادلات به صورت زیر می‌شوند.

$$\begin{cases} F \approx m(a+l)(\omega^2 + 2\omega\dot{\alpha})^2 \\ F\frac{a}{a+l}\theta \approx m(a+l)(\ddot{\alpha} + \dot{\omega}) \end{cases} \Rightarrow a\theta(\omega^2 + 2\omega\dot{\alpha}) = (a+l)(\ddot{\alpha} + \dot{\omega})$$

$$\therefore \dot{\omega} = \frac{a}{a+l}\theta(\omega^2 + 2\omega\dot{\alpha}) - \ddot{\alpha}$$

تا مرتبه‌ی اول جمله‌ی دوم داخل پرانتز که در θ ضرب می‌شود (جمله‌ای که ضریب $\theta\dot{\alpha}$ دارد)، را صفر می‌گیریم. پس:

$$\dot{\omega} = \frac{a}{a+l}\omega^2\theta - \ddot{\alpha}$$

اگر این $\dot{\omega}$ و F به دست آمده در بالا را در معادله‌ی حرکت استوانه که در قسمت (پ) به دست آوردیم، قرار دهیم، داریم:

$$m(a+l)(\omega^2+2\omega\dot{\alpha})a\theta-\tau=I\left(\frac{a}{a+l}\omega^2\theta-\ddot{\alpha}\right)$$

$$\therefore \tau=a\theta\omega^2\left[m(a+l)-\frac{I}{a+l}\right]+I\frac{l}{a+l}\ddot{\theta} \qquad (1)$$

جواب θ برحسب τ، ω و ثابتهای مسئله به شرطی نوسانی پایدار است که ضریب θ مثبت باشد. یعنی:

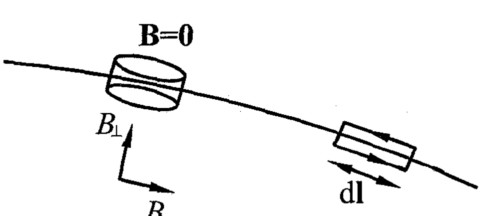
$$m(a+l)-\frac{I}{a+l}>0 \Rightarrow m(a+l)^2>I$$

ث) از معادله‌ی (۱) قسمت (ت) روشن است که زاویه‌ی θی تعادل برابر است با:

$$\theta=\frac{\tau}{a\omega^2\left[m(a+l)-\frac{I}{a+l}\right]}$$

۴)

الف) شرایط مرزی را می‌توان از قانون گاؤس و قانون آمپر به دست آورد. اگر قانون گاؤس را برای استوانه‌ی مطابق شکل به کار ببریم، و این که میدان داخل ابررسانا صفر است داریم:



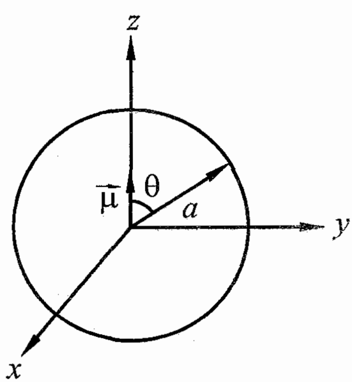
$$\oint \mathbf{B}.\mathbf{dS}=0 \Rightarrow B_{\perp}=0 \Rightarrow B_{r}=0$$

همچنین اگر قانون آمپر را برای مستطیل مطابق شکل به کار ببریم، داریم:

$$\oint \mathbf{B}.\mathbf{dl}=\mu_{o}.\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{B}_{11}\mathrm{dl}=\mu_{o}\mathrm{dI} \Rightarrow \mathrm{B}_{11}=\mathrm{B}_{\theta}=\mu_{o}\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dl}}$$

$$\therefore B_{\theta}=\mu_{o}i$$

که در آن $i=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}l}$ جریان در واحد طول است و درجهت $-\hat{\varphi}$ است.



ب) میدان مغناطیسی دوقطبی برابر است با:

$$\mathbf{B}_{\mu}=\frac{\mu_{o}}{4\pi}\left[\frac{2\mu\cos\theta}{a^{3}}\hat{\mathrm{r}}+\frac{\mu\sin\theta}{a^{3}}\hat{\theta}\right]$$

پ) میدان مغناطیسی ناشی از جریان سطحی نیز برابر است با:

$$\mathbf{B}_{\mathrm{S}}=\mathrm{B}_{o}\hat{\mathrm{z}}=\mathrm{B}_{o}\cos\theta\,\hat{\mathrm{r}}-\mathrm{B}_{o}\sin\theta\,\hat{\theta}$$

میدان کل، مجموع این دو میدان است.

$$\mathbf{B}_{\mathrm{t}}=\mathbf{B}_{\mathrm{S}}+\mathbf{B}_{\mu}=\left[\frac{\mu_{o}}{2\pi}\frac{\mu\cos\theta}{a^{3}}+B_{o}\cos\theta\right]\hat{\mathrm{r}}+\left[\frac{\mu_{o}}{4\pi}\frac{\mu\sin\theta}{a^{3}}-B_{o}\sin\theta\right]\hat{\theta}$$

چون مؤلفه‌ی B_{r} در ابررسانا صفر است، پس داریم:

$$B_{o}=-\frac{\mu_{o}}{2\pi}\frac{\mu}{a^{3}} \Rightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{S}}=-\frac{\mu_{o}}{2\pi}\frac{\mu}{a^{3}}\hat{\mathrm{z}}$$

همچنین میدان کل **B** می‌شود:

$$\mathbf{B}_{\mathrm{t}}=\frac{3\mu_{o}}{4\pi}\frac{\mu\sin\theta}{a^{3}}\hat{\theta}$$

ت) در قسمت (الف) جریان در واحد طول که در امتداد $\hat{\varphi}-$ در کره‌ی ابررسانا جاری بود را با i نشان دادیـم. بنابراین با توجه به رابطه‌ی $\mathbf{dF} = I\mathbf{dl}\times\mathbf{B}$ کمیتهای مختلف این رابطه به صورت زیر هستند:

$$I = ia\mathrm{d}\theta$$

$$\mathbf{dl} = -a\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\hat{\varphi}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\mathbf{B}_{\mathrm{t}}$$

مقدار $\frac{1}{2}$ در ضریب $\mathbf{B}$ در عبارت اخیر به خاطر متوسط میدان مغناطیسی در داخل و خارج کره‌ی ابررسانا است. بنابراین به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{dF} = \left(ia\mathrm{d}\theta\right)\left(-a\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\hat{\varphi}\right)\times\left(\frac{1}{2}\frac{3\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\frac{\mu\sin\theta}{\mathrm{a}^{3}}\hat{\theta}\right)$$

چون $i = \frac{B_\theta}{\mu_{\mathrm{o}}} = \frac{B_{\mathrm{t}}}{\mu_{\mathrm{o}}}$ است، داریم:

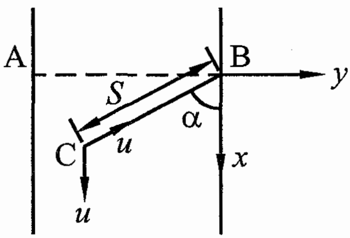
$$\mathbf{dF} = \frac{\mathrm{q}\mu_{\mathrm{o}}}{32\pi^2}\frac{\mu^2}{a^4}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\hat{\mathrm{r}}$$

می‌دانیم $\hat{\mathrm{r}} = \cos\theta\,\hat{\mathrm{z}} + \sin\theta\left(\cos\varphi\,\hat{\mathrm{i}} + \sin\varphi\,\hat{\mathrm{j}}\right)$ ، به علت تقارن روی φ مؤلفه‌هـای $\hat{\mathrm{i}}$ و $\hat{\mathrm{j}}$ صفرند و فقط مؤلفه‌ی z می‌ماند.

$$\mathbf{F}_{\mathrm{z}} = \hat{\mathrm{z}}\frac{q\mu_{\mathrm{o}}}{32\pi^2}\frac{\mu^2}{a^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}d\phi = \hat{\mathrm{z}}\frac{q\mu_{\mathrm{o}}}{16\pi}\frac{\mu^2}{a^4}\frac{1}{4}\sin^4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{q\mu_{\mathrm{o}}\mu^2}{64\pi a^4}$$

۵)

الف) سرعت قایق در راستای CB برابر $v^{CB} = u\cos\alpha - u$ است. این مؤلفه در راستای x و y برابر است با:



$$v_x^{CB} = u(\cos\alpha - 1)\cos\alpha$$

$$v_y^{CB} = -u(\cos\alpha - 1)\sin\alpha$$

ب) سرعت قایق در دستگاه xy به صورت $\mathbf{v} = (u - u\cos\alpha)\hat{\mathrm{i}} + u\sin\alpha\,\hat{\mathrm{j}}$ است. دیده می‌شود که مؤلفه‌ی x سرعت قایق با منفی مؤلفه‌ی سرعت در راستای CB با هم برابرند، یعنی:

$$v_x = -v^{CB} = u - u\cos\alpha$$

اگر فاصله‌ی CB را با S نشان دهیم، به دست می‌آوریم:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dS}{dt} \Rightarrow x = -S + c$$

ثابت c را از شرایط اولیه به دست می‌آوریم. در لحظه‌ی اولیه $x = 0$، $S = l$ است، پس $c = l$ می‌شود. همچنین از روی شکل پیداست که $x = S\cos\alpha$ است. پس داریم:

$$S\cos\alpha = -S + l \Rightarrow S = \frac{l}{1+\cos\alpha}$$

بنابراین $x = \frac{l}{1+\cos\alpha}\cos\alpha$ است. وقتی قایق به سمت دیگر رودخانه می‌رسد $\alpha = 0$ شده و در نتیجه $x = \frac{l}{2}$ می‌شود.

پ) از قسمت (ب) دیده می‌شود که $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$. همچنین داریم:

$$x=\frac{l\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{x}{l-x}$$

$$y=-\frac{l\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\Rightarrow y=-x\tan\alpha\Rightarrow\sin\alpha=-\frac{y}{l-x}$$

با جانشینی این مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در رابطه‌ی $\dfrac{dy}{dx}$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y/(l-x)}{1-x/(l-x)}=\frac{-y}{l-2x}$$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{l-2x}\Rightarrow y^2=l(l-2x)$$

یعنی مسیر یک سهمی است.

ت) برای محاسبه‌ی $\dot{\alpha}=\dfrac{d\alpha}{dt}$ از روابط زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}x=S\cos\alpha\\ y=-S\sin\alpha\end{cases}$$

با مشتق‌گیری از این روابط داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dot{S}\cos\alpha-S\dot{\alpha}\sin\alpha\\ \dfrac{dy}{dt}=-\dot{S}\sin\alpha-S\dot{\alpha}\cos\alpha\end{cases}$$

از طرف دیگر دیدیم که $\dfrac{dx}{dt}=u(1-\cos\alpha)$ و $\dfrac{dy}{dt}=u\sin\alpha$. بنابراین به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} u(1-\cos\alpha)=\dot{S}\cos\alpha-S\dot{\alpha}\sin\alpha \\ u\sin\alpha=-\dot{S}\sin\alpha-S\dot{\alpha}\cos\alpha \end{cases}$$

با حل معادلات بالا برحسب $\dot{\alpha}$ داریم:

$$-S\dot{\alpha}=u\sin\alpha \Rightarrow \dot{\alpha}=-\frac{u\sin\alpha}{S} \Rightarrow \dot{\alpha}=-\frac{u}{l}\sin\alpha(1+\cos\alpha)$$

ث) از $\dot{\alpha}$ به دست آمده در قسمت (ت) می‌توان زمان رسیدن به طرف دیگر رودخانه را به دست آورد.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=-\frac{u}{l}\int_{0}^{T}\mathrm{d}t \Rightarrow T=-\frac{l}{u}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}$$

$$T=-\frac{l}{u}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{1}{4}\tan^2\frac{\alpha}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}\rightarrow\infty$$

یعنی زمان رسیدن به طرف دیگر به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

آزمون‌های

دوره‌ی تابستان

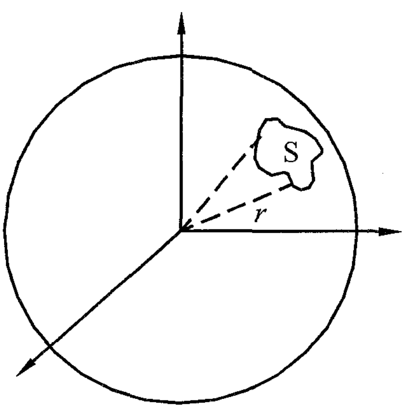
سال ۱۳۷۹

آزمون اول

۱) فرض کنید جهان نامتناهی و با چگالی یکنواخت n ستاره در واحد حجم باشد.

فرض کنید همه‌ی ستارگان در زمان $t = 0$ شروع به تابش کنند.

ما (در نقطه‌ای از جهان) در هر لحظه همه‌ی ستارگان را می‌بینیم که به فاصله‌ی کمتر از ct (c سرعت نور) از ما قرار گرفته‌اند.



می‌خواهیم تعیین کنیم که پس از چه مدت زمانی ما همه‌ی فضا را روشن خواهیم دید. (منظور از روشن دیدن این است که مجموع زاویه‌ی فضایی ستارگانی که می‌بینیم بیش از 4π باشد. زاویه‌ی فضایی بخشی از کره به مساحت S برابر است با $\frac{S}{r^2}$. بنابراین کل زاویه‌ی فضایی حول یک نقطه برابر 4π می‌باشد.)

قطر متوسط ستارگان D است. از هم‌پوشانی ستاره‌ها صرف‌نظر کنید. (فرض کنید ستاره‌ها بر روی هم قرار نمی‌گیرند.)

۲) قرصی سوراخ‌دار، مطابق شکل با شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2، چگالی سطحی بار مثبت σ دارد.

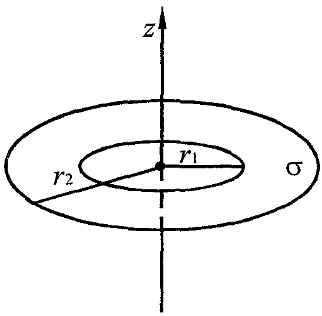
الف) میدان الکتریکی را روی محور تقارن قرص حساب کنید.

ب) این میدان را در حدهای زیر به دست آورید.

(1)　　$r_1 \to 0$ و r_2 محدود

(2)　　r_1 محدود و $r_2 \to \infty$

(3)　　$r_1 \to 0$ و $r_2 \to \infty$

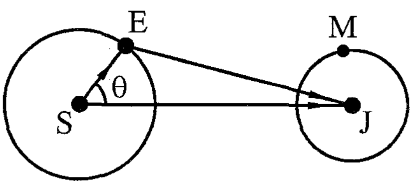


پ) فرض کنید جسمی به جرم m و بار منفی q مقید است که روی محور تقارن قرص (محور z ها) حرکت کند. همچنین فرض کنید این جسم بسیار نزدیک به صفحه‌ی قرص قرار دارد. میدان را تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر فاصله از صفحه‌ی قرص بسط دهید. نیروی وارد به جسم را حساب کنید و بسامد نوسان‌های آن را به دست آورید.

۳) یک جریان آب در هوا پخش می‌شود و به شکل قطره‌قطره درمی‌آید. فرض کنید اندازه‌ی قطره‌ها فقط تابع گرانش و کشش سطحی است. تعریف کشش سطحی چنین است: مایع (آب) به خاطر سطح آزادش (که با هوا در تماس است) مقداری انرژی اضافی دارد که برابر است با τ (کشش سطحی) ضرب در مساحت سطح آزاد. با استفاده از تحلیل ابعادی، مقدار عددی اندازه‌ی قطره‌ها را تخمین بزنید. کشش سطحی آب را 0.07 در واحدهای SI بگیرید.

آزمون دوم

۱) سالها قبل، پیش از اینکه دانشمندان بتوانند سرعت نور را به طور دقیق محاسبه کنند، اُ. رومر (O. Römer) منجم دانمارکی، زمانهای کسوف یک قمر سیاره‌ی مشتری را مطالعه کرد. او توانست سرعت نور را از زمان تناوب رصدشده‌ی یک قمر مشتری تعیین کند. شکل (۱) مدار زمین، E، حول خورشید، S، و همچنین یکی از اقمار مشتری را نشان می‌هد.



شکل (1)

(رومر زمان بین دو ظهور متوالی قمر M از پشت مشتری را مشاهده کرد.)

یک سری طولانی از رصد کسوفها اجازه می‌دهد که ارزیابی دقیقی از زمان تناوب واقعی داشته باشیم. زمان تناوب رصدشده بستگی به مکان نسبی زمین نسبت به دستگاه مرجع SJ (که به عنوان یک محور دستگاه مختصات درنظر گرفته می‌شود) دارد.

زمان متوسط گردش (واقعی) $T_0 = 42\,\mathrm{h}\,28\,\mathrm{m}\,16\,\mathrm{s}$ است و بیشینه‌ی زمان تناوب مشاهده شده $(T_0 + 15)\mathrm{s}$ است. فاصله‌ی متوسط زمین تا خورشید $R_E = 149.6\times10^6\mathrm{km}$، زمان تناوب گردش زمین و مشتری به دور خورشید به ترتیب 365 روز و 11.9 سال است.

الف) فرض کنید مدار زمین و مشتری دایره است. با توجه به قانون سوم کپلر یعنی اینکه مربع زمان تناوب گردش سیارات به دور خورشید متناسب با توان سوم فاصله‌ی آنها تا خورشید است(یعنی $T^2 \propto R^3$)، فاصله‌ی مشتری تا خورشید، R_J، را به دست آورید.

ب) سرعت زاویه‌ای نسبی ωی زمین نسبت به دستگاه مرجع خورشید– مشتری (SJ) را به دست آورید.

پ) فرض کنید یک ناظر ببیند که وقتی در مکان θ_k است M از سایه شروع به طلوع‌کردن

می‌کند و در طلوع بعدی در θ_{k+1} باشد($k=1,2,3,\ldots$). ناظر از این رصدها، پریود ظاهری گردش $T(t_k)$ را به صورت تابعی از زمان مشاهده، t_k، به دست می‌آورد. از نظر او این تغییرات مربوط به تغییرات فاصله‌ی مشتری $d(t_k)$ نسبت به ناظر طی این مشاهدات است.

پ۱) با توجه به شکل (۱) فاصله‌ی مشتری تا زمین، $d(t_k)$، را برحسب تابعی از زمان t_k تا تقریب مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{R_E}{R_J}$ به دست آورید.

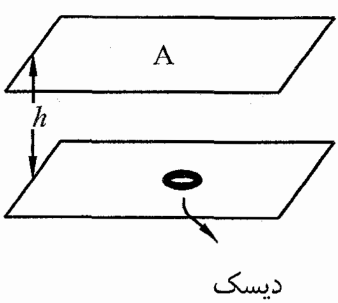
پ۲) اختلاف فاصله‌ی بین مشتری تا زمین را در دو رصد متوالی از طلوع قمر مشتری، $\Delta d = d(t+T_o)-d(t)$، به دست آورید.

توجه کنید که $\omega T_o << 1$ است. (مقدار ωT_o را به دست آورید.) بنابراین داریم $\sin\omega T_o \approx \omega T_o$ و $\cos\omega T_o \approx 1$. مقدار Δd را با توجه به این تقریبات به دست آورید.

ت) $T(t_k)$ را برحسب T_o، t_k وکمیتهای ثابت دیگر به دست آورید. $T(t_k)$ را برحسب t_k ترسیم کنید. مکان زمین، وقتی پریود بیشینه، پریود کمینه و پریود واقعی قمر M مشاهده می‌شود، کجاست؟

ث) سرعت نور را از نتایج بالا به دست آورید.

۲) یک خازن تخت را مطابق شکل درنظر بگیرید. سطح مقطع خازن A، فاصله‌ی صفحات آن h و بار اولیه‌ی آن Q است. یک دیسک رسانای کوچک با ضخامت ناچیز، سطح مقطع a و جرم m که بدون بار است، روی صفحه‌ی پائینی قرار می‌دهیم. در این حالت چگالی بار روی دیسک با بقیه‌ی نقاط صفحه‌ی خازن برابر می‌شود. براثر نیروی الکتروستاتیک، دیسک بدون آنکه بار خود را از دست بدهد از صفحه‌ی خازن جدا شده و بر اثر نیروی ناشی از میدان الکتریکی ثابت به سمت صفحه‌ی بالایی حرکت می‌کند. به همین ترتیب با برخورد به صفحه‌ی بالایی بار مثبت خود را به صفحه داده، با بار منفی به حرکت خود ادامه می‌دهد و به تدریج خازن را تخلیه می‌کند.



$q(t)$ خازن را در زمانهای زیاد که t از زمان یک رفت‌وآمد دیسک خیلی بیشتر است به دست آورید. فرض کنید در هر برخورد سرعت دیسک صفر شده و دیسک از حالت سکون دوباره به حرکت درمی‌آید و همچنین داریم $a << h^2 << A$. گرانش را درنظر نگیرید.

۳) معادلـه‌ی مـسیر سـیاره‌ی P بـه دور خورشـید $\rho=\dfrac{a\left(1-\mathrm{e}^2\right)}{1+\mathrm{e}\cos\phi}$ اسـت، کـه در آن ρ فاصـله‌ی سیاره‌ی P از خورشید و ϕ زاویه‌ی خط واصل خورشید به سیاره با محور x است. مبدأ مختـصات خورشید است و خورشید یکی از دو کانون بیضی است. a نصف قطر بزرگ بیـضی و e خـروج از مرکز بیضی است. $\mathrm{e}=\dfrac{c}{a}$، که $2c$ فاصله‌ی دو کانون بیـضی از هـم اسـت. حرکـت سـیاره روی بیضی چنان است که $\rho^2\dot{\phi}=l$، که l ثابت است. زاویه‌ی خط واصل کانون دیگر بیضی به سیاره با محور x را ϕ' بنامید.

الف) ϕ' را تا مرتبه‌ی یک نسبت به e برحسب ϕ به دست آورید.

ب) سرعت زاویه‌ای $\dot{\phi}'$ را تا مرتبه‌ی یک نسبت به e حساب کنید.

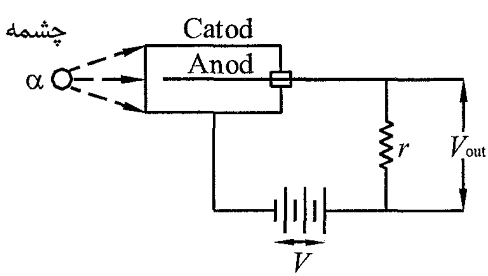
آزمون سوم

۱) ما همواره به طور طبیعی یا مصنوعی در معرض ذرات مختلف هستیم. یک نوع تابش که از مواد رادیواکتیو منتشر می‌شود ذره‌ی α است. (ذره‌ی α اتم هلیوم دوبار یونیزه شده است که دارای دو واحد بار مثبت و چهار واحد جرم هسته‌ای است.)

ذرات α وقتی از یک محیط گازی عبور می‌کنند می‌توانند گاز را یونیزه کنند. بر این اساس آنها را می‌توان آشکار کرد. با یونیزه‌کردن اتمهای گاز انرژی ذره‌ی α کاهش می‌یابد و در انتها متوقف می‌شود. رابطه‌ی تجربی بین برد متوسط ذره‌ی α در هوا و انرژی اولیه‌ی آن به صورت زیر است.

$$R_\alpha = 0.318E^{\frac{3}{2}}$$

که در آن R_α برحسب سانتیمتر و E برحسب مگا الکترون‌ولت (MeV) است.



اتاقک یونیزاسیون ابزاری است که به وسیله‌ی آن می‌توان ذرات α را آشکار کرد. این اتاقک از پوسته‌ی استوانه‌ای (کاتد) و یک میله که در امتداد محور استوانه است (آند) تشکیل شده است. داخل این استوانه هوا است. با عبور ذرات α هوا یونیزه شده و زوج الکترون- یون تشکیل می‌شود. یونها و الکترونهای تشکیل شده به سمت کاتد و آند حرکت می‌کنند و در دو سر مقاومت r (مطابق شکل) یک پالس ولتاژ به وجود می‌آید.

الف) سیستم الکترومتر اتاقک یونیزاسیون دارای ظرفیت 45 PF است و برای آشکارسازی ذرات αی با برد $R_\alpha = 5.50\text{cm}$ استفاده می‌شود. انرژی لازم برای تولید یک یون- الکترون در هوا توسط ذره‌ی α، $35\,\text{eV}$ است. اندازه‌ی ولتاژ تولید شده به وسیله‌ی هر ذره‌ی α چقدر است؟

ب) پالسهای ولتاژ به دست آمده در دو سر مقاومت r دریافت می‌شوند. کمترین جریان قابل آشکارسازی 10^{-12} A است. کمترین اکتیویته‌ی A، یک چشمه‌ی مولّد α که می‌توان با این ابزار آشکار کرد چقدر است؟ برد متوسط ذرات α، R_α، برابر 5.50cm و کارآیی آشکارساز 10% است.

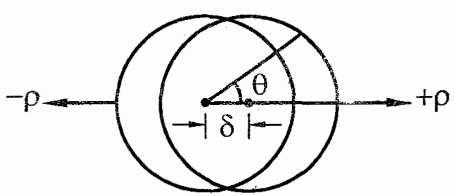
توجه: آهنگ تابش ذرات از یک چشمه‌ی رادیواکتیو را اکتیویته می‌گویند و واحد آن "کوری" است.

1 کوری= 3.7×10^{10} تلاشی بر ثانیه

$1\text{MeV}=10^{6}\ \text{eV}$

$1\text{eV}=1.6\times10^{-19}\ \text{J}$

$1\text{PF}=10^{-12}\ \text{F}$



۲) دو استوانه‌ی بی‌نهایت طویل به شعاع r را که هر کدام چگالی بار حجمی $+\rho$ و $-\rho$ دارند مطابق شکل در فاصله‌ی δ از هم قرار می‌دهیم. فرض کنید δ خیلی کوچک است.

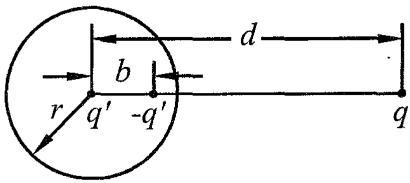
الف) میدان الکتریکی را در فضای مشترک دو استوانه به دست آورید.

ب) چگالی بار سطحی متناسب با θ را برحسب ρ و δ به دست آورید.

حال فرض کنید یک استوانه‌ی دی‌الکتریک بی‌نهایت طویل را با شعاع r و ضریب دی‌الکتریک K در یک میدان یکنواخت E که عمود بر محور استوانه است قرار می‌دهیم. فرض کنید در مرحله‌ی اول میدان E در داخل استوانه تغییر نمی‌کند. با استفاده از این E، P و σ روی سطح استوانه را به دست آورید. با استفاده از این σ، E جدید و P جدید و سپس σ جدید و به همین ترتیب این مراحل را تا بی‌نهایت ادامه دهید.

پ) میدان الکتریکی و قطبش داخل استوانه و چگالی بار سطحی روی استوانه در نهایت چقدر است؟

۳) اگر یک بار نقطه‌ای q به فاصله‌ی d از مرکز یک کره‌ی فلزی بـه شـعاع r قـرار داشـته باشـد میدان در خارج کره ماننـد سـه بـار نقطـه‌ای q (در مکان خودش)، $-q'$ به فاصـله‌ی b از مرکـز کـره و q' در روی مرکز کره می‌باشد که:

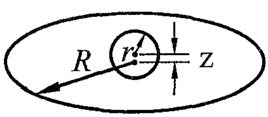


$$b=\frac{r^2}{d} \quad , \quad q'=\frac{r}{d}q$$

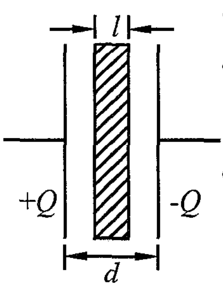
به بار $(-q',q')$ بار تصویر می‌گویند.

الف) بار تصویر یک حلقه‌ی باردار با چگالی بار خطی λ را روی کره‌ی فلزی که مرکـز آن روی محور حلقه قرار دارد به دست آورید. (بار کل کره خنثی است.)

ب) مرکز کره‌ی فلزی بدون باری مقید است که روی محـور حلقـه‌ی بـارداری بـا چگـالی بـار خطی λ حرکت کند. اگر مرکز کره به اندازه‌ی z از مرکز حلقه جابجا شود تغییر انـرژی پتانـسیل مجموعه را به دست آورید و به این وسیله دوره‌ی تناوب نوسانات کوچک این کره را حول مرکز حلقه محاسبه کنیـد. (جـرم کـره‌ی فلزی$=m$، حلقه‌ی باردار ساکن است.)



۴) مطابق شکل دی الکتریکی را داخـل یـک خـازن مـسطح قـرار داده‌ایـم. مساحت صفحه‌های خازن برابـر بـا A، فاصـله‌ی صـفحه‌هـای خـازن d، ضخامت دی‌الکتریک l و ضریب دی الکتریک آن K است.



الف) روی صفحه‌های خازن بار Q قرار می‌دهیم. چگالی بار سطحی روی دی‌الکتریک را به دست آورید.

ب) نیروی وارد به دو سطح دی‌الکتریک چقدر است؟

پ) اگر مدول کشسانی یانگ دی‌الکتریک برابر با Y باشد، تغییر ضخامت دی الکتریک را حساب کنید.

(توضیح: اگر به دو سر یک ماده با مدول کشسانی Y و مـساحت A و طـول l، نیـروی F وارد شود، تغییر طول آن δl برابر با $\delta l=\frac{Fl}{YA}$ است.

ت) اختلاف پتانسیل دو صفحه‌ی خازن چقدر است؟ ظرفیت خازن را با فرض کوچک بودن δl

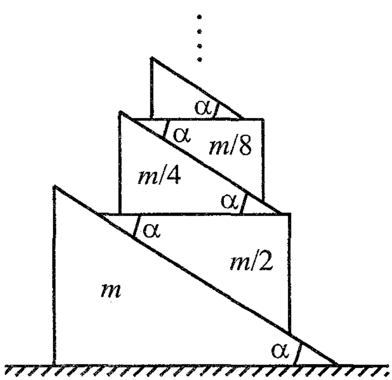
تا اولین مرتبه‌ی δl حساب کنید. (ظرفیت خازن را برابر با $C=\dfrac{Q}{V}$ بگیرید.)

ث) اگر خازن تا بار Q پرشده باشد، انرژی الکتریکی ذخیره‌شده در این خازن چقدر است؟ انرژی مکانیکی ذخیره‌شده در دی‌الکتریک چقدر است؟ انرژی کل را نیز حساب کنید.

۵) یک ذره با سرعت اولیه‌ی v_0 به بالا پرتاب می‌شود. نیروی مقاومت هوای وارد بر این ذره $-m\alpha\mathbf{v}|\mathbf{v}|$ است. زمان رسیدن ذره به نقطه‌ی اوج، ارتفاع اوج و زمان برگشتن ذره به محل پرتاب را تا مرتبه‌ی یک نسبت به α به دست آورید.

آزمون چهارم

۱) مطابق شکل، سطح شیبداری به جرم m و زاویه‌ی α بر روی سطح افقی قرار گرفته، سطح شیبدار دیگری نیز به جرم $\frac{m}{2}$ و زاویه‌ی α به طور برعکس روی آن قرار گرفته است. سطح شیبدار دیگری به جرم $\frac{m}{4}$ و زاویه‌ی α روی سطح قبلی و سطح دیگری به جرم $\frac{m}{8}$ و زاویه‌ی α روی آن قرار گرفته و همینطور تا بی‌نهایت ....



فرض کنید در هیچ سطحی اصطکاک نداریم. می‌خواهیم شتاب سطح شیبدار پائینی (m) را بیابیم.

الف) معادلات حرکت لازم را برای دو سطح شیبدار پائینی بنویسید (در هر دو راستا).

می‌بینید که تعداد معادلات یکی کمتر از تعداد مجهولات است. بنابراین به یک معادله‌ی دیگر نیاز داریم.

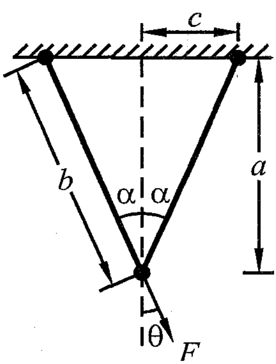
ب) حال مجموعه‌ی سطوح شیبدار منهای دو سطح پائینی (m و $\frac{m}{2}$) را درنظر بگیرید. تعیین کنید این مجموعه با مجموعه‌ی کل سطوح شیبدار چه تفاوتهایی دارد؟ (چه پارامترهایی را باید تغییر دهیم تا به همان مجموعه‌ی کل سطوح شیبدار برسیم؟)

پ) با توجه به قسمت بالا یک معادله‌ی جدید بنویسید (رابطه‌ای بین نیروی عکس‌العمل سطح

بین زمین و m و نیروی عکس‌العمل سطح بین $\frac{m}{2}$ و $\frac{m}{4}$).

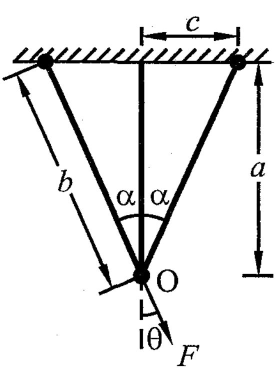
ت) با معادلات قبلی و معادله‌ی جدیدی که به دست آوردید شتاب سطح شیبدار پائینی (m) را بیابید.

۲)



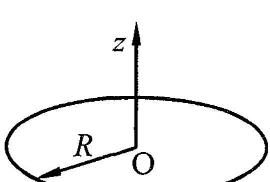
الف) مطابق شکل، دو میله را درنظر بگیرید. نیروی ثابت F با زاویه‌ی θ نسبت به خط عمود به نقطه‌ی اتصال دو میله وارد می‌شود. نیروی کشش دو میله را حساب کنید.

در تمام قسمتهای مسئله از جرم میله‌ها صرف‌نظر کنید و فرض کنید تمام اتصال میله‌ها با دیوار و با یکدیگر لولاهای بدون اصطکاک است.



ب) میله‌ی دیگری مطابق شکل به دستگاه اضافه می‌شود، به طوری که وقتی نیرویی به نقطه‌ی O وارد نشود کشش هر سه میله صفر است. معادلات نیرو را برای دستگاه جدید بنویسید و نشان دهید که این معادلات برای به دست آوردن کشش سه میله کافی نیست.

پ) برای حل مسئله فرض می‌کنیم هر کدام از میله‌ها به مقدار بسیار کمی تغییر طول پیدا می‌کنند. ثابت کشسانی میله‌ی وسط k_1 و ثابت کشسانی دو میله‌ی دیگر k است. با فرض این که نقطه‌ی تماس O به اندازه‌ی کوچکی جابه‌جا شود، تغییر طول و درنتیجه کشش هر میله را برحسب جابه‌جایی نقطه‌ی تماس سه میله به دست آورید. معادلات به دست آمده را به همراه معادلات قسمت (ب) حل کنید و کشش هر میله را برحسب α، θ و $\eta = \frac{k_1}{k}$ به دست آورید.



۳) یک حلقه‌ی باردار با چگالی خطی ثابت λ و شعاع R داریم.

الف) میدان الکتریکی ناشی از حلقه را ابتدا روی محور و سپس

حول محور به دست آوردید. (یعنی در نزدیکی محور حلقه به دست آورید.) با تقریب مرتبه‌ی اول $x, y << R$.

راهنمایی: از قانون گاؤس استفاده کنید.

ب) مرکز یک میله با چگالی λ' و طول $2d$ را به مرکز حلقه‌ی بالا لولا می‌کنیم ($d << R$).

انرژی پتانسیل میله را برحسب زاویه‌ی بین میله و محور حلقه (θ) و بقیه‌ی پارامترهای مسئله به دست آورید.

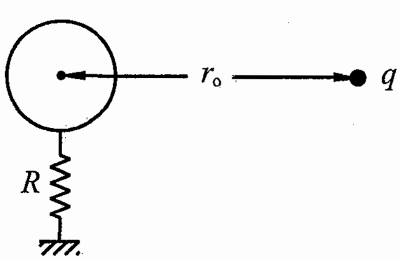
نقاط تعادل پایدار را برای میله (با توجه به علامت بار λ و λ') تعیین کنید.

پ) اگر میله را به اندازه‌ی زاویه‌ی α از حالت تعادل خارج کنیم، تغییر انرژی پتانسیل $\Delta U = \frac{1}{2}k\alpha^2$ خواهد بود. k را در نقاط تعادل پایدار میله به دست آورید.

۴)

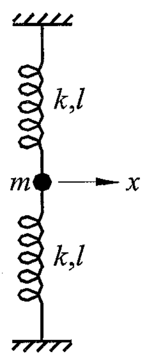
الف) یک کره‌ی فلزی با پتانسیل V داریم. بار q در فاصله‌ی r از مرکز کره قرار دارد. با درنظرگرفتن دوبار تصویری یکی در مرکز و دیگری در داخل کره، کل بار روی کره‌ی فلزی را حساب کنید.

ب) یک پوسته‌ی فلزی با یک مقاومت کوچک R به زمین وصل شده است و بار نقطه‌ای q که در لحظه‌ی صفر در فاصله‌ی r_0 از مرکز پوسته‌ی کروی است با سرعت ثابت v به سمت مرکز می‌رود.



سوراخ کوچکی در سطح پوسته تعبیه شده که بار از آن می‌گذرد و وارد کره‌ی فلزی می‌شود و هنگامی که به مرکز رسید متوقف می‌شود. فرض کنید مقاومت R خیلی کوچک است و تا مرتبه‌ی اول نسبت به R جریان گذرنده از مقاومت را حساب کنید. (هم وقتی که بار q در خارج کره است و هم وقتی که به داخل کره وارد می‌شود.)

آزمون پنجم



۱) ذره‌ای به جرم m بین دو فنر یکسان هر یک به ضریب k مطابق شکل روی یک سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد. فنرها در وضعیت نشان داده شده در شکل در حالت آزاد هستند و طول آزاد هر فنر l است. جرم m را کمی از حالت تعادل در جهت محور x جابه‌جا می‌کنیم.

الف) نیروی وارد بر جرم m را به دست آورید و در حالت دامنه‌های کوچک نشان دهید که این نیرو به صورت $F \approx -hx^3$ است. مقدار h را برحسب k و l تعیین کنید. دیمانسیون h را نیز به دست آورید.

ب) با استفاده از تحلیل ابعادی، زمان تناوب مربوط به این نیرو را تعیین کنید. توجه کنید که غیر از کمیتهایی که در نظر می‌گیرید، دامنه‌ی حرکت نیز مهم است.

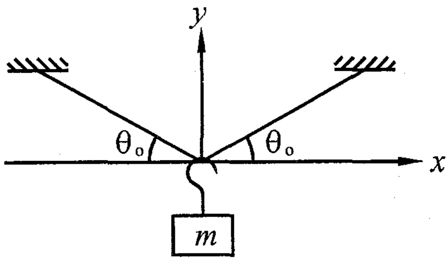
۲) یک ذره در میدان نیروی مرکزی $\mathbf{F} = m\,\mathrm{f}(r)\,\hat{\mathbf{r}}$ روی دایره حرکت می‌کند. m جرم ذره است. اگر به این ذره یک نیروی اصطکاک در خلاف جهت حرکت آن وارد شود، ذره دیگر روی دایره نمی‌ماند. فرض کنید نیروی اصطکاک وارد بر ذره $-\alpha m\mathbf{v}$ است که $\mathbf{v}$ سرعت ذره و α یک پارامتر ثابت است.

الف) در حالت $\alpha = 0$ برای حرکت دایره‌ای رابطه‌ی بین v و r را به دست آورید.

ب) رابطه‌ی تغییر انرژی پتانسیل برحسب زمان را بنویسید. رابطه را تا مرتبه‌ی یک نسبت به α ساده کنید و با استفاده از آن یک معادله برای تغییر r برحسب زمان بنویسید که در آن فقط r وجود داشته باشد.

پ) برای نیروی $\mathrm{f}(r) = -\dfrac{k}{r^2}$ معادله‌ی دیفرانسیل بالا را حل کنید و $r(t)$ را به دست آورید.

۳) طنابی به طول l بین دو نقطه‌ی آویز، آویزان گردیده است. جسمی به جرم m با یک قلاب بدون اصطکاک که به راحتی روی طناب می‌لغزد در وسط طناب در حال تعادل آویزان است. در این حالت دو تکه طناب با افق زاویه‌ی θ_0 می‌سازد. حالا به جسم ضربه‌ی کوچکی وارد می‌کنیم به طوری که جسم در حالی که همچنان روی طناب باقی مانده شروع به نوسان می‌کند.

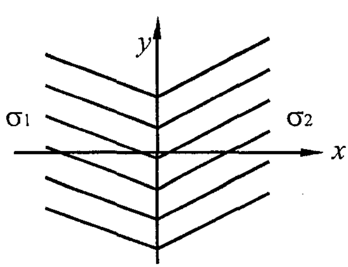


به پرسشهای زیر فقط برحسب پارامترهای θ_0، l، m و g پاسخ دهید.

الف) ثابت کنید در اختلالات کوچک، جابه‌جایی در راستای y در مقابل جابه‌جایی در راستای x قابل صرف‌نظر است.

ب) فرکانس نوسانات کوچک جسم را به دست آورید.

۴) ناحیه‌ی $x < 0$ فضا را به وسیله‌ی ماده‌ی 1 با رسانندگی σ_1 و ناحیه‌ی $x > 0$ فضا را به وسیله‌ی ماده‌ی 2 با رسانندگی σ_2 پرکرده‌ایم. در لحظه‌ی $t = 0$ یک میدان $\mathbf{E}_0$ درجهت مثبت محور xها در این مجموعه روشن می‌کنیم. (منبع به‌وجودآورنده‌ی $\mathbf{E}_0$ تا پایان آزمایش تغییری نمی‌کند.) با گذشت زمان در صفحه‌ی تماس دو ماده (ناحیه‌ی $x = 0$) بار سطحی $\Sigma(t)$ به وجود می‌آید.



الف) معادلات مربوط به $\mathbf{J}_1$ و $\mathbf{J}_2$ (مقادیر $\mathbf{J}$ در محیطهای 1 و 2) را در زمان t بنویسید.

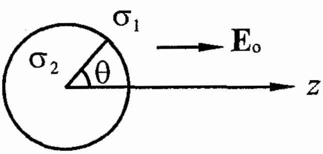
ب) از روی این معادله، معادله‌ی دیفرانسیلی برای $\Sigma(t)$ به دست آورده و آن را حل کنید($\Sigma(t) = ?$).

فرض کنید کره‌ای به شعاع R بار سطحی $\Sigma(t,\theta,\varphi) = \Sigma(t)\cos\theta$ را دارد. در این صورت اگر از پدیده‌های مغناطیسی و... صرف‌نظر کنیم (که در این مسئله می‌کنیم) میدان حاصل از چنین توزیع باری به صورت:

$$\mathbf{E}(r,t)=\begin{cases} -\dfrac{\Sigma(t)}{3\varepsilon_0}(\hat{\mathrm{r}}\cos\theta-\hat{\theta}\sin\theta) & ; \quad r<R \\ \dfrac{\Sigma(t)R^3}{3\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\ \hat{\mathrm{r}}+\sin\theta\,\hat{\theta}) & ; \quad r>R \end{cases}$$

خواهد بود. حال تمام فضا را با ماده‌ای با رسانندگی σ_1 پرکرده‌ایم و تنها درون کره‌ای به شعاع R حول مبداء ماده‌ای با رسانندگی σ_2 قرار داده‌ایم.

$$\sigma(\mathbf{r})=\begin{cases} \sigma_1 & ; \quad r>R \\ \sigma_2 & ; \quad r<R \end{cases}$$



حال دوباره در لحظه‌ی $t=0$ میدان $\mathbf{E}_0$ را (این بار در جهت مثبت z) روشن می‌کنیم. چون $\sigma_1\neq\sigma_2$ است به مرور بر روی کره بار سطحی $\Sigma(t,\theta,\varphi)$ جمع می‌شود.

اگر میدان ناشی از این توزیع بار سطحی را در داخل کره (در نقاط نزدیک به سطح یعنی $r\to R$)، $E_1(t,\theta,\varphi)$ و در خارج کره (در نقاط نزدیک به سطح)، $E_2(t,\theta,\varphi)$ بنامیم:

پ۱) معادله‌ی دیفرانسیل تحول $\Sigma(t,\theta,\varphi)$ را برحسب E_0، E_1، E_2، σ_1 و σ_2 بنویسید.

پ۲) سپس این معادله را حل کنید ($\Sigma(t,\theta,\varphi)=?$).

آزمون نهایی

۱)

الف) کره‌ای به شعاع R و جرم M در شاره‌ای به چگالی ρ سقوط می‌کند. فرض کنید نیروی مقاومتی که از طرف شاره به کره وارد می‌شود $F = \pi \rho R^2 v^2$ است که v سرعت سقوط کره درون شاره است. این کره تقریباً چه طولی را طی کند تا سرعتش از مرتبه‌ی سرعت حدش شود. برای سقوط قطره‌ی بارانی به شعاع $3\,\mathrm{mm}$ در هوا به چگالی $\rho = 1\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ این مقدار از چه مرتبه‌ای است؟ سرعت حد چه مقدار است؟

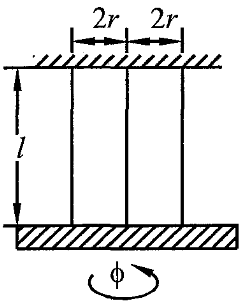
ب) فرض کنید قطره‌ای با شعاع خیلی کوچک در مه سقوط می‌کند. حین حرکت این قطره، قطرات ریز آب درون مِه به آن می‌چسبند. چگالی جرمی رطوبت محیط ρ_0 است. در صورتی که این قطره ارتفاع h را درون مه سقوط کند، شعاع نهایی قطره چقدر است؟ از شعاع اولیه‌ی قطره صرف‌نظر کنید. فرض کنید قطره تقریباً همیشه با سرعت حدش سقوط می‌کند. چون $\rho_0 >> \rho$ است نیروی مقاومت هوا را مثل حالت (الف) در نظر بگیرید. شتاب سقوط قطره چقدر است؟

$h = 1\mathrm{km}$ و $\rho_0 = 10^{-5}\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ بگیرید. مقدار عددی تغییر شعاع قطره و سرعت حد قطره را به دست آورید.

۲) فنری به طول اولیه‌ی l_0 و جرم m و ضریب سختی k را به شکل دایره‌ای می‌بندیم. اگر حلقه را با سرعت زاویه‌ای ω بچرخانیم:

الف) چه رابطه‌ای بین کمیتهای مسئله برقرار باشد تا شعاع حلقه به حالت تعادل برسد. این شعاع تعادل را به دست آورید ($r_t = ?$).

ب) در این حالت ($r = r_t$) دوره‌ی تناوب نوسانات کوچک حول نقطه‌ی تعادل را به دست آورید.



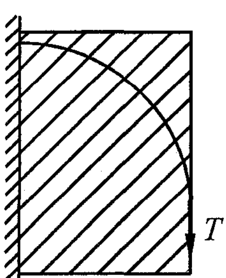
۳) دو طناب کنار هم به سقف متصل شده‌اند. طنابها را استوانه‌هایی به شعاع r و طول l فرض کنید. طنابها از پایین هم به یک میله متصل شده‌اند.

الف) حال فرض کنید میله را به اندازه‌ی زاویه‌ی ϕ می‌چرخانیم. فاصله‌ی میله را با سقف بیابید ($h = ?$).

ب) فرض کنید میله را به اندازه‌ی ϕ چرخانده و رها می‌کنیم. معادله‌ی دیفرانسیلی برای تغییرات زمانی ϕ به دست آورید.

توجه: هر گاه جسمی علاوه بر حرکت خطی مرکز جرم با سرعت زاویه‌ای $\dot{\phi}$ حول مرکز جرم دوران کند، انرژی جنبشی آن برابر $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2$ است که در آن v سرعت مرکز جرم و I کمیتی به نام لختی دورانی است که فقط به هندسه‌ی جسم بستگی دارد.

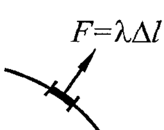
پ) در حالت $r << l$، ϕ را برحسب زمان به دست آورید.



شکل (۱)

۴) قطعه‌ی سیمی که بر روی یک قطعه یخ قرار دارد، از یک سو به دیوار متصل است. حال از سوی دیگر با نیروی T سیم را به سمت پائین می‌کشیم. به مرور سیم در اثر فشار، یخ را ذوب می‌کند و در یخ فرو می‌رود و هر قسمت تا زمانی در یخ فرو می‌رود که فشار در آن قسمت از یک حد معین بیشتر شود.

الف) فرض کنید به هر جزء از سیم مانند Δl نیروی عمود بر آن جزء و برابر $\lambda\Delta l$ وارد می‌شود (شکل 2). شکل تعادل سیم در نهایت به چه صورتی خواهد بود؟



شکل (۲)

ب) فرض کنید که سیم اصطکاکی با یخ نیز دارد که ضریب اصطکاک آن μ می‌باشد. در این حالت فرض کنید در تمام نقاط سیم می‌توان نوشت $F_f = \mu N$. حال معادله‌ی منحنی سیم را به دست آوردید. (برای این منظور θ را به صورت تابعی از طول سیم، l، به دست آورید.)

پ) فرض کنید که یخ زمانی ذوب می‌شود که نیروی عمود بر سطح واحد طول سیم برابر $\lambda_{\max}$ باشد. در قسمت (الف) مقدار λ را برحسب $\lambda_{\max}$ تخمین بزنید.

۵) یک ذره‌ی باردار به جرم m و بار q با سرعت v به طرف یک ذره‌ی باردار دیگر حرکت می‌کند. بار این ذره Q است و جرم آن خیلی بیشتر از m است، چنانکه این جسم عملاً ساکن است. علامت q و Q هم مخالف هم است. فاصله‌ی ذره‌ی دوم تا مسیر اولیه‌ی حرکت ذره‌ی اول b است. اگر b بزرگ باشد، انحراف مسیر حرکت از مسیر اولیه کم است.

الف) با توجه به این، شتاب ذره‌ی اول را تا کمترین مرتبه نسبت به K برحسب x به دست آورید.

K ثابت نیروی کولنی است ($F = K\dfrac{|qQ|}{r^2}$) و x مختصه‌ی دکارتی در راستای مسیر حرکت اولیه‌ی ذره اول است.

ب) در اثر این شتاب، ذره‌ی اول انرژی تابش می‌کند. توان تابشی این ذره $\dfrac{2}{3}\dfrac{Kq^2a^2}{c^3}$ است که در آن a شتاب ذره و c سرعت نور است. انرژی کلی که ذره تابش می‌کند تا کمترین مرتبه نسبت به K چقدر است؟

پ) چه شرطی لازم است تا ذره‌ی اول در جاذبه‌ی ذره‌ی دوم گیر بیفتد؟ مقطع مؤثر این فرآیند (گیرافتادن) را به دست آورید.

۶) یک ذره به جرم m در پتانسیل مرکزی $mu(r)$ حرکت می‌کند. به این ذره نیروی اصطکاک وابسته به سرعت $\mathbf{F} = -m\alpha\mathbf{v}$ وارد می‌شود. اگر اصطکاک کوچک باشد و ذره در ابتدا روی یک مسیر دایره‌ای حرکت کند، مسیر حرکت به دایره نزدیک می‌ماند.

الف) مسیر حرکت را دایره‌ای فرض کنید و تغییر شعاع مسیر برحسب زمان را به دست آورید. فرض کنید $u(r) \propto r^{\beta}$ و $\beta > -2$ باشد.

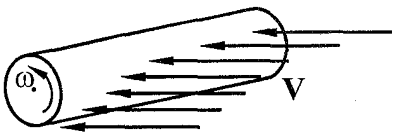
ب) با فرض حرکت دایره‌ای، تغییر بسامد زاویه‌ای حرکت برحسب زمان را به دست آورید.

پ) در چه حالتی برحسب α و β فرض تقریباً دایره‌ای‌بودن مسیر با گذشت زمان بهتر می‌شود؟ (راهنمایی: تغییر شعاع طی یک دور گردش ذره را با شعاع مدار مقایسه کنید.)

در حالتی که فرض تقریباً دایره‌ای‌بودن مسیر با گذشت زمان بدتر می‌شود تا چه زمانی این

تقریب قابل قبول است؟ (مرتبه‌ی این زمان مورد نظر است.)

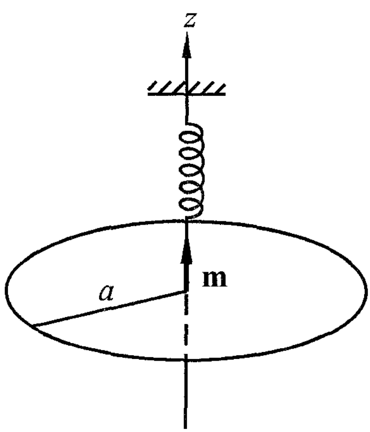
۷) استوانه‌ای به شعاع r با سرعت زاویه‌ای ω حول محور دوران خود می‌چرخد. این استوانه را در جریان هوایی با سرعت V قرار می‌دهیم. ذرات هوا در برخورد به استوانه پراکنده می‌شوند. نحوه‌ی پراکندگی به صورت زیر است:



فرض کنید ذره‌ای به یک نقطه‌ی دلخواه از استوانه برخورد می‌کند. در چارچوبی که این نقطه از استوانه ثابت است، سرعت عمودی ذره $\beta-$ برابر می شود ($0 \le \beta \le 1$) و سرعت مماسی آن α برابر می‌شود ($0 \le \alpha \le 1$). نیروی وارد بر استوانه درجهت سرعت و درجهت عمود بر سرعت را حساب کنید.

جرم استوانه m، طول آن l و چگالی هوا ρ است

۸) مطابق شکل یک دوقطبی مغناطیسی کوچک m داخل یک حلقه‌ی رسانا به شعاع a و مقاومت R قرار داده شده است. سمت‌گیری دوقطبی و محور تقارن حلقه، هر دو در راستای z است. این دوقطبی به یک فنر با ضریب سختی k آویزان است و با دامنه‌ی کوچک نسبت به شعاع حلقه نوسان می‌کند.



الف) اگر دوقطبی در فاصله‌ی z از مبدأ باشد، شار میدان مغناطیسی گذرنده از حلقه را حساب کنید.

(میدان مغناطیسی یک دوقطبی که سمت‌گیری آن در راستای z است، برابر است با:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}}{r^3}$$)

ب) با فرض کوچک بودن $\frac{z}{a}$ و تا اولین مرتبه‌ی ناصفر، میدان الکتریکی القایی داخل حلقه و جریان گذرنده از آن را حساب کنید. فرض کنید دوقطبی آنقدر کوچک است که نیروهای القایی تأثیر ناچیزی در حرکت نوسانی اولیه‌ی آن دارند.

پ) متوسط آهنگ اتلاف انرژی را در این سیستم حساب کنید و از آنجا دامنه‌ی نوسان را

برحسب زمان به دست آورید.

توجه: انتگرال‌های زیر ممکن است برای حل مسائل مفید باشند.

$$\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

پاسخ آزمون‌های

دوره‌ی تابستان

سال ۱۳۷۹

پاسخ آزمون اول

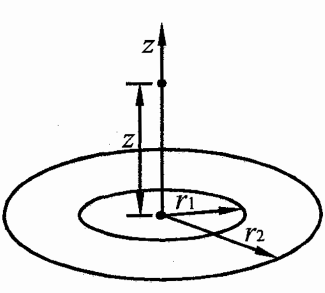
۱) تعـداد سـتارگانی کـه در فاصـلهی r تـا $r+\mathrm{d}r$ در حجـم $4\pi r^2\,\mathrm{d}r$ قـرار مـیگیرنـد برابـر با $n\times 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$ است. از طرف دیگر هر یـک از ایـن سـتارگان، زاویـهی فـضایی $\frac{\pi D^2/4}{r^2}$ را میپوشانند. بنابراین برای اینکه این ستارگان، تمام زاویهی فضایی 4π را پـر کننـد، یعنـی تمـام آسمان روشن دیده شود، باید تا فاصلهی R_f پیش برویم که R_f از رابطهی زیر به دست میآید:

$$4\pi=\int \mathrm{d}\Omega=\int_0^{R_\mathrm{f}}\frac{\pi D^2/4}{r^2}\times n\times 4\pi r^2\,\mathrm{d}r=n\,\pi^2 D^2\int_0^{R_\mathrm{f}}\mathrm{d}r=n\,\pi^2 D^2 R_\mathrm{f}$$

$$\therefore R_\mathrm{f}=\frac{4}{n\pi D^2}$$

دورترین فاصلهی ستارگان در R_f است که نور آنها در زمان $t_\mathrm{f}=\frac{R_\mathrm{f}}{c}$ به ما میرسـد. بنـابراین پس از زمان $t_\mathrm{f}=\frac{4}{n\pi c D^2}$ تمام آسمان را روشن خواهیم دید.

۲)



الـف) بـاری کـه در فاصـلهی r تـا $r+\mathrm{d}r$ اسـت برابـر با $\sigma(2\pi r\,\mathrm{d}r)$ است. بنابر تقارن، میدان در راستای عمود بـر محور z صفر اسـت. بنـابراین مؤلفـهی میـدان در راسـتای z میشود:

$$E_z=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\sigma(2\pi r\,\mathrm{d}r)}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+r^2\right)}\cdot\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}z\int_{r_1}^{r_2}\frac{r\,\mathrm{d}r}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sigma z}{2\varepsilon_o}\left[\frac{1}{\sqrt{z^2+r_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2+r_2^2}}\right]$$

ب) در حد $r_1 \to 0$ و r_2 محدود داریم:

$$E_z=\frac{\sigma\, z}{2\varepsilon_o}\left[\frac{1}{|z|}-\frac{1}{\sqrt{z^2+r_2^2}}\right]$$

در حد r_1 محدود و $r_2 \to \infty$ داریم:

$$E_z=\frac{\sigma\, z}{2\varepsilon_o\sqrt{z^2+r_1^2}}$$

در حد $r_1 \to 0$ و $r_2 \to \infty$ داریم:

$$E_z=\frac{\sigma\, z}{2\varepsilon_o|z|}$$

پ)

$$E_z=\frac{\sigma\, z}{2\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_1}\left(1+\frac{z^2}{r_1^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{r_2}\left(1+\frac{z^2}{r_2^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$E_z=\frac{\sigma\, z}{2\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_1}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{r_1^2}+\cdots\right)-\frac{1}{r_2}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{r_2^2}+\cdots\right)\right]$$

E_z تا مرتبه‌ی اول غیر صفرِ فاصله از صفحه‌ی قرص می‌شود:

$$E_z=\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)z$$

نیروی وارد به بار منفی q می‌شود:

$$F=qE_z=\frac{q\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)z$$

$$=m\ddot{z}$$

$$\therefore\ \ddot{z}-\frac{q\sigma}{2\varepsilon_o m}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)z=0$$

که در آن q منفی است. بنابراین بسامد نوسانات کوچک آن می‌شود:

$$\omega=\sqrt{\frac{-q\sigma}{2\varepsilon_0 m}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

۳)

الف) بعد کشش سطحی، τ، با توجه به تعریف‌اش می‌شود:

$$[\tau]=\frac{[E]}{[S]}=\frac{ML^2T^{-2}}{L^2}=MT^{-2}$$

که در آن E انرژی و S مساحت سطح است.

اندازه‌ی قطره‌ها، d، تابعی از τ، ρ (چگالی) و g (شتاب گرانش) است. پس کمیت $Q=\tau^{\alpha}d^{\beta}\rho^{\gamma}g^{\theta}$ را طوری تعیین می‌کنیم که بدون بعد شود.

$$[Q]=[\tau]^{\alpha}[d]^{\beta}[\rho]^{\gamma}[g]^{\theta}=1$$

$$\therefore M^{\alpha}T^{-2\alpha}L^{\beta}M^{\gamma}L^{-3\gamma}L^{\theta}T^{-2\theta}=1$$

بنابراین معادلات زیر برای توانها به دست می‌آید:

$$\begin{cases}\alpha+\gamma=0\\-2\alpha-2\theta=0\\\beta-3\gamma+\theta=0\end{cases}$$

از دو معادله‌ی اول داریم: $\gamma=\theta=-\alpha$ و از معادله‌ی آخر نیز $\beta=2\gamma=-2\alpha$. بنابراین تنها کمیت بدون بعد $Q=\left(\dfrac{\tau}{d^2\rho g}\right)^{\alpha}$ است و داریم:

$$d^2=K\frac{\tau}{\rho g}$$

اگر K را از مرتبه‌ی واحد بگیریم و قرار دهیم $\tau=0.07\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$، $\rho=10^3\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ و $g=10\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ابعاد قطرات آب تقریباً می‌شوند:

$$d\approx\sqrt{\frac{\tau}{\rho g}}=\sqrt{\frac{0.07}{10^3\times 10}}\approx 2.6\times 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

پاسخ آزمون دوم

۱)

الف) با توجه به داده‌های مسئله داریم:

$$\frac{T_E}{T_J}=\left(\frac{R_E}{R_J}\right)^{\frac{3}{2}}$$

که در آن اندیس E مربوط به زمین و اندیس J مربوط به مشتری است. بنابراین داریم:

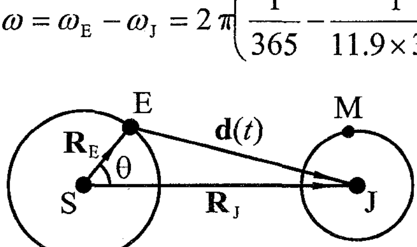
$$R_J=R_E\left(\frac{T_J}{T_E}\right)^{\frac{2}{3}}=779.8\times10^6\ \text{km}$$

ب) سرعت زاویه‌ای نسبی ωی زمین نسبت به دستگاه خورشید- مشتری نیز از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\omega=\omega_E-\omega_J=2\pi\left(\frac{1}{365}-\frac{1}{11.9\times365}\right)\approx0.0157\frac{\text{rad}}{\text{day}}$$

پ) با توجه به شکل (1) داریم:

$$\mathbf{d}(t)=\mathbf{R}_J-\mathbf{R}_E$$



شکل (1)

بنابراین اندازه‌ی $d(t)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$d(t)=(R_J{}^2+R_E{}^2-2R_ER_J\cos\omega t)^{\frac{1}{2}}\approx R_J\left(1-\frac{R_E}{R_J}\cos\omega t\right)=R_J-R_E\cos\omega t$$

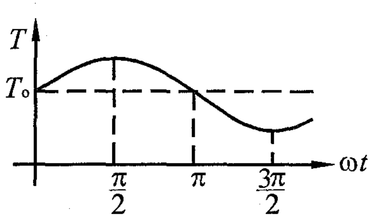
که در آن $\theta = \omega t$ است وجواب نهایی تا تقریب مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{R_E}{R_J}$ است. خطای این جواب از مرتبه‌ی $\left(\frac{R_E}{R_J}\right)^2 \approx 4\%$ است.

در دو رصد متوالی از طلوع قمر مشتری، اختلاف فاصله‌ی مشتری تا زمین می‌شود:

$$\Delta d(t) = d(t+T_o) - d(t) = R_E\left(\cos\omega t - \cos\omega(t+T_o)\right) \approx R_E \omega T_o \sin\omega t$$

در عبارت آخر از این استفاده شده است که چون $\omega T_o \approx 0.03$ کوچک است قرار داده‌ایم $\sin\omega T_o \approx \omega T_o$ و $\cos\omega T_o \approx 1$.

ت) تفاوت زمان تناوب رصد شده از قمر مشتری مربوط به اختلاف فاصله‌ای است که قمر از زمین پیدا می‌کند. این اختلاف فاصله تقریباً همان اختلاف فاصله‌ی مشتری تا زمین است. بنابراین داریم:



شکل (2)

$$T - T_o \approx \frac{\Delta d(t)}{c}$$

$$\therefore T = T_o + \frac{R_E \omega T_o \sin\omega t}{c}$$

که در آن c سرعت نور و به جای $\Delta d(t)$ از عبارت به دست آمده در قسمت (پ) استفاده شده است. نمودار T برحسب ωt (مکان زمین) در شکل (2) ترسیم شده است.

وقتی پریود بیشینه است که $\omega t = \frac{\pi}{2}$ باشد و داریم: $T_{max} = T_o + \frac{R_E \omega T_o}{c}$

وقتی پریود کمینه است که $\omega t = \frac{3\pi}{2}$ باشد و داریم: $T_{min} = T_o - \frac{R_E \omega T_o}{c}$

در حالت پریود واقعی، $\omega t = 0, \pi$ است.

ث) با توجه به پریود بیشینه‌ی گفته شده که $(T_o + 15)\,s$ است، داریم:

$$T_{max} = T_o + \frac{R_E \omega T_o}{c} = T_o + 15$$

و از آنجا داریم:

$$\frac{R_E \omega T_o}{c} = 15$$

$$\therefore c=\frac{(149.6\times10^{6}\,\text{km})\left(\dfrac{0.0157}{24\times3600}\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(152896\,\text{s})}{15}\approx 2.77\times10^{5}\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

۲) فرض کنید بار روی یک صفحه‌ی خازن q است. وقتی دیسک به این صفحه می‌چسبد، بار روی آن برابر است با:

$$q'=\frac{q}{A}a=\sigma a$$

حال نیرویی که به دیسک وارد می‌شود (اگر از اثر دیسک روی صفحات صرف‌نظر کنیم.) برابر است با:

$$F=Eq'=\frac{q}{\varepsilon_0 A}\cdot\frac{q}{A}a=\frac{q^2 a}{\varepsilon_0 A^2}$$

که در آن از $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ استفاده شده است. شتاب دیسک، a'، می‌شود:

$$a'=\frac{F}{m}=\frac{aq^2}{m\varepsilon_0 A^2}$$

و زمان رفت دیسک از یک صفحه به صفحه‌ی دیگر برابر است با:

$$t=\sqrt{\frac{2h}{a'}}=\sqrt{\frac{2hm\varepsilon_0 A^2}{aq^2}}=\frac{A}{q}\sqrt{\frac{2hm\varepsilon_0}{a}}$$

در این مدت، بار خازن به اندازه‌ی q' کم شده است. بنابراین داریم:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-\frac{q'}{t_0}=\frac{-\dfrac{q}{A}a}{\dfrac{A}{q}\sqrt{\dfrac{2hm\varepsilon_0}{a}}}=-\frac{q^2}{A^2}\cdot\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2hm\varepsilon_0}}$$

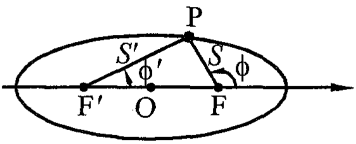
$$\therefore\quad\int_Q^{q(t)}\frac{\mathrm{d}q}{q^2}=-\frac{a\sqrt{a}}{A^2\sqrt{2hm\varepsilon_0}}t\Rightarrow\frac{1}{Q}-\frac{1}{q(t)}=-\frac{a\sqrt{a}}{A^2\sqrt{2hm\varepsilon_0}}t\Rightarrow q(t)=\frac{1}{\dfrac{1}{Q}+\alpha t}$$

$$\therefore q(t)=\frac{Q}{1+\alpha Qt}$$

که در آن $\alpha = \dfrac{a\sqrt{a}}{A^2\sqrt{2hm\varepsilon_0}}$ است.

۳)

الف) زوایای ϕ و ϕ' و فواصل s و s' مطابق شکل است.



از تعریف بیضی داریم:

$$s + s' = 2a \qquad (1)$$

و در مثلث FPF′ داریم:

$$\frac{s}{\sin\phi'} = \frac{s'}{\sin(\pi-\phi)} = \frac{s'}{\sin\phi} \qquad (2)$$

از دو رابطه‌ی (1) و (2) به دست می‌آوریم:

$$\sin\phi' = \sin\phi\frac{s}{2a-s} = \sin\phi\frac{1}{\dfrac{2a}{s}-1}$$

با جایگزین‌کردن $s = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\phi}$ در رابطه‌ی اخیر داریم:

$$\sin\phi' = \sin\phi\frac{1-e^2}{2(1+e\cos\phi)-(1-e^2)} = \sin\phi(1-e^2)(1+2e\cos\phi+e^2)^{-1}$$

که تا مرتبه‌ی اول نسبت به e به دست می‌آوریم:

$$\sin\phi' \approx \sin\phi(1-2e\cos\phi) \qquad (3)$$

از طرفی می‌توان ϕ' را برحسب توانهای مختلف e به صورت زیر نوشت:

$$\phi' = \phi_0 + e\phi_1 + \cdots$$

چون در حالت $e=0$، ϕ' همان ϕ می‌شود، پس $\phi_0 = \phi$ است. با حفظ‌کردن ϕ' تا مرتبه‌ی اول نسبت به e داریم:

$$\sin\phi' = \sin(\phi+e\phi_1) = \sin\phi\cos(e\phi_1) + \cos\phi\sin(e\phi_1) \approx \sin\phi + e\phi_1\cos\phi \qquad (4)$$

با مقایسه‌ی (3) و (4) داریم:

$$\phi_1 = -2\sin\phi$$

بنابراین ϕ' به صورت زیر درمی‌آید:

$$\phi' = \phi + e(-2\sin\phi)$$

ب) با مشتق‌گیری از ϕ' به دست آمده در قسمت (الف) داریم:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}' &= \dot{\phi} - 2e\dot{\phi}\cos\phi \\ &= \dot{\phi}(1-2e\cos\phi)\end{aligned}$$

با درنظرگرفتن $s^2\dot{\phi} = l$ رابطه‌ی اخیر می‌شود:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}' &= \frac{l}{s^2}(1-2e\cos\phi) \\ &= \frac{l(1+e\cos\phi)^2}{a^2(1-e^2)^2}(1-2e\cos\phi)\end{aligned}$$

با حفظ‌کردن جملات تا رتبه‌ی اول نسبت به e به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}' &\approx \frac{l}{a^2}(1+2e\cos\phi)(1-2e\cos\phi) \\ &\approx \frac{l}{a^2}(1-4e^2\cos^2\phi) \\ &\approx \frac{l}{a^2}\end{aligned}$$

پاسخ آزمون سوم

۱)

الف) اگر برد ذرات α برابر $5.50\,\mathrm{cm}$ باشد، انرژی آنها برابر خواهد بود با:

$$E=\left(\frac{R_\alpha}{0.318}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{5.50}{0.318}\right)^{\frac{2}{3}}=6.69\,\mathrm{MeV}$$

بنابراین هر ذره‌ی α تعداد $\frac{6.69\times10^6}{35}=1.9\times10^5$ یون-الکترون آزاد می‌کند. بنابراین ولتاژ تولید شده توسط هر ذره‌ی α می‌شود:

$$\Delta V=\frac{N_{\mathrm{I-e}}\cdot e}{c}=\frac{1.9\times10^5\times1.6\times10^{-19}}{4.5\times10^{-11}}=0.68\,\mathrm{mV}$$

ب) جریانی که تولید می‌شود با توجه به مقدار اکتیویته و کارآیی آشکارساز برابر $0.10A(N_{\mathrm{I-e}}e)$ است. بنابراین:

$$I=0.1A\left(1.9\times10^5\times1.6\times10^{-19}\right)$$

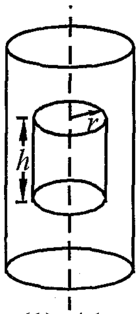
و چون کمترین جریان قابل آشکارسازی $10^{-12}\,\mathrm{A}$ است، اکتیویته‌ی مینیمم می‌شود:

$$A_{\min}=\frac{10^{-12}}{1.9\times1.6\times10^{-15}}=330\ \text{ثانیه/واپاشی}\ 330=\frac{330}{3.7\times10^{10}}\ \text{کوری}=8.92\times10^{-9}\ \text{کوری}$$

۲)

الف) میدان الکتریکی یک استوانه‌ی بی‌نهایت طویل با چگالی حجمی ρ را می‌توان از قانون گاؤس به دست آورد.

$$\oint \mathbf{E}.\mathrm{d}\mathbf{S}=\frac{q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$$

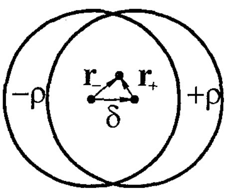


شکل (1)

$$E.2\pi rh = \frac{\pi r^2 h\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \mathbf{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\mathbf{r}$$

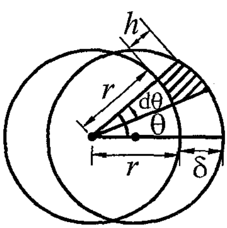
حال می‌توان میدان الکتریکی در داخل دو استوانه را که مرکزشان به اندازه‌ی $\boldsymbol{\delta}$ از هم فاصله دارد، با استفاده از اصل برهم نهی به دست آورد (شکل (2)).



شکل (2)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\mathbf{r}_+ - \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\mathbf{r}_- = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{\delta}$$

ب) بار حجمی قسمت هاشور خورده در شکل (3) را به صورت چگالی سطحی درنظر می‌گیریم. مساحت قاعده‌ی قسمت هاشور خورده را $\mathrm{d}S$ می‌گیریم. اگر چگالی سطحی را σ بنامیم، داریم:



شکل (3)

$$\sigma\,\mathrm{d}S = \rho h\,\mathrm{d}S$$

$$\therefore \sigma = \rho h.$$

اگر $\delta << r$ باشد، می‌توان دید که $h \approx \delta\cos\theta$ است. بنابراین داریم:

$$\sigma = \rho\delta\cos\theta.$$

پ) در مرحله‌ی اول اگر $\mathbf{E}$ همان $\mathbf{E}_0$ باشد، داریم: $\mathbf{P}_1 = \varepsilon_0(K-1)\mathbf{E}_0$ و از روی آن چگالی سطحی می‌شود:

$$\sigma_1 = \mathbf{P}_1\cdot\hat{\mathrm{r}} = \varepsilon_0(K-1)E_0\cos\theta$$

که در آن $\hat{\mathrm{r}}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح دی‌الکتریک است.

حال باید میدان حاصل از σ_1 را پیدا کنیم. چون σ_1 متناسب با $\cos\theta$ است، با استفاده از قسمت (الف) و (ب) میدان حاصل از آن در داخل استوانه برابر $-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{\delta}$ است، به طوری که $\rho\delta = \varepsilon_0(K-1)E_0$ است. با توجه به هم‌جهت بودن $\mathbf{E}_0$ و $\boldsymbol{\delta}$ میدان حاصل از چگالی

سطحی σ_1 به صورت $\mathbf{E}_1 = -\frac{\varepsilon_\circ (K-1)}{2\varepsilon_\circ}\mathbf{E}_\circ$ درمی‌آید. بنابراین با $\mathbf{E}_1 = -\frac{K-1}{2}\mathbf{E}_\circ$ به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{P}_2 = -\frac{K-1}{2}\mathbf{E}_\circ \varepsilon_\circ (K-1) = -\frac{\varepsilon_\circ}{2}(K-1)^2\,\mathbf{E}_\circ$$

و از آنجا $\sigma_2 = \mathbf{P}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\varepsilon_\circ}{2}(K-1)^2 E_\circ \cos\theta$ به دست می‌آید. باز هم σ_2 تابع $\cos\theta$ است، بنابراین همان عملیات قبلی تکرار می‌شود. جدول زیر را ببینید.

	$\mathbf{E}$	$\mathbf{P}$	σ
مرحله‌ی اول	$\mathbf{E}_\circ$	$\varepsilon_\circ (K-1)\mathbf{E}_\circ$	$\varepsilon_\circ (K-1)E_\circ \cos\theta$
مرحله‌ی دوم	$-\frac{K-1}{2}\mathbf{E}_\circ$	$-\frac{\varepsilon_\circ}{2}(K-1)^2\,\mathbf{E}_\circ$	$-\frac{\varepsilon_\circ}{2}(K-1)^2 E_\circ \cos\theta$
مرحله‌ی سوم	$\frac{(K-1)^2}{4}\mathbf{E}_\circ$	$\frac{\varepsilon_\circ}{4}(K-1)^3\,\mathbf{E}_\circ$	$\frac{\varepsilon_\circ}{4}(K-1)^3 E_\circ \cos\theta$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

میدان الکتریکی، قطبش و بار سطحی نهایی با استفاده از اصل برهم نهی مجموع $\mathbf{E}$های مختلف که در جدول آمده‌اند، به دست می‌آید.

$$\mathbf{E}_{\text{tot.}} = \mathbf{E}_\circ \left[1 - \frac{K-1}{2} + \left(\frac{K-1}{2}\right)^2 - \cdots\right]$$

$$\mathbf{P}_{\text{tot.}} = \varepsilon_\circ (K-1)\mathbf{E}_\circ \left[1 - \frac{K-1}{2} + \left(\frac{K-1}{2}\right)^2 - \cdots\right]$$

$$\sigma_{\text{t0t.}} = \varepsilon_\circ (K-1)E_\circ \cos\theta \left[1 - \frac{K-1}{2} + \left(\frac{K-1}{2}\right)^2 - \cdots\right]$$

مجموع جملات داخل کروشه‌های بالا، مجموع جملات یک تصاعد هندسی با بی‌نهایت جمله و قدر نسبت $-\frac{K-1}{2}$ است. بنابراین مجموع این جملات برابر $\frac{1}{1-\left(-\frac{K-1}{2}\right)}$ است و از این رو

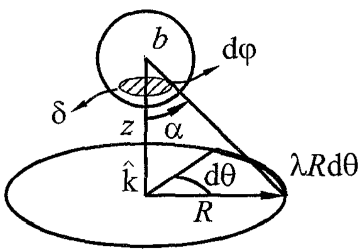
داریم:

$$\mathbf{E}_{\text{tot.}}=\frac{2\mathbf{E}_{\text{o}}}{K+1}$$

$$\mathbf{P}_{\text{tot.}}=\frac{2\varepsilon_{\text{o}}\left(K-1\right)\mathbf{E}_{\text{o}}}{K+1}=\varepsilon_{\text{o}}\left(K-1\right)\mathbf{E}_{\text{tot.}}$$

$$\sigma=\frac{2\varepsilon_{\text{o}}\left(K-1\right)E_{\text{o}}\cos\theta}{K+1}=\mathbf{P}_{\text{tot.}}\cdot\hat{\text{r}}$$

۳)



الف) بار تصویری روی حلقه‌ای به شعاع δ و در مرکز کره قرار می‌گیرد. اگر بار تصویری ناشی از بار $\lambda R\,\mathrm{d}\theta$ روی حلقه‌ی به شعاع δ و در قطاع $\delta\,\mathrm{d}\phi$ را با $\mathrm{d}q'$ نمایش دهیم، مقدار آن با توجه به فرضیات مسئله می‌شود:

$$\mathrm{d}q'=-\frac{r}{\sqrt{R^2+z^2}}\lambda R\,\mathrm{d}\theta$$

که در آن z فاصله‌ی مرکز حلقه از مرکز کره است. با انتگرال‌گیری روی تمام زوایای θ داریم:

$$q'=-\frac{2\pi\lambda Rr}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

چگالی بار تصویر روی حلقه‌ی به شعاع δ برابر $\lambda'=\frac{q'}{2\pi\delta}=-\lambda\frac{\sqrt{R^2+z^2}}{r}$ است. بار روی مرکز هم برابر $\frac{2\pi\lambda Rr}{\sqrt{R^2+z^2}}$ است.

ب) اگر فرض کنیم $R>>r$ باشد، می‌توان بارهای تصویری داخل کره را به صورت یک دوقطبی فرض کرد که مؤلفه‌های افقی آن یکدیگر را حذف می‌کنند و تنها مؤلفه‌ی قائم آن وجود دارد. بنابراین داریم:

$$\mathbf{P}=q'b\cos\alpha\,\hat{\text{k}}=\frac{2\pi\lambda Rr}{\sqrt{R^2+z^2}}\cdot\frac{r^2}{\sqrt{R^2+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\hat{\text{k}}=\frac{2\pi\lambda Rr^3z}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{\text{k}}$$

تغییر انرژی پتانسیل برابر است با:

$$U=\frac{1}{2}\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_{\lambda}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi\lambda R r^3 z}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathrm{k}}\cdot\frac{2\pi\lambda R z}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\lambda^2R^2r^3z^2}{\varepsilon_0\left(R^2+z^2\right)^3}$$

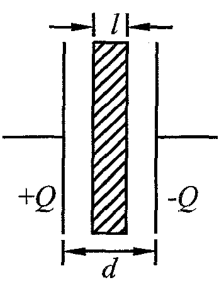
در حالت $R >> z$، داریم:

$$U=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\lambda^2r^3}{\varepsilon_0R^4}z^2$$

بنابراین با $U=\frac{1}{2}kz^2$ داریم: $k=\frac{\pi\lambda^2r^3}{\varepsilon_0R^4}$ و فرکانس نوسانات کوچک می‌شود:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{\pi\lambda^2r^3}{m\varepsilon_0R^4}}$$

۴)



الـف) میـدان بـین صـفحات خـازن و خـارج از دی‌الکتریـک برابـر $E_0=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{A\varepsilon_0}$ اسـت و میـدان داخـل دی‌الکتریـک برابر $E_1=\frac{\sigma}{K\varepsilon_0}=\frac{Q}{KA\varepsilon_0}$ است. بنابراین داریم:

$$\Delta E=E_0-E_1=\frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{K}\right)=\frac{\sigma'}{\varepsilon_0}\Rightarrow\sigma'=\sigma\left(1-\frac{1}{K}\right)=\frac{Q}{A}\left(1-\frac{1}{K}\right)$$

ب) نیروی وارد بر واحد سطح بر سمت راست دی‌الکتریک عبارت است از:

$$f_1=\frac{\sigma'^2}{2\varepsilon_0}-\sigma'E_0=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{K}\right)^2-\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{K}\right)$$

$$\therefore f_1=-\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{K^2}\right)$$

بنـابراین نیـروی وارد بـر کـل سـطح سـمت راسـت دی‌الکتریـک برابر $F_1=f_1A=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0A}\left(1-\frac{1}{K^2}\right)$ می‌شود.

نیروی وارد بر سطح سمت چپ دی‌الکتریک نیز همین مقدار و در خلاف جهت است.

پ) با استفاده از تعریف داریم:

$$\delta l=\frac{F_1 l}{YA}=\frac{Q^2 l}{2\varepsilon_o A^2 Y}\left(1-\frac{1}{K^2}\right)$$

ت) اختلاف پتانسیل دو صفحه‌ی خازن می‌شود:

$$V=E_o(d-l-\delta l)+E_1(l+\delta l)$$

$$\therefore V=\frac{Q}{A\varepsilon_o}(d-l-\delta l)+\frac{Q}{kA\varepsilon_o}(l+\delta l)\Rightarrow V=\frac{Q}{A\varepsilon_o}\left[d-l-\delta l+\frac{l+\delta l}{K}\right]$$

ظرفیت خازن هم می‌شود:

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{A\varepsilon_o}{d-l-\delta l+\frac{l+\delta l}{K}}=\frac{A\varepsilon_o}{d-l+\frac{l}{K}+\delta l\left(\frac{1}{K}-1\right)}$$

C تا مرتبه‌ی اول نسبت به δl می‌شود:

$$C=\frac{A\varepsilon_o}{d-l+\frac{l}{K}}\left[1-\frac{\delta l\left(\frac{1}{K}-1\right)}{d-l+\frac{l}{K}}\right]$$

ث) انرژی کل الکتریکی ذخیره شده عبارت است از:

$$W_E=\int_{V_1}\frac{1}{2}\varepsilon_o E_o{}^2\,\mathrm{d}V+\int_{V_2}\frac{1}{2}\varepsilon_o K E_1{}^2\,\mathrm{d}V$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_o\left(\frac{Q}{A\varepsilon_o}\right)^2 A\left[d-l-\delta l\right]+\frac{1}{2}\varepsilon_o K\left(\frac{Q}{KA\varepsilon_o}\right)^2 A\left[l+\delta l\right]$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_o\frac{Q^2}{A\varepsilon_o{}^2}\left[d-l-\frac{Q^2 l}{2\varepsilon_o A^2 Y}\left(1-\frac{1}{K^2}\right)\right]+$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_o K\left(\frac{Q}{KA\varepsilon_o}\right)^2 A\left[l+\frac{Q^2 l}{2\varepsilon_o A^2 Y}\left(1-\frac{1}{K^2}\right)\right]$$

انرژی مکانیکی ذخیره شده نیز عبارت است از:

$$W_m=\frac{1}{2}k_1\delta l^2=\frac{1}{2}\left(\frac{YA}{l}\right)\delta l^2=\frac{YA}{2l}\cdot\frac{Q^4 l^2}{4\varepsilon_o{}^2 A^4 Y^2}\left(1-\frac{1}{K^2}\right)^2$$

که در آن از $k_1 = \dfrac{YA}{l}$ استفاده شده است.

انرژی کل ذخیره شده نیز از $\int V\,\mathrm{d}q$ به دست می‌آید.

$$W_{\text{tot.}} = \int_0^Q V\ \mathrm{d}q = \frac{1}{A\varepsilon_\text{o}} \int_0^Q q\left[d - l + \frac{l}{K} + \left(\frac{1}{K} - 1\right)\frac{q^2 l}{2\varepsilon_\text{o} A^2 Y}\left(1 - \frac{1}{K^2}\right)\right]\mathrm{d}q$$

$$\therefore W_{\text{tot.}} = \frac{\left(d - l + \dfrac{l}{K}\right)Q^2}{2A\varepsilon_\text{o}} + \frac{l\left(\dfrac{1}{K} - 1\right)\left(1 - \dfrac{1}{K^2}\right)Q^4}{8\varepsilon_\text{o}{}^2 A^3 Y}$$

می‌توان دید که $W_{\text{tot.}} = W_\text{E} + W_\text{m}$ است. زیرا کاری که روی خازن انجام می‌دهیم طبق قانون بقای انرژی به انرژی مکانیکی و الکتریکی خازن تبدیل می‌شود.

۵) معادله‌ی حرکت ذره وقتی به سمت بالا می‌رود به صورت زیر است.

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - m\alpha v^2$$

$$\therefore \dot{v} = -g - \alpha v^2 \qquad (1)$$

اگر v را تا مرتبه‌ی اول نسبت به α بنویسیم، داریم:

$$v = v_{(\text{o})} + \alpha v_{(1)}$$

با جایگزین‌کردن رابطه‌ی اخیر در معادله‌ی (1) به دست می‌آوریم:

$$\dot{v}_{(\text{o})} + \alpha\dot{v}_{(1)} = -g - \alpha\left(v^2{}_{(\text{o})} + \alpha^2 v^2{}_{(1)} + 2\alpha v_{(\text{o})} v_{(1)}\right)$$

با برابر قراردادن رتبه‌های مختلف در طرفین رابطه‌ی اخیر داریم:

$$\begin{cases} \dot{v}_{(\text{o})} = -g \\ \dot{v}_{(1)} = -v^2{}_{(\text{o})} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{(\text{o})} = v_\text{o} - gt \\ v_{(1)} = -v_\text{o}{}^2 t - \dfrac{g^2}{3}t^3 + v_\text{o} g t^2 \end{cases}$$

$$\therefore v = \left(v_\text{o} - gt\right) - \alpha\left(v_\text{o}{}^2 t + \frac{g^2}{3}t^3 - v_\text{o} g t^2\right)$$

با یک‌بار انتگرال‌گیری از معادله‌ی بالا، $y(t)$ به دست می‌آید.

$$y(t) = v_\text{o} t - \frac{1}{2}gt^2 - \alpha\left(\frac{v_\text{o}{}^2}{2}t^2 + \frac{g^2}{12}t^4 - v_\text{o} g\frac{t^3}{3}\right) \qquad (2)$$

برای پیداکردن زمان رسیدن ذره به اوج، t_f، v را صفر می‌گذاریم.

$$0=\left(v_{\mathrm{o}}-gt_{\mathrm{f}}\right)-\alpha\left(v_{\mathrm{o}}^{2}t_{\mathrm{f}}+\frac{g^{2}}{3}t_{\mathrm{f}}^{3}-v_{\mathrm{o}}gt_{\mathrm{f}}^{2}\right)\qquad(3)$$

چون t_{f} را تا رتبه‌ی اول نسبت به α می‌خواهیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$t_{\mathrm{f}}=t_{(\mathrm{o})}+\alpha t_{(1)}$$

با جایگزین‌کردن رابطه‌ی اخیر در معادله‌ی (3) داریم:

$$0=\left[v_{\mathrm{o}}-g\left(t_{(\mathrm{o})}+\alpha t_{(1)}\right)\right]-\alpha\left[v_{\mathrm{o}}^{2}\left(t_{(\mathrm{o})}+\alpha t_{(1)}\right)+\frac{g^{2}}{3}\left(t_{(\mathrm{o})}+\alpha t_{(1)}\right)^{3}-v_{\mathrm{o}}g\left(t_{(\mathrm{o})}+\alpha t_{(1)}\right)^{2}\right]$$

ضریب کروشه‌ی دوم در معادله‌ی بالا α است. بنابراین در جملات داخل کروشه تنها جملاتی را حفظ می‌کنیم که از مرتبه‌ی صفر نسبت به α باشند.

$$0=\left[v_{\mathrm{o}}-g\left(t_{(\mathrm{o})}+\alpha t_{(1)}\right)\right]-\alpha\left[v_{\mathrm{o}}^{2}t_{(\mathrm{o})}+\frac{g^{2}}{3}t^{3}_{(\mathrm{o})}-v_{\mathrm{o}}gt^{2}_{(\mathrm{o})}\right]$$

$$\therefore\begin{cases}v_{\mathrm{o}}-gt_{(\mathrm{o})}=0\\-gt_{(1)}=v_{\mathrm{o}}^{2}t_{(\mathrm{o})}+\frac{1}{3}g^{2}t^{3}_{(\mathrm{o})}-v_{\mathrm{o}}gt^{2}_{(\mathrm{o})}\end{cases}$$

از معادله‌ی اول داریم: $t_{(\mathrm{o})}=\frac{v_{\mathrm{o}}}{g}$. با جایگذاری این $t_{(\mathrm{o})}$ در معادله‌ی دوم رابطه‌ی بالا به دست می‌آوریم:

$$-gt_{(1)}=v_{\mathrm{o}}^{2}\frac{v_{\mathrm{o}}}{g}+\frac{1}{3}g^{2}\frac{v_{\mathrm{o}}^{3}}{g^{3}}-v_{\mathrm{o}}g\frac{v_{\mathrm{o}}^{2}}{g^{2}}$$

$$\therefore t_{(1)}=-\frac{1}{3}\frac{v_{\mathrm{o}}^{3}}{g^{2}}$$

بنابراین t_{f} می‌شود:

$$t_{\mathrm{f}}=\frac{v_{\mathrm{o}}}{g}+\alpha\left(-\frac{1}{3}\frac{v_{\mathrm{o}}^{3}}{g^{2}}\right)$$

$$\therefore t_{\mathrm{f}}=\frac{v_{\mathrm{o}}}{g}\left(1-\frac{\alpha}{3}\frac{v_{\mathrm{o}}^{2}}{g}\right)\Rightarrow t_{\mathrm{f}}=t_{\mathrm{o}}\left(1-\frac{\alpha}{3}gt_{\mathrm{o}}^{2}\right)$$

ارتفاع اوج هم از معادله‌ی (2) به دست می‌آید. با قراردادن $t=t_{\mathrm{f}}$ داریم:

$$H = v_{\circ}t_{\mathrm{f}} - \frac{1}{2}gt_{\mathrm{f}}^{\;2} - \alpha\left[\frac{v_{\circ}^{\;2}}{2}t_{\mathrm{f}}^{\;2} + \frac{g^2}{12}t_{\mathrm{f}}^{\;4} - \frac{v_{\circ}g}{3}t_{\mathrm{f}}^{\;3}\right]$$

اگر قرار دهیم $t_{\mathrm{f}} = t_{\circ} - \frac{\alpha}{3}gt_{\circ}^{\;3}$ و $H = H_{(\circ)} + \alpha H_{(1)}$، به دست می‌آوریم:

$$H_{(\circ)} + \alpha H_{(1)} = v_{\circ}\left(t_{\circ} - \frac{\alpha}{3}gt_{\circ}^{\;3}\right) - \frac{g}{2}\left(t_{\circ}^{\;2} - \frac{2}{3}\alpha g t_{\circ}^{\;4}\right) - \alpha\left[\frac{v_{\circ}^{\;2}}{2}t_{\circ}^{\;2} + \frac{g^2}{12}t_{\circ}^{\;4} - \frac{v_{\circ}g}{3}t_{\circ}^{\;3}\right]$$

که در آن تنها جملات تا رتبه‌ی اول α حفظ شده است. با قراردادن $t_{\circ} = \frac{v_{\circ}}{g}$ داریم:

$$H_{(\circ)} + \alpha H_{(1)} = v_{\circ}\left(\frac{v_{\circ}}{g} - \frac{\alpha}{3}\frac{v_{\circ}^{\;2}}{g^2}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{v_{\circ}^{\;2}}{g^2} - \frac{2\alpha}{3}\frac{v_{\circ}^{\;4}}{g^3}\right) - \alpha\left[\frac{v_{\circ}^{\;4}}{2g^2} + \frac{v_{\circ}^{\;4}}{12g^2} - \frac{v_{\circ}^{\;4}}{3g^2}\right]$$

$$\therefore \begin{cases} H_{(\circ)} = \dfrac{v_{\circ}^{\;2}}{g} - \dfrac{1}{2}\dfrac{v_{\circ}^{\;2}}{g} = \dfrac{v_{\circ}^{\;2}}{2g} \\ H_{(1)} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{v_{\circ}^{\;4}}{g^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{v_{\circ}^{\;4}}{g^2} - \dfrac{1}{4}\dfrac{v_{\circ}^{\;4}}{g^2} = -\dfrac{1}{4}\dfrac{v_{\circ}^{\;4}}{g^2} \end{cases}$$

بنابراین ارتفاع اوج ذره تا مرتبه‌ی اول نسبت به α می‌شود:

$$H = H_{(\circ)} + \alpha H_{(1)} = \frac{v_{\circ}^{\;2}}{2g} - \alpha\frac{v_{\circ}^{\;4}}{4g^2} = \frac{v_{\circ}^{\;2}}{2g}\left(1 - \alpha\frac{v_{\circ}^{\;2}}{2g}\right)$$

برای به دست آوردن زمان برگشتن ذره به محل پرتاب، معادله‌ی حرکت را می‌نویسیم.

$$\dot{v} = g - \alpha v^2$$

با قراردادن $v = v_{(\circ)} + \alpha v_{(1)}$ داریم:

$$\dot{v}_{(\circ)} + \alpha\dot{v}_{(1)} = g - \alpha\left(v^2_{(\circ)} + \alpha^2 v^2_{(1)} + 2\alpha v_{(\circ)}v_{(1)}\right)$$

$$\therefore \begin{cases} \dot{v}_{(\circ)} = +g \Rightarrow v_{(\circ)} = gt \\ \dot{v}_{(1)} = -v^2_{(\circ)} = -g^2t^2 \Rightarrow v_{(1)} = -g^2\dfrac{t^3}{3} \end{cases} \Rightarrow v(t) = gt - \alpha g^2\frac{t^3}{3}$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی به دست آمده داریم:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{\alpha}{12}g^2t^4$$

که در آن $t = 0$ زمانی است که ذره در مبداء قرار دارد. زمان برگشتن، T_r، با قراردادن $y(T_r) = +H = +\frac{v_o^2}{2g}\left(1-\alpha\frac{v_o^2}{2g}\right)$ به دست می‌آید. T_r هم به صورت $T_{r(o)} + \alpha T_{r(1)}$ درنظر می‌گیریم.

$$+\frac{v_o^2}{2g}\left(1-\alpha\frac{v_o^2}{2g}\right) = \frac{1}{2}g\left(T^2_{r(o)} + 2\alpha T_{r(o)}T_{r(1)}\right) - \frac{\alpha}{12}g^2\left(T^4_{r(o)}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}gT^2_{r(o)} = \frac{v_o^2}{2g} \quad \Rightarrow T_{r(o)} = \frac{v_o}{g} \\ -\frac{v_o^4}{4g^2} = gT_{r(o)}T_{r(1)} - \frac{g^2}{12}T^4_{r(o)} \Rightarrow g\frac{v_o}{g}T_{r(1)} = \frac{g^2}{12}T^4_{r(o)} - \frac{v_o^4}{4g^2} \end{cases} \Rightarrow T_{r(1)} = -\frac{1}{6}\frac{v_o^3}{g^2}$$

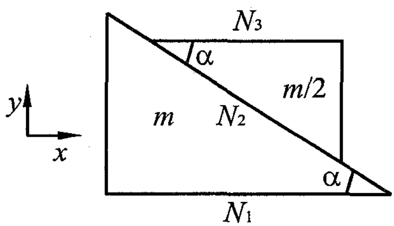
بنابراین $T_r = T_{r(o)} + \alpha T_{r(1)} = \frac{v_o}{g} - \frac{\alpha}{6}\frac{v_o^3}{g^2}$ و بنابراین زمان برگشت از زمان پرتاب ذره برابر است با:

$$t = T_r + t_f = \frac{2v_o}{g} - \frac{1}{2}\alpha\frac{v_o^3}{g^2}$$

پاسخ آزمون چهارم

۱)

الف) مطابق شکل عکس‌العمل سطوح نسبت به هم را با N_1، N_2 و N_3 نشان می‌دهیم. معادلات حرکت مربوط به جسم با جرم m عبارت است از:



$$\begin{cases} -N_2 \sin\alpha = m\ddot{x}_1 \\ N_1 - mg - N_2\cos\alpha = m\ddot{y}_1 \end{cases}$$

معادلات حرکت مربوط به جسم با جرم $\frac{m}{2}$ عبارت است از:

$$\begin{cases} N_2 \sin\alpha = \frac{m}{2}\ddot{x}_2 \\ N_2\cos\alpha - \frac{m}{2}g - N_3 = \frac{m}{2}\ddot{y}_2 \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم $\ddot{y}_1 = 0$ و $-\operatorname{tg}\alpha = \frac{\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1}{\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1}$. بنابراین شش معادله با هفت مجهول N_1، N_2، N_3، $\ddot{x}_1$، $\ddot{y}_1$، $\ddot{x}_2$ و $\ddot{y}_2$ داریم. بنابراین برای حل مسئله به یک معادله‌ی دیگر نیاز داریم.

ب) از آنجایی که این مجموعه مشابه مجموعه‌ی کل سطوح شیبدار است، می‌بینیم که تنها اگر شتاب گرانش و جرم‌ها را $\frac{1}{4}$ کنیم، همان مجموعه معادلات قبلی به دست می‌آید.

پ) حال چون نیروی عکس‌العمل‌ها نسبت مستقیم با جرم و شتاب گرانش دارند، بنابراین نسبت $\frac{N_3}{N_1}$ را می‌توان به صورت $\frac{1}{4}\frac{g+\ddot{y}_2}{g}$ نوشت.

ت) بنابراین از معادلات قسمت (الف) به دست می‌آوریم:

$$N_2 = -\frac{m}{\sin\alpha}\ddot{x}_1$$

$$N_1 = mg - m\ddot{x}_1 \text{cotan}\alpha$$

$$\ddot{x}_2 = -2\ddot{x}_1$$

$$N_3 = -m\ddot{x}_1 \text{cotan}\alpha - \frac{m}{2}g - \frac{m}{2}3\ddot{x}_1 \tan\alpha$$

$$\ddot{y}_2 = 3\ddot{x}_1 \tan\alpha$$

اگر این مقادیر را در معادله‌ای که در قسمت (پ) به دست آوردیم، قرار دهیم، خواهیم داشت:

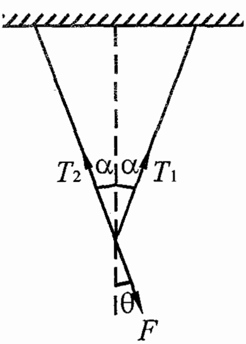
$$\frac{N_3}{N_1} = \frac{1}{4}\frac{g+\ddot{y}_2}{g}$$

$$-4mg\ddot{x}_1 \text{cotan}\alpha - 2mg^2 - 6mg\ddot{x}_1 \tan\alpha = m\left(g - \ddot{x}_1 \text{cotan}\alpha\right)\left(g + 3\ddot{x}_1 \tan\alpha\right)$$

$$\ddot{x}_1^2 - \ddot{x}_1 g\left(3\tan\alpha + \text{cotan}\alpha\right) - g^2 = 0$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{g}{2}\left[3\tan\alpha + \text{cotan}\alpha \pm \sqrt{\left(3\tan\alpha + \text{cotan}\alpha\right)^2 + 4}\right]$$

۲) مطابق شکل داریم:

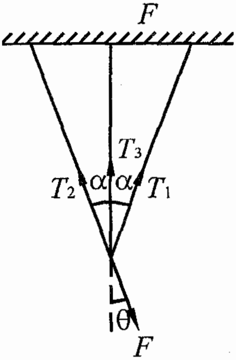


$$\begin{cases} F\cos\theta = \left(T_1 + T_2\right)\cos\alpha \\ F\sin\theta = \left(T_2 - T_1\right)\sin\alpha \end{cases}$$

$$\therefore T_2 = \frac{F}{2}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} + \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right) = F\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin 2\alpha}$$

$$T_1 = \frac{F}{2}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} - \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right) = F\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin 2\alpha}$$

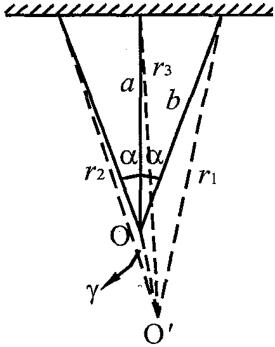
ب) از روی شکل داریم:



$$\begin{cases} T_3 + \left(T_1 + T_2\right)\cos\alpha = F\cos\theta \\ \left(T_2 - T_1\right)\sin\alpha = F\sin\theta \end{cases}$$

که روشن است که سه مجهول T_1، T_2 و T_3 با این دو معادله حل نمی‌شوند.

پ) طول $OO' = l$ است. زاویه‌ی امتداد OO' با راستای قائم γ است. طولهای r_1، r_2 و r_3 به ترتیب عبارتند از:



$$r_1 = \left(b^2 + l^2 + 2bl\cos(\alpha+\gamma)\right)^{\frac{1}{2}} \approx b + l\cos(\alpha+\gamma)$$

$$r_2 = \left(b^2 + l^2 + 2bl\cos(\alpha-\gamma)\right)^{\frac{1}{2}} \approx b + l\cos(\alpha-\gamma)$$

$$r_3 = \left(a^2 + l^2 + 2al\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}} \approx a + l\cos\gamma$$

بنابراین نیروی کشش T_1، T_2 و T_3 برابر می‌شوند با:

$$\begin{cases} T_1 = k\,\Delta r_1 = kl\,\cos(\alpha+\gamma) \\ T_2 = k\,\Delta r_2 = kl\,\cos(\alpha-\gamma) \\ T_3 = k'\Delta r_3 = k'\,l\cos\gamma \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} T_1 = \dfrac{k}{k'}\cdot\dfrac{T_3}{\cos\gamma}(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma) \\ T_2 = \dfrac{k}{k'}\cdot\dfrac{T_3}{\cos\gamma}(\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma) \end{cases}$$

$$\therefore T_1 + T_2 = \frac{2T_3\cos\alpha}{\eta} \quad ; \quad \eta = \frac{k'}{k}$$

فرض می‌کنیم با وجود عوض‌شدن جهت میله‌ها، روابط قبلی تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\dfrac{l}{b}$ درست باشند. بنابراین داریم:

$$T_1 + T_2 = \frac{F\cos\theta}{\cos\alpha} - \frac{T_3}{\cos\alpha} = \frac{F\cos\theta}{\cos\alpha} - \frac{\eta}{2}\cdot\frac{(T_1+T_2)}{\cos^2\alpha}$$

$$\therefore (T_1+T_2)\left(1 + \frac{\eta}{2\cos^2\alpha}\right) = \frac{F\cos\theta}{\cos\alpha} \qquad (1)$$

همچنین از رابطه‌ی دوم قسمت (ب) داریم:

$$T_2 - T_1 = \frac{F\sin\theta}{\sin\alpha} \qquad (2)$$

اگر دو معادله‌ی (1) و (2) را با هم حل کنیم، T_1 و T_2 به دست می‌آیند.

$$T_1=\frac{F}{2}\left[\frac{2\cos\alpha\cos\theta}{2\cos^2\alpha+\eta}-\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right]$$

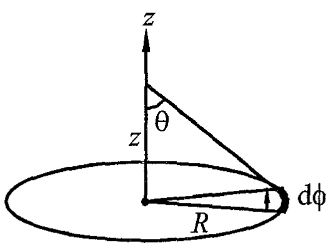
$$T_2=\frac{F}{2}\left[\frac{2\cos\alpha\cos\theta}{2\cos^2\alpha+\eta}+\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right]$$

از طرفی T_3 نیز برابر است با:

$$T_3=\frac{\eta}{2}\cdot\frac{T_1+T_2}{\cos\alpha}=\eta\frac{F\cos\theta}{2\cos^2\alpha+\eta}$$

۳)

الف) میدان الکتریکی روی محور z در امتداد محور z است.



شکل (1)

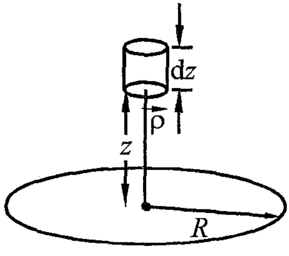
$$\int_0^{2\pi}\frac{\lambda R\,\mathrm{d}\phi}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+z^2\right)}\cos\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\lambda Rz\,\mathrm{d}\phi}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{Rz}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

برای به دست آوردن میدان در نزدیکی محور z، یک سطح استوانه‌ای درنظر می‌گیریم (مطابق شکل (2)). چون $Q_{\text{int.}}=0$ است، پس $\oint\mathbf{E}.\mathrm{d}\mathbf{S}$ صفر می‌شود.

$$\oint\mathbf{E}.\mathrm{d}\mathbf{S}=E_\rho.2\pi\rho\,\mathrm{d}z+E_z(z+\mathrm{d}z)\pi\rho^2-E_z(z)\pi\rho^2=0$$

اگر $E_z(z+\mathrm{d}z)$ را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\mathrm{d}z$ بسط دهیم، داریم:



شکل (2)

$$E_\rho.2\pi\rho\,\mathrm{d}z+\frac{\partial E_z}{\partial z}\mathrm{d}z.\pi\rho^2=0$$

$$\therefore E_\rho=-\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial z}=-\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{R^2-2z^2}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

ب) اگر $z<<R$، E_z و E_ρ تا تقریب اول به صورت زیر می‌شوند.

$$E_z = \frac{\lambda z}{2\varepsilon_0 R^2} \quad ; \quad E_\rho = -\frac{\lambda \rho}{4\varepsilon_0 R^2}$$

حال با استفاده از $-\int \mathbf{E}.\mathbf{dl}$ اختلاف پتانسیل نقطه‌ی (ρ,ϕ,z) را نسبت به مرکز حلقه حساب می‌کنیم.

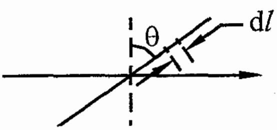
$$V = -\int \mathbf{E}.\mathbf{dl} = -\int\left(\frac{\lambda z}{2\varepsilon_0 R^2}\hat{z} - \frac{\lambda\rho}{4\varepsilon_0 R^2}\hat{\rho}\right)\cdot\left(\mathrm{d}\rho\,\hat{\rho} + \rho\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\phi} + \mathrm{d}z\,\hat{z}\right)$$

$$= -\int_0^z \frac{\lambda z}{2\varepsilon_0 R^2}\mathrm{d}z + \int_0^\rho \frac{\lambda\rho}{4\varepsilon_0 R^2}\mathrm{d}\rho = -\frac{\lambda z^2}{4\varepsilon_0 R^2} + \frac{\lambda\rho^2}{8\varepsilon_0 R^2} = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0 R^2}\left(-z^2 + \frac{\rho^2}{2}\right)$$

این پتانسیل نسبت به مرکز حلقه است. اگر بخواهیم پتانسیل را نسبت به بی‌نهایت به دست آوریم، باید پتانسیل مرکز حلقه، $\frac{\lambda}{2\varepsilon_0}$، را به آن اضافه کنیم. بنابراین داریم:

$$V = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} + \frac{\lambda}{4\varepsilon_0 R^2}\left(-z^2 + \frac{\rho^2}{2}\right) \quad (1)$$

انرژی پتانسیل میله از $\int V\,\mathrm{d}q$ به دست می‌آید، که در آن V از رابطه‌ی (1) و $\mathrm{d}q$ مطابق با زیر به دست می‌آید.



شکل (3)

$$\mathrm{d}q = \lambda'\mathrm{d}l = \lambda'\frac{\mathrm{d}z}{\cos\theta}$$

فاصله‌ی شعاعی ρ نیز برابر $|z|\tan\theta$ است. بنابراین داریم:

$$U = \int_{-d\cos\theta}^{d\cos\theta}\left[\frac{\lambda}{2\varepsilon_0} + \frac{\lambda}{4\varepsilon_0 R^2}\left(-z^2 + \frac{z^2}{2}\tan^2\theta\right)\frac{\lambda'\mathrm{d}z}{\cos\theta}\right]$$

$$= \frac{\lambda\lambda'}{\varepsilon_0}d + \frac{\lambda\lambda' d^3}{6\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{\sin^2\theta}{2} - \cos^2\theta\right)$$

نقاط تعادل با مشتق‌گیری از U نسبت به θ به دست می‌آید.

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\lambda\lambda' d^3}{2\varepsilon_0 R^2}(\sin\theta\cos\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

شرط تعادل پایدار این است که $\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}\theta^2} > 0$ باشد. پس:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}=\frac{\lambda\lambda' d^3}{2\varepsilon_0 R^2}\cos 2\theta$$

اگر $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ و $\lambda\lambda' > 0$ باشد، عبارت اخیر مثبت است و تعادل پایدار داریم.

اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\lambda\lambda' < 0$ باشد، باز عبارت اخیر مثبت است و تعادل پایدار داریم.

پ) در حالت $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ و $\lambda\lambda' > 0$، تغییر انرژی پتانسیل می‌شود:

$$\Delta U=\frac{\lambda\lambda' d^3}{6\varepsilon_0 R^2}\left[\frac{\sin^2\alpha}{2}-\cos^2\alpha+1\right]\approx\frac{\lambda\lambda' d^3}{6\varepsilon_0 R^2}\left[\frac{\alpha^2}{2}-\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)^2+1\right]$$

$$\approx\frac{\lambda\lambda' d^3}{6\varepsilon_0 R^2}\left[\frac{3}{2}\alpha^2\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda\lambda' d^3}{2\varepsilon_0 R^2}\right)\alpha^2$$

بنابراین مقدار $k=\frac{\lambda\lambda' d^3}{2\varepsilon_0 R^2}$ است.

در حالت $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\lambda\lambda' < 0$، تغییر انرژی پتانسیل برابر است با:

$$\Delta U=\frac{\lambda\lambda' d^3}{6\varepsilon_0 R^2}\left[\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2}-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\frac{1}{2}\right]$$

$$\approx\frac{\lambda\lambda' d^3}{6\varepsilon_0 R^2}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)^2-\alpha^2-\frac{1}{2}\right]=\frac{\lambda\lambda' d^3}{6\varepsilon_0 R^2}\left(-\frac{3}{2}\alpha^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-\lambda\lambda' d^3}{2\varepsilon_0 R^2}\right)\alpha^2$$

در این حالت نیز مقدار $k=\frac{-\lambda\lambda' d^3}{2\varepsilon_0 R^2}$ است.

۴)

الف) بار تصویری $q'=-\frac{a}{r}q$ که به فاصله‌ی $r'=\frac{a^2}{r}$ از مرکز کره‌ی به شعاع a قرار دارد، همراه با بار q یک سطح هم‌پتانسیل صفر روی کره ایجاد می‌کنند. حال بار $q''=4\pi\varepsilon_0 aV$ را در مرکز کره قرار می‌دهیم. با این بار سطح کره دارای پتانسیل V می‌شود.

برای به دست آوردن بار کل روی کره این طور عمل می‌کنیم که پتانسیل کره از مجموع پتانسیل بار q در مرکز کره و پتانسیل بارهای سطح کره به دست می‌آید. در واقع:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \Rightarrow Q = \left(4\pi\varepsilon_0 V - \frac{q}{r}\right)a$$

که این همان مجموع دو بار q' و q'' است.

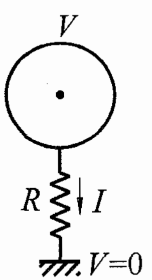
ب) وقتی بار q بیرون کره است داریم:

$$Q(t) = \left(4\pi\varepsilon_0 V(t) - \frac{q}{r_0 - vt}\right)a$$

که در آن به جای r مقدار $r_0 - vt$ گذاشته‌ایم. از طرفی به جای $V(t)$ می‌توان $RI(t) = -R\frac{dQ}{dt}$ را قرار داد. بنابراین داریم:

$$Q(t) = \left(-4\pi\varepsilon_0 R\frac{dQ}{dt} - \frac{q}{r_0 - vt}\right)a$$

چون R کوچک است، Q و $\dot{Q}$ را تا رتبه‌ی اول نسبت به R می‌نویسیم.



$$Q_{(0)} + RQ_{(1)} = \left[-4\pi\varepsilon_0 R\left(\dot{Q}_{(0)} + R\dot{Q}_{(1)}\right) - \frac{q}{r_0 - vt}\right]a$$

$$\therefore \begin{cases} Q_{(0)} = -\dfrac{qa}{r_0 - vt} \\ Q_{(1)} = -4\pi\varepsilon_0 \dot{Q}_{(0)} a = +4\pi\varepsilon_0 \dfrac{qa^2 v}{(r_0 - vt)^2} \end{cases}$$

بنابراین Q تا مرتبه‌ی اول نسبت به R می‌شود:

$$Q = Q_{(0)} + RQ_{(1)} = -\frac{qa}{r_0 - vt} + 4\pi\varepsilon_0 \frac{qa^2 vR}{(r_0 - vt)^2}$$

و $I(t)$ می‌شود:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{qav}{(r_0 - vt)^2} + \frac{8\pi\varepsilon_0 qa^2 v^2}{(r_0 - vt)^3}R$$

وقتی بار q به سوراخ روی کره می‌رسد، بار روی کره $Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 qvR - q$ می‌شود. وقتی بار q داخل کره می‌شود، بار $-q$ روی پوسته‌ی داخلی کره القاء می‌شود. بار q نیز روی پوسته‌ی

خارجی کره قرار می‌گیرد. بار اضافی دیگر نیز به اندازه‌ی q' روی پوسته‌ی خارجی است که در لحظه‌ی اول مقدار $q'_{\circ} = Q_{\circ}$ است. بنابراین مجموع بار $Q = q + q'$ روی پوسته‌ی خارجی قرار دارد. بنابراین داریم:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_{\circ}a} = RI$$

$$-R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_{\circ}a} \Rightarrow \int_{q+q'_{\circ}}^{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{Q} = -\frac{(t-t_{\circ})}{4\pi\varepsilon_{\circ}aR} \Rightarrow \ln\frac{Q}{4\pi\varepsilon_{\circ}qvR} = -\frac{(t-t_{\circ})}{4\pi\varepsilon_{\circ}aR}$$

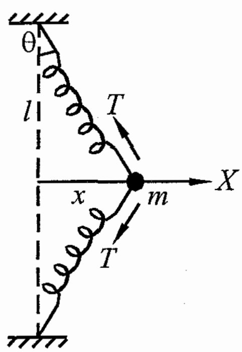
که در آن $t_{\circ} = \frac{r_{\circ}-a}{v}$ است.

$$\therefore Q = (4\pi\varepsilon_{\circ}qvR)\,\mathrm{e}^{-\frac{(t-t_{\circ})}{4\pi\varepsilon_{\circ}aR}} \Rightarrow I = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{qv}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{(t-t_{\circ})}{4\pi\varepsilon_{\circ}aR}}$$

پاسخ آزمون پنجم

۱)

الف) نیروی وارد بر ذره در راستای محور x برابر است با:



$$\begin{aligned}F_x &= -2T\sin\theta \\ &= -2k\left[\sqrt{l^2+x^2}-l\right]\frac{x}{\sqrt{l^2+x^2}} \\ &= -2k\left[x - xl\left(l^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \\ &= -2k\left[x-\frac{xl}{l}\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}+\cdots\right)\right] \\ &= -\frac{k}{l^2}x^3+\cdots\end{aligned}$$

که برای دامنه‌های کوچک $F \approx -\frac{k}{l^2}x^3$ است. بنابراین مقدار $h=\frac{k}{l^2}$ است. دیمانسیون h برابر است با:

$$[h] = ML^{-2}T^{-2}$$

ب) کمیتهای مربوط A (دامنه‌ی حرکت)، τ (زمان تناوب)، h و m هستند. داریم:

$$Q = h^{\alpha}m^{\beta}\tau^{\gamma}A^{\theta}$$

$$[Q] = \left(ML^{-2}T^{-2}\right)^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}L^{\theta} = 1$$

$$\therefore \begin{cases}\alpha+\beta=0 \\ -2\alpha+\theta=0 \Rightarrow \theta=\gamma=-2\beta=2\alpha \\ -2\alpha+\gamma=0\end{cases}$$

بنابراین کمیت بدون بعد Q را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Q = h^{\alpha} m^{-\alpha} \tau^{2\alpha} A^{2\alpha} = \left(\frac{h\tau^2 A^2}{m}\right)^{\alpha}$$

بنابراین تابع ریاضی $\mathrm{f}\left(\frac{h\tau^2 A^2}{m}\right) = 0$ این کمیتها را به هم مربوط می‌کند. جواب این تابع به صورت زیر است.

$$\frac{h\tau^2 A^2}{m} = c \Rightarrow \tau = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{mc}{h}}$$

که در آن c یک عدد ثابت است. این عبارت نشان می‌دهد که زمان تناوب نسبت عکس با دامنه‌ی حرکت ذره دارد.

۲)

الف) در حالت $\alpha = 0$ داریم:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$m\,\mathrm{f}(r)\hat{\mathbf{r}} = mr\dot{\theta}^2(-\hat{\mathbf{r}}) \Rightarrow \mathrm{f}(r) = -r\dot{\theta}^2$$

از طرفی $r\dot{\theta} = v$ است. پس داریم:

$$v^2 = -r\,\mathrm{f}(r)$$

ب) می‌دانیم تغییرات زمانی انرژی کل ذره برابر توان مصرفی نیروی اصطکاک است. یعنی:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2 + U\right) = -\alpha m\mathbf{v}.\mathbf{v}$$

که در آن U انرژی پتانسیل است. بنابراین تغییرات زمانی انرژی پتانسیل می‌شود:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\alpha m v^2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \qquad (1)$$

تغییرات سرعت از مرتبه‌ی α است. پس خود سرعت را تا مرتبه‌ی صفرم درنظر می‌گیریم. یعنی حرکت را روی یک دایره می‌گیریم. از قسمت (الف) داشتیم: $v^2 = -r\,\mathrm{f}(r)$. بنابراین معادله‌ی (1) می‌شود:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = +\alpha mr\,\mathrm{f}(r) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mr\,\mathrm{f}(r)\right) \qquad (2)$$

همچنین داریم: $U_{(r)} = -\int_{\infty}^{r} m\,\mathrm{f}(r)\,\mathrm{d}r$. بنابراین طرف چپ معادله‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = \dot{r}\left(-m\,\mathrm{f}(r)\right)$$

بنابراین معادله‌ی (2) به صورت زیر درمی‌آید.

$$-m\dot{r}\,\mathrm{f}(r) = \alpha m r\,\mathrm{f}(r) + \frac{1}{2}m\dot{r}\left(\mathrm{f}(r) + r\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{f}(r)}{\mathrm{d}r}\right)$$

$$\therefore\ \dot{r} = \frac{-2\alpha r\,\mathrm{f}(r)}{\left(3\,\mathrm{f}(r) + r\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{f}(r)}{\mathrm{d}r}\right)}$$

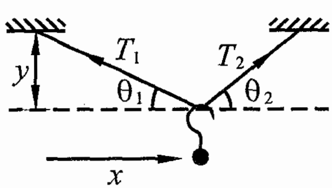
پ) برای $\mathrm{f}(r) = -\dfrac{k}{r^2}$ داریم: $\dfrac{\mathrm{df}(r)}{\mathrm{d}r} = +\dfrac{2k}{r^3}$ و به دست می‌آوریم:

$$\therefore\ \dot{r} = \frac{+2\alpha\,k/r}{\left(\dfrac{-3k}{r^2} + \dfrac{2k}{r^2}\right)} \Rightarrow \dot{r} = -2\alpha r \Rightarrow r = r_{\circ}\,\mathrm{e}^{-2\alpha t}$$

که در آن $r_{\circ}$ شعاع اولیه است.

۳)

معادلات قیدی مسئله عبارتند از: ۱- ثابت بودن طول طناب،۲- ثابت بودن فاصله‌ی افقی دو نقطه‌ی آویز.



شکل (۱)

این قیود عبارتند از:

$$\frac{y}{\sin\theta_1} + \frac{y}{\sin\theta_2} = l \qquad (1)$$

$$\frac{y}{\sin\theta_1}\cos\theta_1 + \frac{y}{\sin\theta_2}\cos\theta_2 = l\cos\theta_{\circ} \qquad (2)$$

برای انحراف‌های کوچک $\theta_1 = \theta_{\circ} + \delta_1$ و $\theta_2 = \theta_{\circ} + \delta_2$ است. با قراردادن این روابط در معادلات (1) و (2) داریم:

$$\frac{y}{\sin(\theta_{\circ} + \delta_1)} + \frac{y}{\sin(\theta_{\circ} + \delta_2)} = l$$

$$\frac{y}{\sin(\theta_o+\delta_1)}\cos(\theta_o+\delta_1)+\frac{y}{\sin(\theta_o+\delta_2)}\cos(\theta_o+\delta_2)=l\cos\theta_o$$

با بسطدادن سینوس و کسینوس و حفظ جملات تا مرتبه‌ی اول δ_1 و δ_2 به دست می‌آوریم:

$$\frac{2y}{\sin\theta_o}\left(1-\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\cot\mathrm{an}\theta_o\right)=l \qquad (3)$$

$$2y\left(1-\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\tan\theta_o-\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\cot\mathrm{an}\theta_o\right)=l\sin\theta_o \qquad (4)$$

اگر $\delta=\frac{\delta_1+\delta_2}{2}$ بگیریم، از معادله‌ی (3) به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{l}{2}\sin\theta_o\left(1+\delta\cot\mathrm{an}\theta_o\right)$$

با جایگزین‌کردن این معادله در معادله‌ی (4) به دست می‌آوریم:

$$2\frac{l}{2}\sin\theta_o\left(1+\delta\cot\mathrm{an}\theta_o\right)\left(1-\delta\tan\theta_o-\delta\cot\mathrm{an}\theta_o\right)=l\sin\theta_o$$

$$\therefore\left(1+\delta\cot\mathrm{an}\theta_o\right)\left(1-\delta\tan\theta_o-\delta\cot\mathrm{an}\theta_o\right)=1$$

اگر تا مرتبه‌ی اول نسبت به δ رابطه‌ی اخیر را حفظ کنیم به دست می‌آوریم: $\delta=0$ یا $\delta_1+\delta_2=0$ است. بنابراین در مرتبه‌ی اول $\delta y=0$ است. از طرفی مطابق شکل، مقدار x برابر است با:

$$x=y\cot\mathrm{an}\theta_1=y\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}=\frac{l\sin\theta_1\sin\theta_2}{\sin\theta_1+\sin\theta_2}\cdot\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}=l\frac{\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin\theta_1+\sin\theta_2}$$

$$x=l\frac{\cos(\theta_o+\delta_1)\sin(\theta_o-\delta_1)}{\sin(\theta_o+\delta_1)+\sin(\theta_o-\delta_1)}=l\frac{(\cos\theta_o-\delta_1\sin\theta_o)(\sin\theta_o-\delta_1\cos\theta_o)}{(\sin\theta_o+\delta_1\cos\theta_o)+(\sin\theta_o-\delta_1\cos\theta_o)}$$

$$\therefore x=l\frac{(\cos\theta_o\sin\theta_o-\delta_1)}{2\sin\theta_o}=\frac{l}{2}\left(\cos\theta_o-\frac{\delta_1}{\sin\theta_o}\right)$$

از طرفی مقدار x اولیه $\frac{l}{2}\cos\theta_o$ است. بنابراین δx برابر می‌شود با:

$$\delta x=-\frac{l}{2}\frac{\delta_1}{\sin\theta_o}$$

ب) مطابق شکل (۱) داریم:

$$\begin{cases} T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 = mg \\ T_2 \cos\theta_2 - T_1 \cos\theta_1 = m\left(-\dfrac{l}{2}\dfrac{\ddot{\delta}_1}{\sin\theta_\circ}\right) \end{cases}$$

با درنظر گرفتن $\theta_1 = \theta_\circ + \delta_1$ و $\theta_2 = \theta_\circ - \delta_1$ و حفظ جملات تا مرتبه‌ی اول نسبت به δ_1 داریم:

$$\begin{cases} T_1\left(\sin\theta_\circ + \delta_1 \cos\theta_\circ\right) + T_2\left(\sin\theta_\circ - \delta_1\cos\theta_\circ\right) = mg \\ T_2\left(\cos\theta_\circ + \delta_1 \sin\theta_\circ\right) - T_1\left(\cos\theta_\circ - \delta_1 \sin\theta_\circ\right) = -\dfrac{ml}{2\sin\theta_\circ}\ddot{\delta}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\theta_\circ\left(T_1 + T_2\right) + \delta_1\cos\theta_\circ\left(T_1 - T_2\right) = mg \\ \cos\theta_\circ\left(T_2 - T_1\right) + \delta_1\sin\theta_\circ\left(T_2 + T_1\right) = -\dfrac{ml}{2\sin\theta_\circ}\ddot{\delta}_1 \end{cases}$$

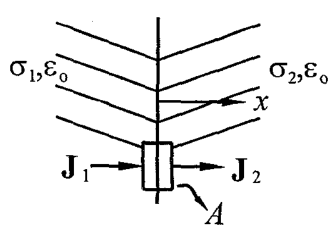
در مرتبه‌ی صفر از معادله‌ی اول داریم: $T_1 = T_2$ و $T_1 = T_2 = \dfrac{mg}{2\sin\theta_\circ}$. در نتیجه از معادله‌ی دوم به دست می‌آوریم:

$$\delta_1 \sin\theta_\circ\left(\frac{mg}{\sin\theta_\circ}\right) = -\frac{ml}{2\sin\theta_\circ}\ddot{\delta}_1$$

$$\therefore\ \ddot{\delta}_1 + \frac{2g\sin\theta_\circ}{l}\delta_1 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{l}\sin\theta_\circ}$$

۴)

الف) گذردهی دو ماده را $\varepsilon_\circ$ می‌گیریم. در هر لحظه، میدان $E_i(t)$ در هر محیط برقرار است. اگر $\sum(t)$ بار صفحه در هر لحظه باشد، داریم:



شکل (۱)

$$E_1 = E_\circ - \frac{\sum(t)}{2\varepsilon_\circ}$$

$$E_2 = E_\circ + \frac{\sum(t)}{2\varepsilon_\circ}$$

بنابراین با استفاده از $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$ به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{J}_1=\sigma_1\left(E_0-\frac{\Sigma(t)}{2\varepsilon_0}\right)\hat{\mathrm{i}}$$
$$\mathbf{J}_2=\sigma_2\left(E_0+\frac{\Sigma(t)}{2\varepsilon_0}\right)\hat{\mathrm{i}}$$

ب) چگالی جریانهای $\mathbf{J}_1$ و $\mathbf{J}_2$ در راستای x هستند. مطابق شکل Q_{in} و Q_{out} یعنی بارهای ورودی و خروجی از سطح A برابر است با:

$$Q_{\text{in}}=J_1A\,\mathrm{d}t$$
$$Q_{\text{out}}=J_2A\,\mathrm{d}t$$

بنابراین افزایش بار روی مرز مشترک می‌شود:

$$\Delta Q=Q_{\text{in}}-Q_{\text{out}}=(J_1-J_2)A\,\mathrm{d}t$$

بنابراین تغییر بار در واحد سطح، $\mathrm{d}\Sigma=\frac{\Delta Q}{A}$، به دست می‌آید.

$$\mathrm{d}\Sigma=(J_1-J_2)\mathrm{d}t\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}t}=J_1-J_2$$

اگر از روابط قسمت (الف) استفاده کنیم، به دست می‌آوریم:

$$\frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}t}=\sigma_1\left(E_0-\frac{\Sigma}{2\varepsilon_0}\right)-\sigma_2\left(E_0+\frac{\Sigma}{2\varepsilon_0}\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}t}=(\sigma_1-\sigma_2)E_0-(\sigma_1+\sigma_2)\frac{\Sigma}{2\varepsilon_0}$$

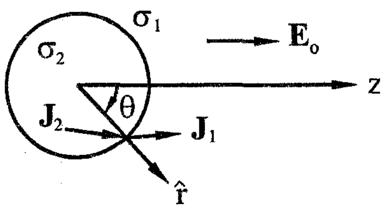
جواب این معادله به صورت زیر است.

$$\Sigma=\frac{2\varepsilon_0(\sigma_1-\sigma_2)E_0}{\sigma_1+\sigma_2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}t}\right)$$

پ) با توجه به اطلاعات مسئله، میدان الکتریکی $\mathbf{E}'_1$ و $\mathbf{E}'_2$ در داخل و خارج کره برابر است با:

$$\begin{cases}\mathbf{E}'_2=E_0\hat{\mathrm{k}}-\dfrac{\Sigma(t)}{3\varepsilon_0}\left(\hat{\mathrm{r}}\cos\theta-\hat{\theta}\sin\theta\right) & ;\quad r<R\\[2ex] \mathbf{E}'_1=E_0\hat{\mathrm{k}}+\dfrac{\Sigma(t)R^3}{3\varepsilon_0r^3}\left(2\hat{\mathrm{r}}\cos\theta+\hat{\theta}\sin\theta\right) & ;\quad r>R\end{cases}$$

بنابراین $\mathbf{J}_1=\sigma_1\mathbf{E}'_1$ و $\mathbf{J}_2=\sigma_2\mathbf{E}'_2$ و از آنجا در مرز مشترک دو ناحیه داریم:



$$(\mathbf{J}_2-\mathbf{J}_1)\cdot\hat{\mathrm{r}}=\frac{\mathrm{d}\Sigma(\theta,t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore\left[(\sigma_2-\sigma_1)\mathbf{E}_o+\sigma_2\mathbf{E}_2-\sigma_1\mathbf{E}_1\right]\cdot\hat{\mathrm{r}}=\frac{\mathrm{d}\Sigma(\theta,t)}{\mathrm{d}t}$$

که در آن $\mathbf{E}_2=-\frac{\Sigma(t)}{3\varepsilon_o}\left(\hat{\mathrm{r}}\cos\theta-\hat{\theta}\sin\theta\right)$

و $\mathbf{E}_1=\frac{\Sigma(t)}{3\varepsilon_o}\left(2\hat{\mathrm{r}}\cos\theta+\hat{\theta}\sin\theta\right)$ است. چون $\mathbf{E}_o=E_o\hat{\mathrm{k}}$ است و روابط $\hat{\mathrm{r}}.\hat{\theta}=0$ ،$\hat{\mathrm{r}}.\hat{\mathrm{r}}=1$ و $\hat{\mathrm{r}}.\hat{\mathrm{k}}=\cos\theta$ برقرار است، داریم:

$$(\sigma_2-\sigma_1)E_o\cos\theta-\frac{(2\sigma_1+\sigma_2)}{3\varepsilon_o}\cos\theta\,\Sigma(t)=\frac{\mathrm{d}\Sigma(t)}{\mathrm{d}t}\cos\theta$$

بنابراین جواب این معادله‌ی دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$\Sigma(t)=\frac{3\varepsilon_o(\sigma_2-\sigma_1)}{2\sigma_1+\sigma_2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{(2\sigma_1+\sigma_2)}{3\varepsilon_o}t}\right)$$

و جواب $\Sigma(t,\theta,\varphi)$ به صورت زیر خواهد بود.

$$\Sigma(t,\theta,\varphi)=\frac{3\varepsilon_o(\sigma_2-\sigma_1)}{2\sigma_1+\sigma_2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{(2\sigma_1+\sigma_2)}{3\varepsilon_o}t}\right)\cos\theta$$

پاسخ آزمون نهایی

۱)

الف) ابتدا سرعت حد کره را به دست می‌آوریم. در حالت حدی وزن کره با نیروی اصطکاک وارد بر آن برابر می‌شود. یعنی:

$$Mg = \pi \rho R^2 v_l^2 \Rightarrow v_l = \sqrt{\frac{Mg}{\pi \rho R^2}}$$

برای یک قطره‌ی باران داریم:

$$v_l = \left(\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\mathrm{w}} g}{\pi \rho R^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{3}\frac{\rho_{\mathrm{w}}}{\rho} R g\right)^{\frac{1}{2}} = 6.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

که در آن $\rho_{\mathrm{w}} = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ چگالی آب است.

از طرفی معادله‌ی حرکت قطره‌ی باران در هوا به صورت زیر است.

$$m v \,\mathrm{d} v = \left(Mg - \pi \rho R^2 v^2\right)\mathrm{d} x \Rightarrow x = \int_0^{\alpha v_l} \frac{m v \,\mathrm{d} v}{Mg - \pi \rho R^2 v^2}$$

که در آن α سرعت قطره نسبت به سرعت حد است ($\alpha = \frac{v}{v_l}$). جواب انتگرال به صورت زیر خواهد بود.

$$x = -\frac{m}{2\pi \rho R^2}\ln(1-\alpha)$$

α را می‌توان عددی بین 0.1 تا 1 گرفت. اگر آن را 0.1 بگیریم، داریم:

$$x \approx 0.1\frac{m}{2\pi\rho R^2} = 0.1\frac{\rho_w . \frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi\rho R^2} \approx 0.2\,\text{m}$$

یعنی از مرتبه‌ی 20 سانتیمتر است. اگر α را $\frac{1}{2}$ بگیریم، جواب از مرتبه‌ی متر می‌شود.

ب) مطابق قسمت (الف) چون سرعت قطره‌ی باران خیلی سریع از مرتبه‌ی سرعت حد می‌شود، پس می‌توانیم فرض کنیم که تقریبا همیشه با سرعت حدش سقوط می‌کند. اگر آهنگ جذب قطرات ریز آب درون مه را با $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ نشان دهیم، معادله‌ی حرکت می‌شود:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v + \pi\rho R^2 v^2 = Mg \qquad (1)$$

همچنین مقدار $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ برای قطره‌ای به شعاع R برابر است با:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \rho_o \pi R^2 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \rho_o \pi R^2 v$$

بنابراین معادله‌ی (1) به صورت زیر می‌شود:

$$(\rho_o + \rho)\pi R^2 v^2 = Mg$$

در حالت $\rho_o << \rho$ داریم:

$$\rho\pi R^2 v^2 = Mg$$

که در آن $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_w$ است. پس داریم:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{\rho_w}{\rho}Rg} \qquad (2)$$

اما با چسبیدن قطرات آب درون مه، شعاع قطره‌ی باران عوض می‌شود. داریم:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_w$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = 4\pi R^2 \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\rho_w$$

از طرف دیگر این مقدار $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$ برابر $\rho_o \pi R^2 v$ است. پس:

$$\rho_o \pi R^2 v = 4\pi R^2 \rho_w \frac{dR}{dt}$$

$$\therefore 4\rho_w \frac{dR}{dt} = \rho_o v \qquad (3)$$

اگر به جای v در رابطه‌ی اخیر از معادله‌ی (2) استفاده کنیم، به دست می‌آوریم:

$$\frac{dR}{\sqrt{R}} = \frac{\rho_o}{4\rho_w}\sqrt{\frac{4}{3}\frac{\rho_w}{\rho}g}\, dt$$

با انتگرال‌گیری از این معادله خواهیم داشت:

$$2\sqrt{R} = \frac{\rho_o}{4\rho_w}\sqrt{\frac{4}{3}\frac{\rho_w}{\rho}g}\, t$$

$$\therefore R = \left(\frac{\rho_o}{8\rho_w}\right)^2 \frac{4}{3}\frac{\rho_w}{\rho} g t^2 \qquad (4)$$

که در آن t زمان سقوط است.

ارتفاع سقوط، h، را می‌توان از رابطه‌ی زیر به دست آورد.

$$h = \int_0^t v\, dt = \int_0^R 4\frac{\rho_w}{\rho_o} dR = \int_0^t \frac{1}{6}\frac{\rho_o}{\rho} g t\, dt$$

که در آن در انتگرال دوم از رابطه‌ی (3) و در انتگرال سوم از رابطه‌ی (4) استفاده شده است. پس داریم:

$$h = \frac{1}{12}\frac{\rho_o}{\rho} g t^2$$

بنابراین زمان کل سقوط قطره از $t_f = \left(\frac{12h\rho}{\rho_o g}\right)^{\frac{1}{2}}$ به دست می‌آید، که اگر آن را در رابطه‌ی (4) بگذاریم، شعاع نهایی قطره تعیین می‌شود.

$$R_f = \left(\frac{\rho_o}{8\rho_w}\right)^2 \frac{4}{3}\frac{\rho_w}{\rho} g \left(\frac{12h\rho}{\rho_o g}\right) = \frac{\rho_o}{4\rho_w} h = \frac{10^{-2}\times 10^3}{4\times 10^3}\,\mathrm{m} = 0.25\,\mathrm{cm}$$

شتاب سقوط قطره برابر است با:

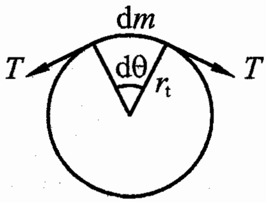
$$a = \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{1}{6}\frac{\rho_o}{\rho} g = \frac{1}{6}\frac{10^{-2}}{1} 10 = 1.6 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$$

سرعت حد قطره نیز برابر است با:

$$v_l=\sqrt{\frac{4}{3}\frac{\rho_\mathrm{w}}{\rho}R_\mathrm{f}g}=\sqrt{\frac{4}{3}\frac{10^3}{1}0.25\times10^{-2}\times10}\approx5.8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

۲)

الف) برای این که شعاع حلقه به حالت تعادل برسد، باید کشش فنر شتاب آن را تامین کند. یعنی:



$$2T\sin\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)=\mathrm{d}m\,\omega^2 r_\mathrm{t}$$

بنابراین داریم:

$$T\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}m\,\omega^2 r_\mathrm{t}\qquad(1)$$

که در آن $T=k'\Delta l=\left(k\dfrac{2\pi}{\mathrm{d}\theta}\right)\left(r_\mathrm{t}\,\mathrm{d}\theta-\dfrac{l_\circ}{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)$ است. بنابراین معادله‌ی (1) می‌شود:

$$k\,\frac{2\pi}{\mathrm{d}\theta}\left(r_\mathrm{t}-\frac{l_\circ}{2\pi}\right)\mathrm{d}\theta.\mathrm{d}\theta=m\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}r_\mathrm{t}\omega^2\qquad(2)$$

که در آن از $\mathrm{d}m=m\,\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$ استفاده شده است.

$$r_\mathrm{t}=\frac{\dfrac{l_\circ}{2\pi}}{1-\dfrac{m\omega^2}{4\pi^2k}}\qquad,\qquad\omega^2<\frac{4\pi^2k}{m}$$

ب) معادله‌ی حرکت شعاعی حلقه حول نقطه‌ی تعادل به صورت زیر است.

$$F_\mathrm{r}=\mathrm{d}m\left(\ddot{r}-r\omega^2\right)\qquad(3)$$

که در آن $F_\mathrm{m}=-T\,\mathrm{d}\theta$ است با $T=2\pi k\left(r-\dfrac{l_\circ}{2\pi}\right)$. همچنین $r=r_\mathrm{t}+\delta$ است. بنابراین معادله‌ی (3) می‌شود:

$$-2\pi k\left[r_\mathrm{t}+\delta-\frac{l_\circ}{2\pi}\right]\mathrm{d}\theta=\frac{m}{2\pi}\mathrm{d}\theta\left(\ddot{\delta}-(r_\mathrm{t}+\delta)\omega^2\right)$$

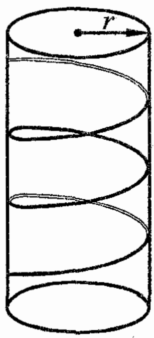
$$\ddot{\delta}+\left(\frac{4\pi^2k}{m}-\omega^2\right)\delta=r_\mathrm{t}\omega^2-\frac{4\pi^2k}{m}\left(r_\mathrm{t}-\frac{l_\circ}{2\pi}\right)\qquad(4)$$

سمت راست معادله‌ی (4) با توجه به معادله‌ی (2) صفر می‌شود. بنابراین معادله به صورت زیر تقلیل می‌یابد.

$$\ddot{\delta}+\left(\frac{4\pi^2 k}{m}-\omega^2\right)\delta=0$$

بنابراین زمان تناوب نوسانات کوچک برابر $T=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{4\pi^2 k}{m}-\omega^2}}$ است.

۳)



الف) محور طنابها حول استوانه‌ای به شعاع r می‌پیچد. طول محور طنابها l است و اگر به اندازه‌ی φ بچرخد، مقدار پیچش آن r_φ است و فاصله‌ی میله تا سقف نیز h خواهد شد و رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$h^2+r^2\varphi^2=l^2$$
$$h=\sqrt{l^2-r^2\varphi^2}$$

ب) انرژی کل طناب برابر است با:

$$E=\frac{1}{2}m\dot{h}^2+\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2-mgh$$

که در آن مبداء انرژی پتانسیل، سقف درنظر گرفته شده است. همچنین داریم:

$$\dot{h}=\frac{-r^2\varphi\dot{\varphi}}{\sqrt{l^2-r^2\varphi^2}}$$

$$\therefore E=\frac{1}{2}\left(\frac{-r^2\varphi\dot{\varphi}}{\sqrt{l^2-r^2\varphi^2}}\right)^2+\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2-mg\sqrt{l^2-r^2\varphi^2}$$

پ) جمله‌ی اول در عبارت انرژی در قسمت (ب) ضریب $\frac{r^4}{l^2}$ دارد که می‌توان صرف‌نظر کرد. بنابراین تنها جملات دوم و سوم را نگه می‌داریم. جمله‌ی سوم را نیز تا اولین مرتبه نسبت به $\frac{r}{l}$ نگه می‌داریم. پس داریم:

$$E=\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2-mgl\left(1-\frac{r^2}{2l^2}\varphi^2\right)$$

با مشتق‌گیری زمانی از عبارت اخیر داریم:

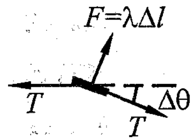
$$0 = I\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mg\frac{r^2}{2l}\left(2\varphi\dot{\varphi}\right) \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{mgr^2}{lI}\varphi = 0$$

$$\therefore \varphi = \varphi_{\circ}\cos(\omega t + \theta_{\circ})$$

که با فرض $\dot{\varphi}(0) = 0$ مقدار $\theta_{\circ} = 0$ است. مقدار $\omega = \sqrt{\dfrac{mgr^2}{lI}}$ است.

۴)

الف) مطابق شکل (1) در حالت تعادل سیم داریم:



شکل (1)

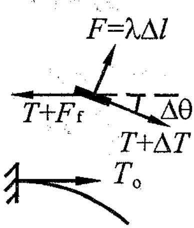
$$T\sin\Delta\theta = F$$

$$T\Delta\theta = \lambda\Delta l$$

$$\therefore \theta = \frac{\lambda}{T}l$$

چون T در سراسر طناب ثابت است، پس شکل منحنی دایره‌ای به شعاع $\dfrac{T}{\lambda}$ است.

ب) مطابق شکل (2) در حالت تعادل سیم داریم:



شکل (2)

$$\left(T + \Delta T\right)\Delta\theta = \lambda\Delta l$$

$$\therefore T\Delta\theta = \lambda\Delta l$$

که در آن $\Delta T = F_{\text{f}}$ است. بنابراین داریم:

$$\Delta T = F_{\text{f}} = \mu\lambda\Delta l \Rightarrow \Delta T = \mu T\Delta\theta \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \mu\Delta\theta$$

$$\therefore T = T_{\circ}\,\text{e}^{\mu\theta}$$

از طرفی $\Delta\theta = \dfrac{\lambda}{T}\Delta l$ است. بنابراین:

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{T_{\circ}}\text{e}^{-\mu\theta}\,\Delta l \Rightarrow \text{e}^{\mu\theta}\,\Delta\theta = \frac{\lambda}{T_{\circ}}\Delta l \Rightarrow \frac{1}{\mu}\text{e}^{\mu\theta}\Big|_{0}^{\theta} = \frac{\lambda}{T_{\circ}}l \Rightarrow \text{e}^{\mu\theta} - 1 = \frac{\lambda}{T_{\circ}}\mu l$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{\mu}\ln\left(1 + \frac{\lambda\mu l}{T_{\circ}}\right)$$

پ) با توجه به اینکه هر تکه از سیم که بخواهد داخل یخ فرو رود، باید نیروی بر واحد سطح از $\lambda_{\max}$ بیشتر باشد، پس λ تقریباً همان $\lambda_{\max}$ خواهد بود.

۵)

الف) تا مرتبه‌ی صفر نسبت به K داریم:

$$K=0 \Rightarrow F=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow \begin{cases} x=vt+x_\circ \\ y=b \end{cases}$$

از طرفی $\mathbf{a}=\dfrac{\mathbf{F}}{m}=\dfrac{KQq}{mr^2}\hat{\mathbf{r}}$ و $r=\sqrt{x^2+b^2}$ است. بنابراین تا مرتبه‌ی اول نسبت به K شتاب ذره‌ی اول به صورت $a=\dfrac{KQq}{m(x^2+b^2)}$ است.

ب) توان تابشی $P=\dfrac{2}{3}\dfrac{Kq^2a^2}{c^3}$ است. بنابراین با استفاده از قسمت (الف) داریم:

$$P=\frac{2}{3}\frac{Kq^2}{c^3}\left(\frac{KQq}{m(x^2+b^2)}\right)^2$$

از طرفی P را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$$

بنابراین دیفرانسیل $\mathrm{d}E$ به صورت زیر می‌شود:

$$\mathrm{d}E=\frac{2}{3}\frac{K^3Q^2q^4}{m^2c^3v}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+b^2)^2}$$

$$\therefore E=\frac{2}{3}\frac{K^3Q^2q^4}{m^2c^3v}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+b^2)^2}=\frac{\pi}{3}\frac{Q^2q^4}{m^2c^3vb^3}K^3$$

پ) انرژی پتانسیل ذره در بی‌نهایت صفر است. بنابراین انرژی کل ذره در ابتدا $\dfrac{1}{2}mv^2$ است.
اگر این انرژی کمتر از انرژی تلف شده باشد، ذره به دام می‌افتد. یعنی:

$$\frac{\pi}{3}\frac{Q^2q^4}{m^2c^3vb^3}K^3>\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow b<\frac{K}{mcv}\left(\frac{2\pi}{3}Q^2q^4\right)^{\frac{1}{3}}=b_1$$

بنابراین برای فواصل کمتر از مقدار b_1 ذره گیر می‌افتد. سطح مقطع این فرایند نیز برابر $\pi b_1{}^2$ است.

$$S=\pi b_1{}^2=\frac{\pi K^2}{m^2c^2v^2}\left(\frac{2\pi}{3}Q^2q^4\right)^{\frac{2}{3}}$$

۶)

الف) تغییرات انرژی کل ذره برابر توان مصرفی نیروی اصطکاک است. یعنی:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2+mu(r)\right)=-m\alpha\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u(r)}{\mathrm{d}r}=-\alpha v^2 \qquad (1)$$

با فرض دایره‌ای بودن مسیر داریم:

$$-m\frac{v^2}{r}=\mathrm{f}(r)$$

که در آن $\mathrm{f}(r)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(mu(r)\right)$ است، که با فرض $u(r)=\mathrm{A}r^\beta$ داریم:

$$\mathrm{f}(r)=-m\mathrm{A}\beta r^{\beta-1}$$

بنابراین مقدار v^2 می‌شود:

$$v^2=\mathrm{A}\beta r^\beta \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}=\mathrm{A}\beta^2\,\dot{r}r^{\beta-1}$$

اگر مقادیر اخیر را در معادله‌ی (1) بگذاریم، به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2}\mathrm{A}\beta^2\,\dot{r}r^{\beta-1}+\dot{r}\,\mathrm{A}\beta r^{\beta-1}=-\alpha\,\mathrm{A}\beta r^\beta$$

$$\therefore \dot{r}=\frac{-2\alpha}{\beta+2}r\Rightarrow r=r_\mathrm{o}\,\mathrm{e}^{\frac{-2\alpha}{\beta+2}t}$$

ب) با فرض دایره‌ای بودن مسیر داریم:

$$-r\dot{\theta}^2=-\mathrm{A}\beta r^{\beta-1}\Rightarrow\dot{\theta}^2=\mathrm{A}\beta r_\mathrm{o}{}^{\beta-2}\,\mathrm{e}^{-2\left(\frac{\beta-2}{\beta+2}\right)\alpha t}$$

بنابراین با مشتق‌گیری زمانی از رابطه‌ی اخیر می‌توانیم $\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}$ را به دست آوریم.

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\mathrm{A}\beta r_\mathrm{o}{}^{\beta-2}}\left(\frac{2-\beta}{2+\beta}\right)\alpha\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{\beta-2}{\beta+2}\right)\alpha t}$$

پ) برای اینکه فرض دایره‌ای بودن مسیر را بررسی کنیم، باید ببینیم تغییر شعاع مسیر در یک دور گردش نسبت به شعاع مدار چقدر است. اگر $r(t)=r$ باشد، $r(t+\tau)$ را که در آن τ زمان یک دور گردش است، به دست می‌آوریم.

$$r(t+\tau)=r\,e^{-\frac{2\alpha}{\beta+2}\tau}\approx r\left(1-\frac{2\alpha}{\beta+2}\tau\right)\Rightarrow \Delta r=-\frac{2\alpha r}{\beta+2}\tau$$

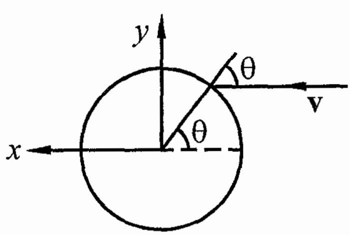
اگر به جای τ مقدار $\frac{2\pi}{\dot\theta}$ را قرار دهیم و به جای $\dot\theta$ نیز از قسمت (ب) استفاده کنیم، داریم:

$$\frac{\Delta r}{r}=-\frac{2\alpha}{\beta+2}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{A\beta r_o^{\beta-2}}}e^{\left(\frac{\beta-2}{\beta+2}\right)\alpha t}\quad ;\quad (A\beta>0)$$

اگر $\alpha\left(\frac{\beta-2}{\beta+2}\right)<0$ باشد، با گذشت زمان نسبت $\frac{\Delta r}{r}$ کاهش می‌یابد و فرض دایره‌ای بودن مسیر بهتر می‌شود.

اگر $0<\alpha\left(\frac{\beta-2}{\beta+2}\right)t<<1$ باشد، هنوز تقریب قابل قبول است. اما وقتی t به سمت $\frac{\beta+2}{\alpha(\beta-2)}$ میل می‌کند، این فرض دیگر خوب نخواهد بود.

۷) سرعت جریان هوا نسبت به استوانه برابر است با:



$$\mathbf{v}'=\mathbf{v}-r\omega\hat\theta$$

بنابراین مؤلفه‌های شعاعی و مماسی سرعت جریان هوا نسبت به استوانه می‌شود:

$$v_r'=-v\cos\theta$$
$$v_\theta'=v\sin\theta-r\omega$$

تغییر سرعت در راستای شعاعی، هنگام برخورد با استوانه برابر $\Delta v_r=-\beta v_r'-v_r'=(1+\beta)v\cos\theta$ است. بنابراین نیروی وارد بر جرم Δm از هوا در راستای شعاعی برابر می‌شود با:

$$\Delta F_r=\Delta m\frac{\Delta v_r}{\Delta t}=\frac{\Delta m}{\Delta t}v(1+\beta)\cos\theta$$

از طرفی $\Delta m=\rho(v\cos\theta)\Delta t\,\Delta A$ و $\Delta A=(r\Delta\theta)l$ است. بنابراین داریم:

$$\Delta F_r=\rho v\cos\theta(r\Delta\theta)l.v(1+\beta)\cos\theta$$

که به صورت دیفرانسیلی می‌شود:

$$dF_r=\rho v^2\cos^2\theta(1+\beta)rl\,d\theta$$

مؤلفه‌ی y ی $\mathrm{d}F_{\mathrm{r}}$ صفر است. زیرا مؤلفه‌ی y ی نیمه‌ی پایینی استوانه، نیمه‌ی بالایی را خنثی می‌کند و فقط مؤلفه‌ی x آن باقی می‌ماند.

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{x}} = -\mathrm{d}F_{\mathrm{r}}\cos\theta \Rightarrow F_{\mathrm{x}} = -\rho v^2 rl\,(1+\beta)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{4}{3}\rho v^2 rl\,(1+\beta)$$

که البته برعکس این نیرو (یعنی با علامت مثبت) به استوانه وارد می‌شود.

از طرفی چون مؤلفه‌ی مماسی سرعت هم عوض می‌شود، نیرویی نیز از طرف جریان هوا به استوانه در راستای مماسی وارد می‌شود. تغییر سرعت جریان هوا در این راستا می‌شود:

$$\Delta v_\theta = \alpha(v\sin\theta - r\omega) - (v\sin\theta - r\omega) = (\alpha-1)(v\sin\theta - r\omega)$$

پس نیروی مماسی وارد بر جریان هوا برابر است با:

$$\Delta F_\theta = \Delta m\,\frac{\Delta v_\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v_\theta = \rho v\cos\theta(r\Delta\theta)l.(\alpha-1)(v\sin\theta - r\omega)$$

مؤلفه‌های دیفرانسیلی نیرو در راستای x و y ی ناشی از این نیروی مماسی می‌شود:

$$\mathrm{d}F'_{\mathrm{x}} = \rho vrl\,(\alpha-1)\cos\theta(v\sin\theta - r\omega)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$
$$\mathrm{d}F'_{\mathrm{y}} = \rho vrl\,(\alpha-1)\cos\theta(v\sin\theta - r\omega)\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

با انتگرال‌گیری از این دو رابطه به دست می‌آوریم:

$$F'_{\mathrm{x}} = \frac{2}{3}\rho v^2 rl\,(\alpha-1)$$

$$F'_{\mathrm{y}} = -\frac{\pi}{2}\rho\omega r^2 l\,(\alpha-1)v$$

که البته بر استوانه، نیرویی بر خلاف این نیروها وارد می‌شود. بنابراین مؤلفه‌ی x و y ی نیروی وارد بر استوانه در حالت کلی می‌شود:

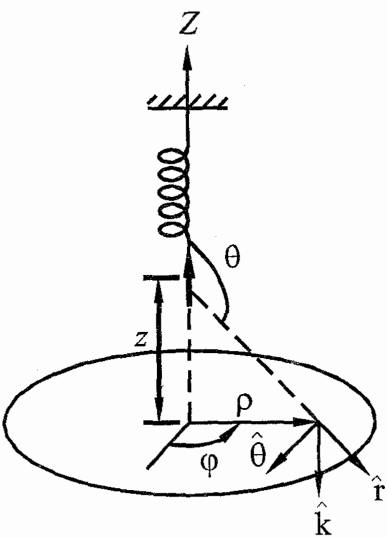
$$f_{\mathrm{x}} = -(F_{\mathrm{x}} + F'_{\mathrm{x}}) = \frac{4}{3}\rho v^2 rl\,(1+\beta) - \frac{2}{3}\rho v^2 rl\,(\alpha-1) = \frac{2}{3}\rho v^2 rl\,(3+2\beta-\alpha)$$

$$f_{\mathrm{y}} = -F'_{\mathrm{y}} = \frac{\pi}{2}\rho\omega r^2 l\,v(\alpha-1)$$

۸)

الف) شار میدان مغناطیسی گذرنده از حلقه از رابطه‌ی $\int \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$ به دست می‌آید، که در آن

$\mathbf{dS} = \mathrm{d}S\left(-\hat{\mathrm{k}}\right) = \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\left(-\hat{\mathrm{k}}\right)$ است. بنابراین داریم:



$$\Phi = \int \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

$$\therefore \Phi = \int \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\begin{pmatrix} 2\cos\theta\cos(\pi-\theta) \\ +\sin\theta\sin(\pi-\theta)\end{pmatrix}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$$

$$\therefore \Phi = \frac{\mu_0 m}{2}\int\frac{\left(-2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\rho\,\mathrm{d}\rho}{r^3} \qquad (1)$$

از طرفـــــــــی $\tan\theta = \dfrac{\rho}{z}$ اســـــــــت و درنتیجـــــــه $\mathrm{d}\rho = z\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}$ و همچنـــــــین $r^2 = z^2+\rho^2 = \dfrac{z^2}{\cos^2\theta}$ می‌باشد. بنابراین انتگرال نهایی رابطه‌ی (1) به صـورت زیـر تبدیل می‌شود.

$$\Phi = \frac{\mu_0 m}{2z}\int_{\pi}^{\pi-\tan^{-1}\left(\frac{a}{z}\right)}\left(1-3\cos^2\theta\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 m a^2}{2\left(z^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ب) تغییر شار میدان مغناطیسی، نیروی محرکه‌ی القایی را می‌دهد.

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2}\frac{\mu_0 m a^2 z\dot{z}}{\left(z^2+a^2\right)^{\frac{5}{2}}} \approx \frac{3}{2}\frac{\mu_0 m a^2}{a^5}z\dot{z} = \frac{3}{2}\frac{\mu_0 m}{a^3}z\dot{z} \qquad (2)$$

اگر فنر و دوقطبی با جرم M در $z=0$ در حـال تعـادل باشـند، یعنـی $Mg = kz_0$ و دامنـه‌ی حرکـت دوقطبـی z_1 باشـد، حرکـت نوسـانی آن بـه صـورت $z = z_1\sin\sqrt{\dfrac{k}{M}}t$ اسـت و از آنجا $\dot{z} = z_1\sqrt{\dfrac{k}{M}}\cos\sqrt{\dfrac{k}{M}}t$ است. بنابراین نیروی محرکه‌ی القایی با اسـتفاده از رابطـه‌ی (2) می‌شود:

$$\varepsilon = \frac{3}{2}\frac{\mu_0 m}{a^3} z_1{}^2 \sqrt{\frac{k}{M}} \sin\sqrt{\frac{k}{M}}t \cos\sqrt{\frac{k}{M}}t$$

جریان گذرنده از حلقه نیز برابر $I = \dfrac{\varepsilon}{R}$ است.

$$I = \frac{3}{4}\frac{\mu_0 m}{a^3 R} z_1{}^2 \sqrt{\frac{k}{M}} \sin\left(2\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)$$

پ) اتلاف انرژی را در یک دوره‌ی تناوب به دست می‌آوریم. توان اتلافی برابر است با:

$$P = RI^2 = -\frac{9}{16}\frac{\mu_0{}^2 m^2}{a^6 R} z_1{}^4 \frac{k}{M} \sin^2\left(2\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)$$

بنابراین اتلاف انرژی در یک دوره‌ی تناوب می‌شود:

$$E = \int_0^T P\mathrm{d}t = -\frac{9}{16}\frac{\mu_0{}^2 m^2}{a^6 R} z_1{}^4 \frac{k}{M} \int_0^T \sin^2\left(2\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)\mathrm{d}t = -\frac{9}{16}\frac{\mu_0{}^2 m^2}{a^6 R} z_1{}^4 \frac{k}{M}\left(\frac{T}{2}\right)$$

بنابراین متوسط اتلاف انرژی در یک دوره‌ی تناوب برابر است با:

$$\overline{P} = -\frac{9}{16}\frac{\mu_0{}^2 m^2}{a^6 R} z_1{}^4 \frac{k}{2M}$$

که این مقدار با $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}kz_1{}^2\right)$ برابر است. پس داریم:

$$-\frac{9}{32}\frac{\mu_0{}^2 m^2}{a^6 R} z_1{}^4 \frac{k}{M} = kz_1 \dot{z}_1$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}z_1}{z_1{}^3} = -\frac{9}{32}\frac{\mu_0{}^2 m^2}{a^6 RM}\mathrm{d}t$$

$$\therefore \frac{1}{z_1{}^2(0)} - \frac{1}{z_1{}^2(t)} = -\frac{9}{16}\frac{\mu_0{}^2 m^2}{a^6 RM}t$$

$$\therefore z_1{}^2(t) = \left(\frac{1}{z_1{}^2(0)} + \frac{9}{16}\frac{\mu_0{}^2 m^2}{a^6 RM}t\right)^{-1}$$

بنابراین تغییرات زمانی دامنه‌ی نوسان می‌شود:

$$\therefore\ z_1(t) = \sqrt{\left(\frac{1}{z_1^{\,2}(0)} + \frac{9}{16}\frac{\mu_o^{\,2} m^2}{a^6 RM} t\right)^{-1}}$$

پیوست‌ها

پیوست ۱

منظومه‌ی شمسی

پارامتر	عطارد	زهره	زمین	مریخ	مشتری	زحل	اورانوس	نپتون	پلوتو
حداکثر فاصله از خورشید ($۱۰^۶$ km)	۶۹/۷	۱۰۹	۱۵۲/۱	۲۴۹/۱	۸۱۵/۷	۱۵۰۷	۳۰۰۴	۴۵۳۷	۷۳۷۵
حداقل فاصله از خورشید ($۱۰^۶$ km)	۴۵/۹	۱۰۷/۴	۱۴۷/۱	۲۰۶/۷	۷۴۰/۹	۱۳۴۷	۲۷۳۵	۴۴۵۶	۴۴۲۵
فاصله‌ی متوسط از خورشید ($۱۰^۶$ km)	۵۷/۹	۱۰۸/۲	۱۴۹/۶	۲۲۷/۹	۷۷۸/۳	۱۴۲۷	۲۸۶۹/۶	۴۴۹۶/۶	۵۹۰۰
فاصله‌ی متوسط از خورشید (یکای نجومی)	۰/۳۸۷	۰/۷۲۳	۱	۱/۵۲۴	۵/۲۰۳	۹/۵۳۹	۱۹/۱۸	۳۰/۰۶	۳۹/۴۴
دوره‌ی تناوب حرکت انتقالی	۸۸ d	۲۲۴/۷ d	۳۶۵/۲۶ d	۶۸۷ d	۱۱/۸۶ y	۲۹/۴۶ y	۸۴/۰۱ y	۱۶۴/۸ y	۲۴۷/۷ y
دوره‌ی تناوب حرکت وضعی	۵۹ d	-۲۴۳ d (برخلاف جهت حرکت وضعی زمین)	۲۳ h ۵۶ min ۴ s	۲۴ h ۳۷ min ۲۲ s	۸ h ۵۰ min ۳۰ s	۱۰ h ۱۴ min	-۱۱ h (برخلاف جهت حرکت وضعی زمین)	۱۶ h	۹ d ۸ h
سرعت مداری ($km.s^{-1}$)	۴۷/۹	۳۵	۲۹/۸	۲۴/۱	۱۳/۱	۹/۶	۶/۸	۵/۴	۴/۷
تمایل محور نسبت به مدار	<۲۸°	≈۳°	۲۳° ۲۷'	۲۵°	۳° ۰۵'	۲۶° ۴۴'	۹۷° ۵۴'	۲۹° ۳۶'	۵۷° ۳۰'
تمایل مدار نسبت به صفحه‌ی مدار زمین	۷°	۳/۴°	۰°	۱/۹°	۱/۳°	۲/۵°	۰/۸°	۱/۸°	۱۷/۲°
خروج از مرکز مدار	۰/۲۰۶	۰/۰۰۷	۰/۰۱۷	۰/۰۹۳	۰/۰۴۸	۰/۰۵۶	۰/۰۴۷	۰/۰۰۹	۰/۲۵۰
قطر استوایی (km)	۴۸۸۰	۱۲۱۰۴	۱۲۷۵۶	۶۷۸۷	۱۴۲۸۰۰	۱۲۰۰۰۰	۵۱۸۰۰	۴۹۵۰۰	۲۳۰۰
جرم (جرم زمین=۱)	۰/۰۵۶	۰/۸۱۵	۱	۰/۱۰۸	۳۱۷/۹	۹۵/۲	۱۴/۶	۱۷/۲	۰/۰۰۲
چگالی متوسط (g/cm^3)	۵/۶	۵/۲	۵/۵	۴/۰	۱/۳	۰/۷	۱/۲	۱/۷	۲/۰۳
جو (اجزاء اصلی)	ندارد	دی‌اکسید کربن	ازت، اکسیژن	دی‌اکسید کربن، آرگون	هیدروژن، هلیوم	هیدروژن، هلیوم	هیدروژن، هلیوم، متان	هیدروژن، هلیوم، متان	چیزی تا کنون کشف نشده است
شتاب ثقل در سطح (m/s^2)	۳/۷۸	۸/۶۰	۹/۷۸	۳/۷۲	۲۲/۹	۹/۰۵	۷/۷۷	۱۱/۰	۰/۰۳
قطر ظاهری خورشید از سیاره	۱° ۲۲' ۴۰"	۴۴' ۱۵"	۳۱' ۵۹"	۲۱'	۶' ۰۹"	۳' ۲۲"	۱' ۴۱"	۱' ۰۲"	۴۹"
قمرهای شناخته شده	۰	۰	۱	۲	حلقه‌ها ۱۶+	حلقه‌ها ۱۹+	حلقه‌ها ۱۵+	حلقه‌ها ۸+	۱
سرعت فرار (km/s)	۴/۳	۱۰/۳	۱۱/۲	۵/۰	۵۹/۵	۳۵/۶	۲۱/۲	۲۳/۶	۱/۳

پیوست ۲

داده‌های مربوط به خورشید، زمین و ماه

خورشید

جرم	$۱/۹۹\times۱۰^{۳۰}$ kg
شعاع متوسط	$۶/۹۶\times۱۰^{۵}$ km
چگالی متوسط	۱۴۱۰ $kg.m^{-۳}$
شتاب گرانی در سطح	۲۷۴ $m.s^{-۲}$
دمای در سطح	۶۰۰۰ K
میزان انرژی تابشی	$۳/۹۰\times۱۰^{۲۶}$ W
سرعت فرار	۶۱۸ $km.s^{-۱}$

زمین

جرم	$۵/۹۸\times۱۰^{۲۴}$ kg
شعاع استوایی	$۶/۳۷۸\times۱۰^{۶}$ m
شعاع قطبی	$۶/۳۵۷\times۱۰^{۶}$ m
شعاع کره هم‌حجم با زمین	$۶/۳۷\times۱۰^{۶}$ m
چگالی متوسط	۵۵۲۲ $kg.m^{-۳}$
شتاب ثقل[۱]	۹/۸۰۶۶۵ $m.s^{-۲}$
سرعت مداری متوسط	۲۹۷۷۰ $m.s^{-۱}$
سرعت زاویه‌ای	$۷/۲۹\times۱۰^{-۵}$ $rad.s^{-۱}$
ثابت خورشیدی[۲]	۱۳۴۰ $W.m^{-۲}$
میدان مغناطیسی (در واشنگتن دی‌سی)	$۵/۷\times۱۰^{-۵}$ T
گشتاور دو قطبی مغناطیسی	$۸/۱\times۱۰^{۲۲}$ $A.m^{۲}$
اتمسفر استاندارد	$۱/۰۱۳\times۱۰^{۵}$ pa ,۱۴/۷۰ $lb.in^{-۲}$,۷۶۰/۰ mm.Hg
چگالی هوای خشک در STP[۳]	۱/۲۹ $kg.m^{-۳}$
سرعت صوت در هوای خشک در STP	۳۳۱/۴ $m.s^{-۱}$,۱۰۸۹ $ft.s^{-۱}$,۷۴۲/۵ $mi.h^{-۱}$

۱. در سال ۱۲۸۰/۱۹۱۰، این مقدار را مجمع عمومی اوزان و مقادیر برای g در سطح دریا و عرض جغرافیایی ۴۵° تصویب کرده است.

۲. این مقدار، مقداری است که با آن انرژی خورشیدی، درحالت تابش عمودی و در خارج از جو زمین، بر یکای سطح می‌تابد.

۳. دما و فشار متعارفی

ماه

جرم	$۷/۳۶\times ۱۰^{۲۲}$ kg
شعاع	۱۷۳۸ km
چگالی متوسط	۳۴۳۰ $kg.m^{-۳}$
شتاب ثقل در سطح	۱٫۶۷ $m.s^{-۲}$
فاصلهٔ متوسط زمین تا ماه	$۳٫۸۲\times ۱۰^{۵}$ km

برخی از ثابت‌های بنیادی فیزیک *

ثابت	علامت	مقدار مورد استفاده در محاسبه	بهترین مقدار (۱۹۹۸/ ۱۳۷۷)	
			مقدار a	عدم قطعیت b
سرعت نور در خلأ	c	$۳٫۰۰\times۱۰^{۸}\ m.s^{-۱}$	۲٫۹۹۷۹۲۴۵۸	دقیق
بار الکتریکی بنیادی	e	$۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\ C$	۱٫۶۰۲۱۷۶۴۶۲	۰٫۳۰۹
جرم الکترون	m_e	$۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}\ kg$	۹٫۱۰۹۳۸۱۸۸	۰٫۵۹
گذردهی خلأ	ϵ_o	$۸٫۸۵\times۱۰^{-۱۲}\ F.m^{-۱}$	۸٫۸۵۴۱۸۷۸۱۷۶۲	دقیق
تراوایی خلأ	μ_o	$۱٫۲۶\times۱۰^{-۶}\ H.m^{-۱}$	۱٫۲۵۶۶۳۷۰۶۱۴۳	دقیق
نسبت بار به جرم الکترون	e/m_e	$۱٫۷۶\times۱۰^{۱۱}\ C.kg^{-۱}$	۱٫۷۵۸۸۲۰۱۷۴	۰٫۰۴۰
جرم پروتون	m_p	$۱٫۶۷\times۱۰^{-۲۷}\ kg$	۱٫۶۷۲۶۲۱۵۸	۰٫۰۷۹
نسبت جرم پروتون به جرم الکترون	m_p/m_e	۱۸۴۰	۱۸۳۶٫۱۵۲۶۶۷۵	۰٫۰۰۲۱
جرم نوترون	m_n	$۱٫۶۸\times۱۰^{-۲۷}\ kg$	۱٫۶۷۴۹۲۷۱۶	۰٫۰۷۹
ثابت پلانک	h	$۶٫۶۳\times۱۰^{-۳۴}\ J.s$	۶٫۶۲۶۰۶۸۷۶	۰٫۰۷۸
طول موج کامپتونی الکترون	λ_e	$۲٫۴۳\times۱۰^{-۱۲}\ m$	۲٫۴۲۶۳۱۰۲۱۵	۰٫۰۰۷۳
ثابت گاز مولی	R	$۸٫۳۱\ J.mol^{-۱}.K^{-۱}$	۸٫۳۱۴۴۷۲	۱٫۷
ثابت آووگادرو	N_A	$۶٫۰۲\times۱۰^{۲۳}\ mol^{-۱}$	۶٫۰۲۲۱۴۱۹۹	۰٫۰۷۹
ثابت بولتزمن	k	$۱٫۳۸\times۱۰^{-۲۳}\ J.K^{-۱}$	۱٫۳۸۰۶۵۰۳	۱٫۷
حجم مولی گاز ایده‌ال در STP^{c}	V_m	$۲٫۲۴\times۱۰^{-۲}\ m^{۳}.mol^{-۱}$	۲٫۲۴۱۳۹۹۶	۱٫۷
ثابت فاراده	F	$۹٫۶۵\times۱۰^{۴}\ C.mol^{-۱}$	۹٫۶۴۸۵۳۴۱۵	۰٫۰۴۰
ثابت استفان- بولتزمن	σ	$۵٫۶۷\times۱۰^{-۸}\ W.m^{-۲}.K^{-۴}$	۵٫۶۷۰۴۰۰	۷٫۰
ثابت ریدبرگ	R_∞	$۱٫۱۰\times۱۰^{۷}\ m^{-۱}$	۱٫۰۹۷۳۷۳۱۵۶۸۵۴۹	۰٫۰۰۰۰۰۷۶
ثابت ثقلی	G	$۶٫۶۷\times۱۰^{-۱۱}\ m^{۳}.s^{-۲}.kg^{-۱}$	۶٫۶۷۳	۱٫۵۰۰
شعاع بور	a_o	$۵٫۲۹\times۱۰^{-۱۱}\ m$	۵٫۲۹۱۷۷۲۰۸۳	۰٫۰۰۳۷
گشتاور مغناطیسی الکترون	μ_e	$۹٫۲۸\times۱۰^{-۲۴}\ J.T^{-۱}$	۹٫۲۸۴۷۶۳۶۲	۰٫۰۴۰
گشتاور مغناطیسی پروتون	μ_p	$۱٫۴۱\times۱۰^{-۲۶}\ J.T^{-۱}$	۱٫۴۱۰۶۰۶۶۳۳	۰٫۰۴۱
مگنتون بور	μ_B	$۹٫۲۷\times۱۰^{-۲۴}\ J.T^{-۱}$	۹٫۲۷۴۰۰۸۹۹	۰٫۰۴۰
مگنتون هسته‌ای	μ_N	$۵٫۰۵\times۱۰^{-۲۷}\ J.T^{-۱}$	۵٫۰۵۰۷۸۳۱۷	۰٫۰۴۰

a.یکا و توان ده این مقادیر همان مقادیر مورد استفاده در محاسبه است.

b.بخش بر میلیون.

c.در دما و فشار متعارفی که عبارت است از صفر درجه‌ی سانتیگراد و یک بار.

* منبع:

Peter J.Mohr and Barry N.Taylor, Journal of physical and chemical Reference Data, Vol.28, no.6 (1999) and Reviews of Modern physics, Vol.72, no.2 (2000)

همچنین سایت زیر را ببینید:

http://physics.nist.gov/constants.